《泛函分析》课堂笔记

涂嘉乐 PB23151786

2025 秋

前言

本人于 2025 秋修读了《泛函分析》，授课老师为中国科学技术大学数学科学学院的刘聪文教授，以下是我的笔记，模版是我自己做的，内容主要来自刘老师上课的板书以及课程群中的讲义，并解释了一些证明过程中的跳步；由于第三章只讲了一小部分，因此在本笔记中将它归到了第二章（见目录）；笔记中蓝色的字均为超链接，便于追溯引用的定理/引理等，除此之外笔记中可能存在一些错误，敬请谅解！

涂嘉乐

2025 年秋

目录

第一章 度量空间

§1.1 基本定义

定义 1.1（度量、度量空间）设 X 是一个非空集合，如果 $\mathrm{d}: X\times X\to\mathbb{R}$ 满足

(1) 正定性：$\mathrm{d}(x,y)\geq 0,\forall x,y\in X$，且 $\mathrm{d}(x,y)=0 \iff x=y$

(2) 对称性：$\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(y,x),\forall x,y\in X$

(3) 三角不等式：$\mathrm{d}(x,y)\leq \mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y),\forall x,y,z\in X$

则称 d 是 X 上的一个度量或距离，(X,d) 称为度量空间

例 1.2 设 $X=\mathbb{R}^n, x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$，定义欧氏度量为

$$\mathrm{d}_2(x,y)=\left(\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

此时有度量空间 $(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}_2)$

对 $\forall 1\leq p<\infty$，我们还可以定义 l^p 度量

$$\mathrm{d}_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

此时有度量空间 $(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}_p)$

当 $p=\infty$ 时，定义 l^∞ 度量为

$$\mathrm{d}_\infty(x,y)=\max_{1\leq k\leq n}|x_k-y_k|$$

例 1.3（French Railroad Metric）设 $X=\mathbb{R}^2$，取定 $p\in\mathbb{R}^2$，称 p 为 Paris，定义度量

$$\mathrm{d}(x,y)=\begin{cases}\mathrm{d}_2(x,y), & \text{如果}x,y,p\text{共线}\\ \mathrm{d}_2(x,p)+\mathrm{d}_2(p,y), & \text{如果}x,y,p\text{不共线}\end{cases}$$

例 1.4（离散度量）设 $X\neq\varnothing$，定义离散度量

$$\mathrm{d}(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

例 1.5 任意给定度量空间 (X,d)，定义

$$\mathrm{d}_*(x,y)=\frac{\mathrm{d}(x,y)}{1+\mathrm{d}(x,y)},\quad \forall x,y\in X$$

则不难验证 d_* 是 X 上的一个度量，正定性与对称性显然，下面验证三角不等式

注意到函数 $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ 在 $t \geq 0$ 单调增，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_*(x,y) = \frac{\mathrm{d}(x,y)}{1+\mathrm{d}(x,y)} &\leq \frac{\mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y)}{1+\mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y)} \\ &\leq \frac{\mathrm{d}(x,z)}{1+\mathrm{d}(x,z)} + \frac{\mathrm{d}(z,y)}{1+\mathrm{d}(z,y)} = \mathrm{d}_*(x,z)+\mathrm{d}_*(z,y)\end{aligned}$$

习题 1.6 设 X 上有一列度量 $\{\mathrm{d}_n\}_{n=1}^\infty$，定义

$$\mathrm{d}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\mathrm{d}_n(x,y)}{1+\mathrm{d}_n(x,y)}$$

证明 d 是 X 上的度量

例 1.7 记 $C[0,1] = \{[0,1]\text{上的连续函数}\}$，对 $\forall 1 \leq p < \infty$，定义度量

$$\mathrm{d}_p(f,g) = \left(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

当 $p = \infty$ 时，定义度量

$$\mathrm{d}_\infty(f,g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|$$

定义 1.8（度量子空间）设有度量空间 $(X,\mathrm{d}), \varnothing \neq A \subset X$，定义 $\mathrm{d}_A \overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}|_{A\times A}$，则 d_A 是 A 上的度量，(A,d_A) 称为 (X,d) 的度量子空间

例 1.9（乘积度量）设有度量空间 $(X_1,\mathrm{d}_1),(X_2,\mathrm{d}_2)$，定义 $X_1\times X_2 = \{(x_1,x_2) : x_1 \in X_1, X_2 \in X_2\}$ 上的度量如下

$$\rho_1\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}_1(x_1,y_1)+\mathrm{d}_2(x_2,y_2)$$

或者还可以定义

$$\rho_\infty\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) \overset{\text{def}}{=} \max\{\mathrm{d}_1(x_1,y_1),\mathrm{d}_2(x_2,y_2)\}$$

定义 1.10（直径）设有度量空间 (X,d)，对 $A\subset X$，定义 A 的直径为

$$\mathrm{diam}(A) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x,y\in A} \mathrm{d}(x,y)$$

评价 A 有界 $\iff \exists B(x_0,R) \supset A$，其中

$$B(x_0,R) = \{x \in X : \mathrm{d}(x_0,x) < R\}$$

定义 1.11（收敛列）设有度量空间 (X,d)，称 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ 收敛，若 $\exists x_0 \in X$, s.t.

$$\mathrm{d}(x_0,x_n) \to 0 \text{ as } n\to\infty$$

此时称 x_0 为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限，记作 $x_n \xrightarrow{\mathrm{d}} x_0$

习题 1.12 证明

(1) 收敛列的极限唯一

(2) 收敛列有界

例 1.13 在 $\mathbb{R}^n$ 中，$x^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}_2} x^{(0)} \iff x^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}_p} x^{(0)}, \forall 1 \le p \le \infty$，这是因为

$$\mathrm{d}_\infty(x,y) \le \mathrm{d}_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(n \cdot \max_{1\le k\le n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}_\infty(x,y)$$

例 1.14 回到例1.7，根据一致收敛的定义，$f_n \xrightarrow{\mathrm{d}_\infty} f \iff f_n \rightrightarrows f$，但是 $f_n \xrightarrow{\mathrm{d}_p} f \not\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$，考虑

$$f_n(t) = \begin{cases} -n^3\left(t - \frac{1}{n^2}\right), & t \in \left[0, \frac{1}{n^2}\right) \\ 0, \quad t \in \left(\frac{1}{n^2}, 1\right] \end{cases}$$

则 $\mathrm{d}_1(f_n, 0) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n} \to 0$，但是 $\max\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t) - 0| = n \nrightarrow 0$

定义 1.15（开球、闭球、球面）设有度量空间 $(X, \mathrm{d}), x_0 \in X$，定义开球为

$$B(x_0, r) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : \mathrm{d}(x_0, x) < r\}$$

定义闭球为

$$\overline{B(x_0, r)} \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : \mathrm{d}(x_0, x) \le r\}$$

球面记为

$$S(x_0, r) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : \mathrm{d}(x, x_0) = r\}$$

定义 1.16（开集、闭集）设有度量空间 $(X, \mathrm{d}), A \subset X$，若 $\forall x \in A, \exists r_x > 0, \text{s.t. } B(x, r_x) \subset A$，则称 A 为开集，若 $X \backslash A$ 是开集，则称 A 是闭集

命题 1.17（度量拓扑）设有度量空间 (X, d)，令 $\tau = \{X\text{中开集}\}$，则

(1) $\varnothing, X \in \tau$

(2) τ 对任意并封闭，即 $O_\alpha \in \tau, \alpha \in \Lambda \Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha \in \tau$

(3) τ 对有限交封闭，即 $O_k \in \tau, k = 1, \cdots, n \Longrightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{n} O_k \in \tau$

定义 1.18（接触点、聚点、闭包）设有度量空间 $(X, \mathrm{d}), A \subset X, x_0 \in X$

(1) 如果 $\forall \varepsilon > 0, B(x_0, \varepsilon) \cap A \ne \varnothing$，则称 x_0 是 A 的接触点

(2) 如果 $\forall \varepsilon > 0, B(x_0, \varepsilon) \cap (A \backslash \{x_0\}) \ne \varnothing$，则称 x_0 是 A 的聚点（也称极限点）

(3) 定义 $\overline{A} = \{A\text{的接触点}\}$，称为 A 的闭包

评价 聚点的等价定义：$\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A\backslash\{x_0\},\text{s.t. }x_n\to x_0$

定义 1.19（稠密、可分）设有度量空间 $(X,\mathrm{d}),A\subset X$，若 $\overline{A}=X$，则称 A 在 X 中稠密，记为 $A\overset{\text{dense}}{\subset}X$；如果 X 有可数稠密子集，则称 X 是可分的

评价 $A\overset{\text{dense}}{\subset}X\iff\forall x\in X,\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A,\text{s.t. }x_n\to x$

习题 1.20 证明 $C[0,1]$ 可分，提示：由 Weierstrass 一致逼近定理知

$$\mathcal{P}(0,1)\overset{\text{def}}{=}\{[0,1]\text{上的多项式}\}\overset{\text{dense}}{\subset}C[0,1]$$

定义 1.21（连续映射）设有度量空间 $(X,\mathrm{d}),(Y,\rho)$，称映射 $T:X\to Y$ 在 $x_0\in X$ 连续，是指

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t. }\forall\mathrm{d}(x,x_0)<\delta,\rho(Tx,Tx_0)<\varepsilon$$

如果 T 在 X 上每点都连续，则 $T:X\to Y$ 连续

习题 1.22 证明：$T:X\to Y$ 连续 $\iff\forall u\overset{\text{开集}}{\subset}Y,T^{-1}(u)\overset{\text{开集}}{\subset}X$

定理 1.23（Heine）$T:X\to Y$ 在 $x_0\in X$ 连续 $\iff\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，若 $x_n\to x_0$，则 $Tx_n\to Tx_0$

定义 1.24（Cauchy 列、完备度量空间）设有度量空间 $(X,\mathrm{d}),\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，若 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\text{s.t. }\mathrm{d}(x_m,x_n)<\varepsilon,\forall m,n\geq N$，则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的基本列或 Cauchy 列，若 X 中任何 Cauchy 列都收敛，则称 (X,d) 是完备的

评价 Cauchy 列的等价刻画：$\lim\limits_{m,n\to\infty}\mathrm{d}(x_m,x_n)=0$

例 1.25 $(\mathbb{R},\mathrm{d}_2)$ 完备，但是 $(\mathbb{Q},\mathrm{d}_2)$ 不完备：考虑 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$，则 $|x_m-x_n|=\sum\limits_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2}\to 0,\text{as }m,n\to\infty$，但由数学分析的知识知，$x_n\to\frac{\pi^2}{6}\notin\mathbb{Q}$

习题 1.26 证明：离散度量空间完备

例 1.27 $(C[0,1],\mathrm{d}_\infty)$ 完备

证明 设 $\{f_n\}$ 是 $C[0,1]$ 中的任一基本列，则

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\text{s.t. }\max_{t\in[0,1]}|f_m(t)-f_n(t)|<\varepsilon,\forall m,n\geq N\tag{1.1}$$

因此 $\forall t\in[0,1],\{f_n(t)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的基本列，所以 $f(t)\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)$ 存在，下证 $f(t)\in C[0,1]$，在 (1.1) 式中，令 $m\to\infty$，则

$$\max_{t\in[0,1]}|f(t)-f_n(t)|\leq\varepsilon,\forall n\geq N$$

即 $f_n\rightrightarrows f$，由一致收敛知 $f\in C[0,1]$ □

例 1.28 $(C[0,1],\mathrm{d}_1),\mathrm{d}_1(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t$ 不完备：对 $n\geq 3$，定义

$$f_n(t)=\begin{cases}0, & t\in\left[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\\ n\left(t-\frac{1}{2}\right)+1, & t\in\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}\right)\\ 1, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

则 $\mathrm{d}_1(f_m,f_n)=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|\to 0$，因此 $\{f_n\}$ 是 $(C[0,1],\mathrm{d}_1)$ 中的基本列，下证 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不收敛，假设 $\exists f\in C[0,1],\text{s.t. }\mathrm{d}_1(f_n,f)\to 0$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_1(f_n,f)&=\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}|f(t)|\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}}|f_n(t)-f(t)|\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^{1}|1-f(t)|\mathrm{d}t\\&\to\int_0^{\frac{1}{2}}|f(t)|\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^{1}|1-f(t)|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由假设知上式为零，因此在几乎处处的意义下

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 1, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

这与 $f\in C[0,1]$ 矛盾！

例 1.29（L^p 空间）设 $\Omega\subset\mathbb{R}$ 可测，$1\leq p<\infty$

$$L^p(\Omega)\overset{\text{def}}{=}\left\{f:f\text{在}\Omega\text{上可测},\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty\right\},\quad ||f||_p\overset{\text{def}}{=}\left(\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

这里需要注意 $\mathrm{d}(f,g)=||f-g||_p=0\iff f=g$ a.e

定理 1.30（Riesz-Fischer） $L^p(\Omega)$ 完备，$\forall 1\leq p<\infty$

证明 设 $\{f_n\}\subset L^p(\Omega)$ 是任一基本列，则

$$\forall n\in\mathbb{N},\exists k_n\in\mathbb{N},k_{n-1}<k_n,\text{s.t. }\left(\int_\Omega|f_{k_n}-f_{k_{n-1}}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{1}{2^n}\quad\left(\iff||f_{k_n}-f_{k_{n-1}}||_p<\frac{1}{2^n}\right)$$

令 $u_j(x)\overset{\text{def}}{=}\sum\limits_{n=1}^{j-1}|f_{k_{n+1}}(x)-f_{k_n}(x)|+|f_{k_1}(x)|$（注意这个级数如果没有绝对值，则和为 f_{k_j}，因此如果 $\{u_j\}$ 收敛，那么 $\{f_{k_j}\}$ 绝对收敛，故收敛）由定义知 $u_j\nearrow$，且 $||u_j||_p\leq 1+||f_{k_1}||_p,\forall j$，由 *MCT* 知 $\exists u$ 可测，使得 $u_j\to u$，且 $||u||_p\leq 1+||f_{k_1}||_p$，因此 u 可积 $\Longrightarrow u$ a.e 有限，即级数收敛，所以 $\exists f$ 可测，使得 $f_{k_j}=\sum\limits_{n=1}^{j-1}(f_{k_{n+1}}-f_{k_n})+f_1\to f$ a.e

最后证明 $||f_n-f||_p\to 0$ as $n\to\infty$，由 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^p(\Omega)$ 是基本列知，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\text{s.t. }\int_\Omega|f_m(x)-f_{k_n}(x)|^p\mathrm{d}x\leq\varepsilon^p,\forall m,k_n\geq N$，令 $n\to\infty$，由 *Fatou* 引理知

$$||f_m-f||^p=\int_\Omega\lim_{n\to\infty}|f_m-f_{k_n}|^p\mathrm{d}x\leq\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega|f_m-f_{k_n}|^p\mathrm{d}x\leq\varepsilon^p$$

所以 $f_m - f \in L^p(\Omega) \Longrightarrow f = f_m - (f_m - f) \in L^p(\Omega)$ □

§1.2 压缩映射原理

定义 1.31（不动点）对映射 $T: X \to X$，如果 $\exists x^* \in X, \text{s.t.}\ Tx^* = x^*$，则称 x^* 是 T 的一个不动点

定义 1.32（压缩映射）设有度量空间 (X, d)，对映射 $T: X \to X$，如果 $\exists \alpha \in (0,1), \text{s.t.}$

$$\mathrm{d}(Tx, Ty) \leq \alpha \mathrm{d}(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

则称 T 是一个**压缩映射**

定理 1.33（压缩映射原理，Banach 不动点定理）完备度量空间到自身的压缩映射一定有不动点，且不动点唯一

证明 存在性：任取 $x_0 \in X$，定义迭代序列

$$x_{n+1} \overset{\text{def}}{=} Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

则

$$\mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) = \mathrm{d}(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \alpha \mathrm{d}(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq \alpha^n \mathrm{d}(x_1, x_0)$$

利用上面的估计

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{k=1}^{p} \mathrm{d}(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \leq \sum_{k=1}^{p} \alpha^{n+k-1} \mathrm{d}(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \mathrm{d}(x_1, x_0)\end{aligned}$$

即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的基本列，由 X 完备知，$\exists x^* \in X, \text{s.t.}\ \mathrm{d}(x_n, x^*) \to 0 \text{ as } n \to \infty$，接下来证明 x^* 是不动点，因为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(Tx^*, x^*) &\leq \mathrm{d}(Tx^*, Tx_n) + \mathrm{d}(Tx_n, x_n) + \mathrm{d}(x_n, x^*) \\ &\leq \alpha \mathrm{d}(x^*, x_n) + \mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) + \mathrm{d}(x_n, x^*) \to 0\end{aligned}$$

而 LHS 与 n 无关，这就说明 $\mathrm{d}(Tx^*, x^*) = 0$，即 $Tx^* = x^*$，即 x^* 为所求不动点

唯一性：假设除了 x^* 外还有一个不动点 y，即 $Ty = y$，则

$$\mathrm{d}(y, x^*) = \mathrm{d}(Ty, Tx^*) \leq \alpha \mathrm{d}(y, x^*) \Longrightarrow \mathrm{d}(y, x^*) = 0$$

即 $y = x^*$，不动点唯一 □

评价 完备性不可去，考虑 $\big((0,1), \mathrm{d}\big), \mathrm{d}(x, y) = |x - y|$，考虑映射

$$\begin{aligned}T: (0,1) &\longrightarrow (0,1) \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

没有不动点

习题 1.34 证明：

(1) 完备度量空间的闭子集一定是完备的

(2) 任何度量空间的完备子空间一定是闭子空间

§1.3 完备化

定义 1.35（等距同构）设有两个度量空间 $(X_1,\mathrm{d}_1),(X_2,\mathrm{d}_2)$

(1) 如果映射 $T:X_1\to X_2$ 满足

$$\mathrm{d}_2(Tx,Ty)=\mathrm{d}_1(x,y),\quad \forall x,y\in X_1$$

则称 T 是等距的 (isometry)

(2) 如果等距映射 $T:X_1\to X_2$ 还是双射，则称 (X_1,d_1) 与 (X_2,d_2) 等距同构，称 T 是一个从 X_1 到 X_2 的等距同构映射

(3) 如果 (X_1,d_1) 与 (X_2,d_2) 的某个子空间 (X_0,d_2) 等距同构，则称 (X_1,d_1) 可等距嵌入到 (X_2,d_2)，记为 $(X_1,\mathrm{d}_1)\hookrightarrow(X_2,\mathrm{d}_2)$，在此意义下，我们可以认为 (X_1,d_1) 是 (X_2,d_2) 的子空间

定义 1.36（完备化空间）设有度量空间 (X,d)，如果 $(\tilde{X},\tilde{\mathrm{d}})$ 完备，且 (X,d) 与 $(\tilde{X},\tilde{\mathrm{d}})$ 的某个稠密子空间 $(X_0,\tilde{\mathrm{d}})$ 等距同构，则称 $(\tilde{X},\tilde{\mathrm{d}})$ 是 (X,d) 的一个完备化空间

例 1.37 (1) $(\mathbb{R},\mathrm{d})$ 是 $(\mathbb{Q},\mathrm{d})$ 的完备化

(2) $C[0,1]$ 是 $\mathcal{P}[0,1]$ 的完备化

(3) $L^1[0,1]$ 是 $(C[0,1],\mathrm{d}_1)$ 的完备化

定理 1.38 任意度量空间都有其完备化，且在等距同构的意义下，完备化唯一

证明 Step 1. 令

$$\mathcal{F}\overset{\text{def}}{=}\{(X,\mathrm{d})\text{中的基本列}\}$$

记 $\xi=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{F},\eta=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{F}$，在 $\mathcal{F}$ 中引入等价关系

$$\xi\sim\eta \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty}\mathrm{d}(x_n,y_n)=0$$

定义 $\tilde{X}\overset{\text{def}}{=}\mathcal{F}/\sim$，以及 $\tilde{X}$ 上的度量

$$\tilde{\mathrm{d}}([\xi],[\eta])\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty}\mathrm{d}(x_n,y_n)$$

其中 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分别是等价类 $[\xi],[\eta]$ 的代表元

Claim1：$\tilde{\mathrm{d}}$ 是良定的，且是 $\tilde{X}$ 上的度量

Proof Of Claim : 1° 极限存在：$|\mathrm{d}(x_m,y_m)-\mathrm{d}(x_n,y_n)|\le\mathrm{d}(x_m,x_n)+\mathrm{d}(y_m,y_n)\to 0$ as $m,n\to\infty$（见下方备注），因此 $\{\mathrm{d}(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的基本列，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{d}(x_n,y_n)$ 存在

2° $\tilde{\mathrm{d}}([\xi],[\eta])$ 不依赖于 $[\xi],[\eta]$ 的代表元选取，即证明若 $\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{x_n'\}_{n=1}^\infty$ 分别是 $[\xi]$ 的两个代表元，$\{y_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n'\}_{n=1}^\infty$ 分别是 $[\eta]$ 的两个代表元，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{d}(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{d}(x_n',y_n')$（自行验证）

3° 验证 $\tilde{\mathrm{d}}$ 是 $\tilde{X}$ 上的度量，这是平凡的

Step 2. 构造稠密子空间：对 $x\in X$，记 $\xi_x\overset{\text{def}}{=}(x,x,\cdots)$（常驻点列，接下来的下标若在右下角则都表示常驻点列），设 $X_0\overset{\text{def}}{=}\{[\xi_x]:x\in X\}$，令

$$\begin{aligned}T:X&\longrightarrow X_0\\ x&\longmapsto[\xi_x]\end{aligned}$$

容易验证 T 是 (X,d) 到 $(X_0,\tilde{\mathrm{d}})$ 的等距同构映射

Claim2： $X_0\overset{\text{dense}}{\subset}\tilde{X}$，即 X_0 是 $\tilde{X}$ 的稠密子空间

Proof Of Claim : $\forall[\xi]\in\tilde{X}$，任取代表元 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\mathrm{d}}([\xi_{x_n}],[\xi])=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mathrm{d}(x_n,x_m)=0$$

即我们找到了 $[\xi_{x_n}]\to[\xi]$

Step 3. $(\tilde{X},\tilde{\mathrm{d}})$ 是完备度量空间

设 $\{[\xi^{(k)}]\}_{k=1}^\infty$ 是 $(\tilde{X},\tilde{\mathrm{d}})$ 的任一基本列，任取 $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ 为 $[\xi^{(k)}]$ 的一个代表元，则对 $\forall k\in\mathbb{N},\exists n_k\in\mathbb{N}$, s.t.

$$\tilde{\mathrm{d}}([\xi^{(k)}],[\xi_{x_{n_k}^{(k)}}])<\frac{1}{k}$$

因此

$$\tilde{\mathrm{d}}([\xi_{x_{n_k}^{(k)}}],[\xi_{x_{n_j}^{(j)}}])\le\tilde{\mathrm{d}}([\xi_{x_{n_k}^{(k)}}],[\xi^{(k)}])+\tilde{\mathrm{d}}([\xi^{(k)}],[\xi^{(j)}])+\tilde{\mathrm{d}}([\xi^{(j)}],[\xi_{x_{n_j}^{(j)}}])\to0,\quad\text{as }k,j\to\infty$$

即 $\{[\xi_{x_{n_k}^{(k)}}]\}_{k=1}^\infty$ 是 $(X_0,\tilde{\mathrm{d}})$ 中的基本列，由 T 是等距同构知，$\xi'\overset{\text{def}}{=}\{x_{n_k}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ 是 (X,d) 中的基本列，故 $\xi'\in\mathcal{F},[\xi']\in\tilde{X}$，且

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{\mathrm{d}}([\xi'],[\xi_{x_{n_k}^{(k)}}])=\lim_{k\to\infty}\lim_{j\to\infty}\mathrm{d}(x_{n_j^{(j)}},x_{n_k^{(k)}})=0$$

故

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{d}}([\xi^{(k)}],[\xi'])&\le\tilde{\mathrm{d}}([\xi^{(k)}],[\xi_{x_{n_k}^{(k)}}])+\tilde{\mathrm{d}}([\xi_{x_{n_k}^{(k)}}],[\xi'])\\&\to0\text{ as }k\to\infty\end{aligned}$$

即 $[\xi']$ 为基本列 $\{[\xi^{(k)}]\}_{k=1}^\infty$ 的极限

Step 4. 唯一性（等距同构意义下）

设 (X',d') 是 (X,d) 的另一完备化，因此 $\exists(x_0',d')\overset{\text{dense}}{\subset}(X',\mathrm{d}'),\exists T:X\to X_0'$ 是等距同构，下证 $X',\tilde{X}$ 等距同构

$$\begin{tikzcd}
 & (X_0,\tilde{\mathrm{d}}) \arrow[r, hook, "\text{dense}"] \arrow[d, "\varphi"] & (\tilde{X},\tilde{\mathrm{d}}) \arrow[d, dotted, "\Phi"] \\
(X,\mathrm{d}) \arrow[ur, "T"] \arrow[dr, "T'"'] & & \\
 & (X_0',\mathrm{d}') \arrow[r, hook, "\text{dense}"] & (X',\mathrm{d}')
\end{tikzcd}$$

定义 $\varphi = T' \circ T^{-1}$，则 φ 是由 X_0 到 X_0' 的等距同构

Claim4: φ 可延拓为 $\tilde{X}$ 到 X' 的等距同构 Φ

Proof Of Claim : $\forall[\xi] \in \tilde{X}, \exists[\xi^{(n)}] \in X_0, \text{s.t.}\ \tilde{\mathrm{d}}([\xi^{(n)}],[\xi]) \to 0$ as $n \to \infty$（这是因为 $X_0 \overset{\text{dense}}{\subset} \tilde{X}$），又因为 φ 是等距同构，所以 $\{\varphi([\xi^{(n)}])\}_{n=1}^{\infty}$ 是 (X', d') 中的基本列，由 X' 完备知，存在 $y \in X', \text{s.t.}\ \mathrm{d}'(\varphi([\xi^{(n)}]), y) \to 0$ as $n \to \infty$，定义映射

$$\begin{aligned} \Phi : \tilde{X} &\longrightarrow X' \\ [\xi] &\longmapsto y \end{aligned}$$

可以验证 Φ 是等距同构映射（留作习题） □

评价 上述证明过程中用到了

$$|\mathrm{d}(a,b) - \mathrm{d}(c,d)| \leq \mathrm{d}(a,c) + \mathrm{d}(b,d)$$

这是因为

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}(a,b) - \mathrm{d}(c,d)| &\leq |\mathrm{d}(a,b) - \mathrm{d}(a,d)| + |\mathrm{d}(a,d) - \mathrm{d}(c,d)| \\ &\leq \mathrm{d}(b,d) + \mathrm{d}(a,c) \end{aligned}$$

评价 $(X, \mathrm{d}) \overset{\text{等距同构}}{\longleftrightarrow} (X_0, \tilde{\mathrm{d}}) \overset{\text{dense}}{\subset} (\tilde{X}, \tilde{d})$

§1.4 紧性

回顾数分中的 Bolzano-Weierstrass 定理（列紧性定理）

定理 1.39 $\mathbb{R}^n$ 中的任意有界点列一定有收敛子列

以及 Heine-Borel 定理（有限覆盖定理，紧集）

定理 1.40 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的任意开覆盖都有有限子覆盖

我们将这些定理推广到度量空间中

定义 1.41（紧与列紧）设 (X, d) 是度量空间，$A \subset X$

(1) 如果一族开集 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}, \text{s.t.}\ A \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$，则称之为 A 的一个开覆盖

(2) 如果 A 的任意一个开覆盖均有有限子覆盖，即 $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I, \text{s.t.}\ A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$，则称 A 是紧的

(3) 如果 A 中任意点列都有收敛的子列，则称 A 是列紧的（不一定要求极限在 A 中）

(4) 如果 A 中任意点列都有在 A 中收敛的子列，则称 A 是自列紧的

(5) 如果 X 自身是列紧的，则称 (X, d) 是列紧空间

定理 1.42 在 $\mathbb{R}^n$ 中

$$\text{列紧} \overset{\text{B-W}}{\Longleftrightarrow} \text{有界}$$

$$\text{自列紧} \Longleftrightarrow \text{有界闭} \overset{\text{H-B}}{\Longleftrightarrow} \text{紧}$$

但是在一般度量空间中，就没有像 $\mathbb{R}^n$ 中那么好的性质，考虑下面的例子

例 1.43 考虑平方可和数列空间 $l^2=\left\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\middle|\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\right\}$，其中度量定义为

$$\mathrm{d}(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_n-y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

定义 $e_n=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1\text{个}},1,0,\cdots),n=1,2,\cdots$，则 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，但是它没有收敛子列，这是因为

$$\forall i\neq j,\mathrm{d}(e_i,e_j)=\sqrt{2}\nrightarrow 0$$

即**有界推不出列紧**

命题 1.44 (1) 列紧空间中的任意集合都列紧，任意闭集都自列紧
(2) 列紧空间一定完备

证明 (1) 显然，下证 (2)，设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是列紧空间 (X,d) 中的基本列，则它有收敛子列 $x_{n_k}\to x_0$，所以

$$\mathrm{d}(x_n,x_0)\leq\mathrm{d}(x_n,x_{n_k})+\mathrm{d}(x_{n_k},x_0)\to 0,\quad \text{as } k\to\infty$$

□

定义 1.45（ε-网、完全有界）设有度量空间 $(X,\mathrm{d}),A\subset X$，给定 $\varepsilon>0$
(1) 称 $N_\varepsilon\subset A$ 是 A 的一个 ε-网是指

$$A\subset\bigcup_{y\in N_\varepsilon}B(y,\varepsilon)$$

$(\iff\forall x\in A,\exists y\in N_\varepsilon,\text{s.t. }\mathrm{d}(x,y)<\varepsilon)$
(2) 如果 $\forall\varepsilon>0,A$ 都有一个有穷的 ε-网 N_ε（即 $\#N_\varepsilon<\infty$），则称 A 完全有界

评价 完全有界 $\Longrightarrow$ 有界，反之未必，还是考虑例1.43中的 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，它有界，但是取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，由于 $\mathrm{d}(e_i,e_j)=\sqrt{2},\forall i\neq j$，则对 $\forall k\in\mathbb{N},B(e_k,\frac{1}{2})\cap\{e_n\}_{n=1}^{\infty}=\{e_k\}$，因此它没有有穷的 $\frac{1}{2}$-网

定理 1.46（Hausdorff）
(1) 在度量空间中，列紧 $\Longrightarrow$ 完全有界
(2) 在完备度量空间中，列紧 $\iff$ 完全有界

证明 (1) 假设 A 列紧但不完全有界，则 $\exists\varepsilon_0>0,\text{s.t.}$ 任意有限个以 A 中的点为中心，ε_0 为半径的球都不能覆盖 A，任取 $x_1\in A$，则

$\exists x_2\in A\backslash B(x_1,\varepsilon_0)$

$\exists x_3\in A\backslash\bigcup\limits_{k=1}^{2}B(x_k,\varepsilon_0)$

$\cdots\cdots\cdots$

这样我们就得到了点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A, \text{s.t. } x_n \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} B(x_k,\varepsilon_0), \forall n \in \mathbb{N}$，故

$$\mathrm{d}(x_m,x_n) \geq \varepsilon_0, \forall m \neq n$$

故 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 没有收敛子列，与 A 列紧矛盾！

(2) 只需证明完全有界 $\Longrightarrow$ 列紧，设 (X,d) 完备，A 完全有界，下面证明 A 列紧，对 $\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$

• 对 $\varepsilon = 1$，A 有有穷的不同的 $N_1 = \{y_1^{(1)},\cdots,y_{n_1}^{(1)}\}$，使得 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n_1} B(y_k^{(1)},1) \Longrightarrow$ 一定存在某个 $y_k^{(1)} \in N_1$（不妨记为 y_1），使得 $B(y_1,1)$ 包含 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 中的无穷多项，故存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的子列 $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty \subset B(y_1,1)$

• 对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，同上操作，存在 $y_2 \in N_{\frac{1}{2}}, \text{s.t. } \exists \{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$ 的子列 $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^\infty \subset B(y_2,\frac{1}{2})$

不断重复上述步骤，我们得到

$$\begin{array}{cccccc}
x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \cdots & \in B(y_1,1) \\
x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & \cdots & \in B(y_2,\frac{1}{2}) \\
x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & \cdots & \in B(y_3,\frac{1}{3}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}$$

取对角线子列 $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty$，使得 $x_n^{(n)} \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} B(y_k,\frac{1}{k})$，所以对 $\forall n,p \in \mathbb{N}$，$x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)} \in B(y_n,\frac{1}{n})$，故

$$\mathrm{d}(x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)}) \leq \frac{2}{n}, \quad \forall n,p \in \mathbb{N}$$

所以 $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ 是 (X,d) 中的基本列，再由 X 完备知 $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ 收敛 □

定理 1.47 在度量空间中，紧 $\Longleftrightarrow$ 自列紧

证明 ($\Longrightarrow$)：

Step1. 证明紧 $\Longrightarrow$ 闭

设 A 是紧集，我们断言 $X \backslash A$ 是开集：对 $\forall x \in X\backslash A$，$\{B(y,\frac{1}{3}\mathrm{d}(y,x))\}_{y\in A}$ 是 A 的开覆盖，由 A 是紧集知，$\exists y_1,\cdots,y_N \in A, \text{s.t. } A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} B(y_k,\frac{1}{3}\mathrm{d}(y_k,x))$，令

$$\delta \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{3}\min_{1\leq k\leq N} \mathrm{d}(y_k,x)$$

则 $B(x,\delta) \subset X\backslash A$（因为 $B(x,\delta)\cap B(y_k,\frac{1}{3}\mathrm{d}(x,y_k)) = \varnothing, \forall 1 \leq k \leq N$），故 $X\backslash A$ 是开集

Step2. 证明紧 $\Longrightarrow$ 列紧

假设 A 紧但不列紧，则 $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ 无收敛子列，不妨设 $x_n, n = 1,2,\cdots$ 互不相同，令

$$S_k \overset{\text{def}}{=} \{x_n\}_{n=1}^\infty \backslash \{x_k\}, k = 1,2,\cdots$$

则 S_k 是闭集（S_k 无聚点 $\Longrightarrow S_k=\overline{S_k}$），故 $X\backslash S_k$ 是开集，且

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(X\backslash S_k)=X\Bigg\backslash\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}S_k\right)=X\backslash\varnothing=X\supset A$$

即 $\{X\backslash S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A 的开覆盖，由 A 是紧集知，$\exists N\in\mathbb{N},\mathrm{s.t.}$

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{N}(X\backslash S_k)=X\Bigg\backslash\left(\bigcap_{k=1}^{N}S_k\right)=X\backslash\{x_n\}_{n=N+1}^{\infty}$$

另一方面由假设有 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$，故 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A\subset X\backslash\{x_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ 矛盾！

因此列紧 + 闭 $\Longrightarrow$ 自列紧

$(\Longleftarrow)$：设 A 是自列紧的，下面证明 A 是紧集，假设 A 不紧，则 $\exists\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 A 的开覆盖，使得任意有限个 G_α 都不能覆盖 A，又因为 A 是列紧的，所以 A 完全有界，则对 $\forall n\in\mathbb{N}$，存在有穷的 $\frac{1}{n}$ 网 $N_{\frac{1}{n}}=\{y_1^{(n)},\cdots,y_{m_n}^{(n)}\},\mathrm{s.t.}$

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{m_n}B(y_k^{(n)},\frac{1}{n})$$

由不紧的假设知，对 $\forall n,\exists y_n\in N_{\frac{1}{n}},\mathrm{s.t.}\ B(y_n,\frac{1}{n})$ 不能被有限多个 G_α 覆盖（否则每个 $y_n\in N_{\frac{1}{n}},B(y_n,\frac{1}{n})$ 都能被有限多个 G_α 覆盖，故 A 可以被有限多个 G_α 覆盖，与不紧的假设矛盾！），又由 A 自列紧知，$\{y_n\}$ 有收敛子列 $\{y_{n_k}\}$ 收敛到 $y_0\in A$，设 $y_0\in G_{\alpha_0}$，由 G_{α_0} 是开集，则 $\exists\delta>0,\mathrm{s.t.}\ y_0\in B(y_0,\delta)\subset G_{\alpha_0}$，由 $y_{n_k}\to y_0$ 知，当 k 充分大时，$\mathrm{d}(y_{n_k},y_0)<\frac{\delta}{2}$，特别地当 $n_k>\frac{2}{\delta}$ 时，对 $\forall x\in B(y_{n_k},\frac{1}{n_k})$ 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(x,y_0)&\le\mathrm{d}(x,y_{n_k})+\mathrm{d}(y_{n_k},y_0)\\&\le\frac{1}{n_k}+\frac{\delta}{2}<\delta\end{aligned}$$

即 $B(y_{n_k},\frac{1}{n_k})\subset B(y_0,\delta)\subset G_{\alpha_0}$，这与 $B(y_{n_k},\frac{1}{n_k})$ 不能被有限多个 G_α 覆盖矛盾！ □

总结如下

$$\begin{tikzcd}
\text{有界闭} \arrow[r, bend right, "X=\mathbb{R}^n"'] & \text{紧} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{自列紧} \arrow[r, Rightarrow] & \text{列紧} \arrow[l, bend left, "\text{闭}"] \arrow[r, Rightarrow] & \text{完全有界} \arrow[l, bend left, "X\text{完备}"] \arrow[r, Rightarrow] & \text{有界} \arrow[l, bend left, "X=\mathbb{R}^n"] \arrow[ll, bend right, "X=\mathbb{R}^n"']
\end{tikzcd}$$

定理 1.48 列紧空间一定可分

证明 对 $\forall n\in\mathbb{N}$，取列紧空间 X 的一个有穷 $\frac{1}{n}$-网 $N_{\frac{1}{n}}$，不难验证 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}N_{\frac{1}{n}}\overset{\text{dense}}{\subset}X$ □

习题 1.49 设 (M,ρ) 是一个列紧空间，考虑

$$C(M)\overset{\text{def}}{=}M\text{ 上的连续函数全体}$$

定义 $C(M)$ 上的度量

$$\mathrm{d}(f,g)\overset{\text{def}}{=}\max_{x\in M}|f(x)-g(x)|$$

则 d 是 $C(M)$ 上的度量，$(C(M),\mathrm{d})$ 是度量空间且完备

定义 1.50（等度连续）称一族函数 $\mathcal{F}\subset C(M)$ 是等度连续的，若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t.}$

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon,\quad \forall f\in\mathcal{F},\forall x,x'\in M \text{ with } \rho(x,x')<\delta$$

定理 1.51（Arzela-Ascoli）设 (M,ρ) 是一个列紧空间，则

$$\mathcal{F}\subset C(M)\text{列紧}\iff \mathcal{F}\text{作为函数族}\begin{cases}\text{一致有界}\\ \text{等度连续}\end{cases}$$

证明 $(\Longrightarrow)$: 由于 $C(M)$ 是完备空间，所以 $\mathcal{F}$ 列紧 $\iff$ $\mathcal{F}$ 完全有界 $\Longrightarrow \mathcal{F}$ 有界，记 0 为零函数，则

$$\exists R>0,\text{s.t. } \mathrm{d}(f,0)<R,\quad \forall f\in\mathcal{F}$$

即 $\max\limits_{x\in M}|f(x)|<R$，故 $\mathcal{F}$ 一致有界，下证 $\mathcal{F}$ 等度连续

对 $\forall\varepsilon>0$，由 $\mathcal{F}$ 完全有界知，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\frac{\varepsilon}{3}$-网 $N_{\frac{\varepsilon}{3}}=\{f_1,\cdots,f_m\},\text{s.t.}$

$$\mathcal{F}\subset\bigcup_{k=1}^{m}B(f_k,\frac{\varepsilon}{3})$$

由 f_k 的连续性知，$\exists\delta_k>0,\text{s.t. } |f_k(x')-f_k(x'')|<\frac{\varepsilon}{3},\forall x,x'\in M \text{ with } \rho(x',x'')<\delta_k$，令 $\delta=\min\limits_{1\le k\le n}\delta_k$，则

$$|f_k(x')-f_k(x'')|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall x',x''\in M \text{ with } \rho(x',x'')<\delta,\forall k\in\{1,2,\cdots,m\}$$

对 $\forall f\in\mathcal{F},\exists k\in\{1,2,\cdots,m\},\text{s.t. } \mathrm{d}(f,f_k)<\frac{\varepsilon}{3}$，所以

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&\le|f(x')-f_k(x')|+|f_k(x')-f_k(x'')|+|f_k(x'')-f(x'')|\\&<2\mathrm{d}(f,f_k)+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon\end{aligned}$$

对 $\forall x',x''\in M \text{ with } \rho(x',x'')<\delta,\forall f\in\mathcal{F}$ 均成立，即 $\mathcal{F}$ 等度连续

$(\Longleftarrow)$: 设 $\mathcal{F}$ 等度连续且一致有界，由 f 等度连续知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t. } |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{4},\forall x',x''\in M \text{ with } \rho(x',x'')<\delta,\forall f\in\mathcal{F}$；由 M 列紧知，存在 M 的有穷 δ-网 $N_\delta=\{x_1,\cdots,x_N\}$，定义映射

$$\begin{aligned}T:\mathcal{F}&\longrightarrow\mathbb{R}^N\\ f&\longmapsto(f(x_1),\cdots,f(x_N))\end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ 一致有界 $\Longrightarrow R\overset{\text{def}}{=}\sup\limits_{f\in\mathcal{F}}\max\limits_{x\in M}|f(x)|<\infty$，因此

$$\left(\sum_{i=1}^{N}|f(x_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{N}R$$

因此 $T(\mathcal{F})$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界集，故它列紧

Claim: 设 $\tilde{N}_{\frac{\varepsilon}{4}}=\{Tf_1,\cdots,Tf_m\}$ 是 $T(\mathcal{F})$ 的 $\frac{\varepsilon}{4}$-网，则 $\{f_1,\cdots,f_m\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的 ε-网

Proof Of Claim：对 $\forall f\in\mathcal{F},\exists k\in\{1,\cdots,m\},\text{s.t. } \mathrm{d}_{\mathbb{R}^N}(Tf,Tf_k)<\frac{\varepsilon}{4}$，对 $\forall x\in M,\exists x_j\in N_\delta,\text{s.t.}$ $\rho(x,x_j)<\delta$，所以

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f_k(x)|&\le|f(x)-f(x_j)|+|f(x_j)-f_k(x_j)|+|f_k(x_j)-f_k(x)|\\
&<\frac{\varepsilon}{4}+\mathrm{d}_{\mathbb{R}^N}(Tf,Tf_k)+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{3}{4}\varepsilon
\end{aligned}
$$

取上确界即得 $\mathrm{d}(f,f_k)\le\frac{3\varepsilon}{4}<\varepsilon$ □

定理 1.52（Riesz-Frecher-Kolmogorov）设 $1\le p<\infty,\mathcal{F}\subset L^p(\mathbb{R}^n)$ 列紧当且仅当

(1) $\mathcal{F}$ 有界，即 $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}}||f||_p<\infty$

(2) $\mathcal{F}$ 等度 L^p 预紧 (Precompact)：$\forall\varepsilon>0,\exists R>0,\text{s.t. } \int_{|x|>R}|f(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon^p,\forall f\in\mathcal{F}$

(3) 等度 L^p 范数连续：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t. } ||\tau_hf-f||_p<\varepsilon,\forall|h|<\delta,\forall f\in\mathcal{F}$

评价 其中 $(\tau_hf)(x)=f(x-h)$，该定理仅介绍，具体证明可以参考 H.Brezis 《F.A,Sobolev spaces and PDE》Thm4.26,Cor4.27

定理 1.53 对 $1\le p<\infty$，记 $l^p\overset{\text{def}}{=}\left\{\{x_k\}_{k=1}^\infty\middle|\sum\limits_{k=1}^\infty|x_k|^p<\infty\right\}$，其上的度量定义为

$$
\mathrm{d}_p(x,y)\overset{\text{def}}{=}\left(\sum_{k=1}^\infty|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}
$$

则

$$
A\subset l^p\text{列紧}\iff\begin{cases}(1)\ A\text{有界}\\(2)\ \forall\varepsilon>0,\exists N,\text{s.t. } \sum\limits_{k=N+1}^\infty|x_k|^p<\varepsilon^p,\forall x=\{x_k\}_{k=1}^\infty\in A\end{cases}
$$

证明 $(\Longrightarrow)$：首先列紧 $\Longrightarrow$ 完全有界 $\Longrightarrow$ 有界，其次由 $A\subset l^p$ 完全有界知，存在有穷 $\frac{\varepsilon}{2}$-网

$$
N_{\frac{\varepsilon}{2}}=\{a^{(1)},\cdots,a^{(m)}\}
$$

对于每个 $a^{(i)}$，由 $\sum\limits_{k=1}^\infty|a_k^{(i)}|^p<\infty$ 知，存在 $N_i,\text{s.t.}$ $\sum\limits_{k=N_i+1}^\infty|a_k^{(i)}|^p<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$，记 $N=\max\{N_1,\cdots,N_m\}$，于是 $\sum\limits_{k=N+1}^\infty|a_k^{(i)}|^p<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,\forall 1\le i\le m$，所以对 $\forall x\in A,\exists a^{(i)},\text{s.t. } \mathrm{d}(x,a^{(i)})<\frac{\varepsilon}{2}$，故

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=N+1}^\infty|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}&\le\left(\sum_{k=N+1}^\infty|x_k-a_k^{(i)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=N+1}^\infty|a_k^{(i)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le\mathrm{d}(x,a^{(i)})+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon
\end{aligned}
$$

$(\Longleftarrow)$：对 $\forall\eta>0$，取 $\varepsilon=\frac{\eta}{(2^{p+1}+1)^{\frac{1}{p}}}$，则 $\exists N,\text{s.t.}\ \sum\limits_{k=N+1}^{\infty}|x_k|^p<\varepsilon^p$，定义

$$\begin{aligned}T_N: A&\longrightarrow\mathbb{R}^N\\(x_1,x_2,\cdots)&\longmapsto(x_1,\cdots,x_N)\end{aligned}$$

因为 A 有界，所以 $\exists M>0,\text{s.t.}\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\le M^p,\forall x\in A$，因此 $|x_k|<M,\forall k,\forall x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\in A$，因此

$$\left(\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{N}M,\forall x\in A$$

因此 $T_N(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集，故列紧，则 $\exists T_N(A)$ 中的有穷 $\frac{\varepsilon}{N}$-网

$$\{T_Nx^{(1)},T_Nx^{(2)},\cdots,T_Nx^{(m)}\}$$

***Claim*:** $\{x^{(1)},\cdots,x^{(m)}\}$ 是 A 的 η-网

Proof Of Claim : $\forall x\in A,\exists j\in\{1,2,\cdots,m\},\text{s.t. d}(T_Nx,T_Nx^{(j)})<\frac{\varepsilon}{N}$，而 $LHS=\left(\sum\limits_{k=1}^{N}|x_k-x_k^{(j)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，所以 $|x_k-x_k^{(j)}|<\frac{\varepsilon}{N},\forall k\in\{1,2,\cdots,m\}$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_p(x,x^{(j)})^p&=||x-x^{(j)}||_p^p\\&=\sum_{k=1}^{N}|x_k-x_k^{(j)}|^p+\sum_{k=N+1}^{\infty}|x_k-x_k^{(j)}|^p\\&\le N\cdot\left(\frac{\varepsilon}{N}\right)^p+\sum_{k=N+1}^{\infty}2^p(|x_k|^p+|x_k^{(j)}|^p)\\&<\frac{\varepsilon^p}{N^{p-1}}+2^p\cdot2\varepsilon^p<(2^{p+1}+1)\varepsilon^p=\eta^p\end{aligned}$$

即 $x\in B(x^{(j)},\eta)$ □

评价

$$\begin{aligned}|x-y|^p&\le(|x|+|y|)^p\le\big(2\max\{|x|,|y|\}\big)^p\\&=2^p\big(\max\{|x|,|y|\}\big)^p\le2^p(|x|^p+|y|^p)\end{aligned}$$

习题 1.54 证明：Hilbert Cube

$$Q\overset{\text{def}}{=}\{x\in l^2:|x_k|\le2^{-k},\forall k\}$$

是 l^2 中的列紧集

§ 1.5 赋范线性空间

定义 1.55（向量空间）设 X 是非空集合，$\mathbb{K}$ 是数域（本课程中 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$），定义 X 上的两个运算加法和数乘

$$\begin{aligned}+:X\times X&\longrightarrow X & \cdot:\mathbb{K}\times X&\longrightarrow X\\(x,y)&\longmapsto x+y & (\alpha,x)&\longmapsto\alpha x\end{aligned}$$

若它们满足如下八条公理

(1) 结合律：$(x+y)+z=x+(y+z),\forall x,y,z\in X$

(2) 交换律：$x+y=y+x,\forall x,y\in X$

(3) 零元存在：$\exists\theta\in X,\text{s.t. }\theta+x=x,\forall x\in X$

(4) 负元存在：$\forall x\in X,\exists y\in X,\text{s.t. }x+y=0$

(5) 幺元存在：$\exists 1\in\mathbb{K},\text{s.t. }1\cdot x=x,\forall x\in X$

(6) 结合律：$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x),\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},x\in X$

(7) 左分配律：$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},x\in X$

(8) 右分配律：$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,\forall\alpha\in\mathbb{K},x,y\in X$

则称 $(X,+,\cdot)$ 为 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，X 中的元素称为向量

定义 1.56 设 $A\subset X$，记

$$\operatorname{Span}(A)\overset{\text{def}}{=}\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i : x_i\in A,\lambda_i\in\mathbb{K},n\in\mathbb{N}\right\}$$

为 A 张成的向量空间，如果 A 线性无关且 $\operatorname{Span}(A)=X$，则称 A 是 X 的一个 Hamel 基（或代数基，线性基）

定理 1.57 任一向量空间都有 Hamel 基

定义 1.58（向量空间的维数）如果向量空间 X 的 Hamel 基 A 是有限集，则定义 $\dim X=\#A$，否则记 $\dim X=\infty$

定义 1.59（范数、赋范空间、Banach 空间）设 X 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，如果函数 $||\cdot||:X\to\mathbb{R}$ 满足

(1) 正定性：$||x||\geq 0,\forall x\in X$，且 $||x||=0\iff x=0$

(2) 齐次性：$||\alpha x||=|\alpha|\cdot||x||,\forall x\in X,\alpha\in\mathbb{R}$

(3) 三角不等式：$||x+y||\leq||x||+||y||,\forall x,y\in X$

则称 $||\cdot||$ 是 X 上的一个范数，称 $(X,||\cdot||)$ 为一个赋范空间，考虑 $\mathrm{d}(x,y)=||x-y||$，容易验证它是一个度量，称为由 $||\cdot||$ 诱导的度量，如果 (X,d) 完备，则称 $(X,||\cdot||)$ 是 Banach 空间

以下是几个常见的 Banach 空间的例子

函数空间	数列空间
$L^p(1\leq p<\infty)$ $\|\|f\|\|_p=\left(\int \|f\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$	$l^p(1\leq p<\infty)$ $\|\|x\|\|_p=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
$L^\infty=$ 本性有界可测函数空间 $\|\|f\|\|_\infty=\operatorname*{esssup}\limits_{x\in\Omega}\|f(x)\|=\inf\{M>0:\mu(\{\|f\|\geq M\})=0\}$	$l^\infty=$ 有界数列全体 $\|\|x\|\|_\infty=\sup\limits_k\|x_k\|$
$C(M)$ $\|\|f\|\|=\max\limits_{x\in M}\|f(x)\|$	$c=$ 收敛数列全体($c_0=$ 收敛到 0 的数列全体) $\|\|x\|\|=\sup\limits_k\|x_k\|$

评价 我们有子空间包含关系 $c_0\longrightarrow c\longrightarrow l^\infty$

例 1.60 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界域，定义

$$C^k(\overline{\Omega})\overset{\text{def}}{=}\overline{\Omega}\text{上 } k \text{ 次连续可微的函数全体}$$

定义 $C^k(\overline{\Omega})$ 上的范数

$$||u||\overset{\text{def}}{=}\max_{|\alpha|\leq k}\max_{x\in\overline{\Omega}}|\partial^\alpha u(x)|$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n,|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$，且 $\partial^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ 则 $(C^k(\overline{\Omega}),||\cdot||)$ 是 Banach 空间

例 1.61 定义 $C^k(\Omega)$ 上的范数

$$||u||_{k,p}=\left(\sum_{|\alpha|\leq k}\int_\Omega|\partial^\alpha u|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leq p<\infty$$

记 $S\overset{\text{def}}{=}\{u\in C^k(\Omega):||u||_{k,p}<\infty\}$，定义 $H^{k,p}(\Omega)\overset{\text{def}}{=}S$ 的完备化，称为 Sobolev 空间

定义 1.62（范数的比较）设 X 是向量空间，$||\cdot||_1,||\cdot||_2$ 是 X 上的范数

(1) 如果 $\forall\{x_k\}_{k=1}^\infty\subset X,||x_k||_2\to 0$ 可以推出 $||x_k||_1\to 0$，则称 $||\cdot||_2$ 比 $||\cdot||_1$ 强，记为 $||\cdot||_1\lesssim||\cdot||_2$

(2) 如果 $||\cdot||_1\lesssim||\cdot||_2$ 且 $||\cdot||_2\lesssim||\cdot||_1$，则称 $||\cdot||_1,||\cdot||_2$ 是等价范数，记为 $||\cdot||_1\approx||\cdot||_2$

命题 1.63 $||\cdot||_1\lesssim||\cdot||_2\iff\exists C>0,\text{s.t. }||x||_1\leq C||x||_2,\forall x\in X$

证明 $(\Longleftarrow)$：平凡

$(\Longrightarrow)$：假设不存在这样的 C，则对 $\forall n\in\mathbb{N},\exists x_n\in X,\text{s.t. }||x_n||_1>n||x_n||_2$，令 $y_n\overset{\text{def}}{=}\frac{x_n}{||x_n||_1}$，则

$$||y_n||_2=\frac{||x_n||_2}{||x_n||_1}\leq\frac{1}{n}\to 0\text{ as }n\to\infty$$

由 $||\cdot||_1\lesssim||\cdot||_2$ 知，$||y_n||_1\to 0$，这与 $||y_n||_1=1,\forall n$，矛盾！ □

推论 1.64 $||\cdot||_1 \approx ||\cdot||_2 \iff \exists C_1, C_2 > 0, \text{s.t. } C_1||x||_2 \le ||x||_1 \le C_2||x||_2$

例 1.65 在 $\mathbb{R}^n$ 上 $||\cdot||_p(\forall 1 \le p \le \infty)$ 均等价

证明

$$||x||_\infty \le ||x||_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le n^{\frac{1}{p}}||x||_\infty$$

□

定理 1.66 有限维空间上的所有范数都彼此等价

证明 设 $\dim X = n$，设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 X 的一个基，则 $\forall x \in X$ 有唯一的表示

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, \xi_k \in \mathbb{K}, k = 1, 2, \cdots, n$$

定义

$$T : X \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \longmapsto (\xi_1, \cdots, \xi_n)$$

则 T 是线性空间的同构，令 $|\xi| = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \forall \xi \in \mathbb{K}^n$，定义 $||x||_T \overset{\text{def}}{=} |Tx|$，则 $||\cdot||_T$ 是 X 上的一个范数。***Claim:*** X 上的任一范数 $||\cdot||$ 都与 $||\cdot||_T$ 等价

定义

$$\rho : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\xi \longmapsto \left|\left|\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right|\right|$$

则 ρ 有以下性质

(1) 齐次性：$\rho(\xi) = |\xi|\rho(\frac{\xi}{|\xi|}), \forall \xi \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$

(2) 连续性：$\rho \in C(\mathbb{K}^n)$，这是因为

$$\begin{aligned}
|\rho(\xi) - \rho(\eta)| &= \left|\left|\left|\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right|\right| - \left|\left|\sum_{k=1}^n \eta_k e_k\right|\right|\right| \\
&\le \left|\left|\sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)e_k\right|\right| \le \sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k| \cdot ||e_k|| \\
&\le \left(\sum_{k=1}^n ||e_k||^2\right)^{\frac{1}{2}} |\xi - \eta| \quad (\text{Cauchy不等式})
\end{aligned}$$

令 $S_1 \overset{\text{def}}{=} \{\xi \in \mathbb{K}^n : |\xi| = 1\}$，即 $\mathbb{K}^n$ 中的单位球面，它是紧集，故 $\exists C_1, C_2 \ge 0, \text{s.t.}$

$$C_1 = \min_{\xi \in S_1} \rho(\xi), \quad C_2 = \max_{\xi \in S_1} \rho(\xi_2)$$

因此

$$C_1 \leq \rho\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \leq C_2, \forall \xi \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$$

再由齐次性知

$$C_1|\xi| \leq \rho(\xi) \leq C_2|\xi|, \forall \xi \in \mathbb{K}^n$$

进而 $C_1|Tx| \leq \rho(Tx) \leq C_2|Tx|, \forall x \in X$，而 $\rho(Tx) = ||x||$，故

$$C_1||x||_T \leq ||x|| \leq C_2||x||_T, \forall x \in X$$

最后我们需要说明 C_1 是严格正的，假设 $C_1 = 0$，则 $\exists \xi' \in S_1, \text{s.t.}\ 0 = \rho(\xi') = \left|\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k' e_k\right|\right|$，因此 $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k' e_k = 0$，由线性无关知 $\xi_k' = 0, \forall 1 \leq k \leq n$，故 $\xi' = 0$ 与它在单位球上矛盾！ □

定义 1.67 设 $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ 是赋范空间，如果 $\exists T : X \to Y$ 是线性、双射（代数同构），且 T, T^{-1} 均连续，则称 X 与 Y 同构

推论 1.68 同维数的有限维赋范空间彼此同构

证明 假设维数为 n，只需证明它们均与 $\mathbb{K}^n$ 同构即可，定义

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k &\longmapsto (\xi_1, \cdots, \xi_n) \end{aligned}$$

由上证明知 $\exists C_1, C_2 > 0, \text{s.t.}\ C_1|Tx| \leq ||x|| \leq C_2|Tx|, \forall x \in X$，前一个不等式保证 T 连续，后一个不等式保证 T^{-1} 连续 □

推论 1.69 有限维赋范空间一定是 Banach 空间

证明 还是考虑 $C_1|Tx| \leq ||x|| \leq C_2|Tx|, \forall x \in X$，设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的任一基本列，则 $|Tx_i - Tx_j| \leq \frac{1}{C_1}||x_i - x_j|| \to 0, \text{as } i, j \to \infty$，因此 $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 中的基本列，由 $\mathbb{K}^n$ 完备知 $\exists \xi \in \mathbb{K}^n, \text{s.t.}\ Tx_k \to \xi$，所以

$$||x_k - T^{-1}\xi|| \leq C_2|Tx_k - \xi| \to 0$$

□

推论 1.70 任一赋范空间的有限维子空间一定是闭子空间

定理 1.71 设有赋范空间 $(X, ||\cdot||)$，X 的单位球面列紧 $\iff \dim X < \infty$

证明 先证明 $(\Longleftarrow)$: 设 $\dim X = n$，考虑代数同构

$$X \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \longmapsto \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$$

使得 $\exists C_1, C_2 > 0, C_1|Tx| \leq ||x|| \leq C_2|Tx|, \forall x \in X$，因此 $|Tx| \leq \frac{1}{C_1}, \forall x \in S_1$（单位球面），故 $T(S_1)$ 是 $\mathbb{K}^n$ 中的有界集，故列紧，则 $\forall \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S_1, \exists \{Tx_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}, \text{s.t.}\ Tx_{k_j} \to \xi \in \mathbb{K}^n$，因此 $x_{k_j} \to T^{-1}\xi \in X$

推论 1.72 无穷维赋范空间中的单位球面一定不列紧

引理 1.73（Riesz）设有赋范空间 $(X, ||\cdot||), Y$ 是 X 的真闭子空间，则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists e \in X$ with $||e|| = 1, \text{s.t.}$

$$\text{dist}\,(e, Y) \geq 1 - \varepsilon$$

证明 由 $Y \neq X$ 知，$\exists x \in X \backslash Y$，令

$$d = \text{dist}\,(x, Y) = \inf_{y \in Y} ||x - y||$$

则 $d > 0$（如果 $d = 0$，则 $\exists \{y_n\} \subset Y, \text{s.t.}\ ||x - y_n|| \to d$ 如果 $d = 0$，则 $y_n \to x$，由 Y 闭集知 $x \in Y$，矛盾！），由下确界的定义，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists y_0 \in Y, \text{s.t.}\ d \leq ||x - y_0|| < \frac{d}{1-\varepsilon}$，令 $e = \frac{x - y_0}{||x - y_0||}$，则 $e \notin Y$ 且 $||e|| = 1$，此时对 $\forall z \in Y$

$$\begin{aligned} ||e - z|| &= \left|\left| \frac{x - y_0}{||x - y_0||} - z \right|\right| \\ &= \frac{1}{||x - y_0||} \big|\big| x - (y_0 + ||x - y_0|| z) \big|\big| \\ &> \frac{1 - \varepsilon}{d} \cdot d = 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

其中 $y_0 + ||x - y_0|| z \in Y$ □

接下来我们可以证明定理1.71的 $(\Longrightarrow)$

证明 $(\Longrightarrow)$ 假设 $\dim X = \infty$，则 $\exists \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 线性无关（可取 Hamel 基的一个可数无穷的子集），令

$$X_n \overset{\text{def}}{=} \text{Span}\{e_1, \cdots, e_n\}$$

则由推论1.70知 X_{n-1} 是 X_n 的闭子空间，则由 Riesz 引理知，对 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X_n$ with $||x_n|| = 1$，使得 $\text{dist}\,(x_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$，进而 $\text{d}(x_n, x_m) \geq \frac{1}{2}, \forall n \neq m$，因此 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列，这与 S_1 列紧矛盾！ □

接下来介绍最佳逼近元：给定一个函数，用一组给定的函数的线性组合去逼近，求最佳逼近元；抽象成数学语言即：给定 $x \in X, \{e_1, \cdots, e_n\} \subset X$（不妨设它们线性无关），是否 $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \text{s.t.}$

$$\left|\left| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right|\right| = \min_{\xi \in \mathbb{K}^n} \left|\left| x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right|\right|$$

或者说，令 $M \overset{\text{def}}{=} \text{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$，是否 $\forall x \in X, \exists y \in M, \text{s.t. } ||x-y|| = \text{dist}\,(x, M)$?

定理 1.74 设有赋范空间 $(X, ||\cdot||)$,设 $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset X$ 线性无关,则对 $\forall x \in X, \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \text{s.t.}$

$$\left|\left|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right|\right| = \min_{\xi \in \mathbb{K}^n} \left|\left|x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right|\right|$$

证明 固定 $x \in X$，定义

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \left|\left|x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right|\right| \end{aligned}$$

我们有如下观察

(1) $f \in C(\mathbb{K}^n)$

(2) $f(\xi) \geq ||\sum_{k=1}^n \xi_k e_k|| - ||x||$

(3) $p(\xi) \overset{\text{def}}{=} ||\sum_{k=1}^n \xi_k e_k||$ 是 $\mathbb{K}^n$ 上的一个范数

因此 $\exists c > 0, \text{s.t. } p(\xi) \geq C|\xi|, \forall \xi \in \mathbb{K}^n$（其中 $|\cdot|$ 是欧氏范数），故

$$f(\xi) \geq C|\xi| - ||x|| \to +\infty \quad \text{as } |\xi| \to +\infty$$

又由 f 连续知，f 在 $\mathbb{K}^n$ 中有最小值（因为 f 在有界部分有最小值，而在无界部分趋于正无穷，故有全局的最小值），即最佳逼近元存在 □

定义 1.75 称赋范空间 $(X, ||\cdot||)$ 严格凸，若 $\forall x, y \in X$ with $||x|| = ||y|| = 1, x \neq y$，满足

$$||tx + (1-t)y|| < 1, \quad t \in (0, 1)$$

例 1.76 $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$ 严格凸，但是 $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$ 不是严格凸的

例 1.77 $L^p(1 < p < \infty)$ 严格凸

证明 对 $\forall f \neq g \in L^p$，且 $||f||_p = ||g||_p = 1$，假设 $\exists t \in (0, 1), \text{s.t.}$

$$||tf + (1-t)g||_p = 1 = t||f||_p + (1-t)||g||_p = ||tf||_p + ||(1-t)g||_p$$

故此时 Minkowski 不等式取等，则 $\exists \lambda_1, \lambda_2$ 不同时为零，使得 $\lambda_1 tf = \lambda_2(1-t)g$ a.e，两边同时取范数得 $||\lambda_1 tf||_p = ||\lambda_2(1-t)g||_p$，则只能是 $\lambda_1 t = \lambda_2(1-t)$，所以 $f = g$ a.e，矛盾！ □

例 1.78 $L^1[0,1], L^\infty[0,1]$ 不是严格凸的，以下给出反例

在 $L^1[0,1]$ 中，考虑 $f \equiv 1, g = 2t$，则 $||f||_1 = ||g||_1 = 1 = \left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|_1$

在 $L^\infty[0,1]$ 中，考虑 $f(t) \equiv 1, g(t) = t$，则 $||f||_\infty = ||g||_\infty = 1 = \left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|_\infty$

定理 1.79 严格凸的赋范空间中，给定向量到给定有限维子空间的最佳逼近元是唯一的

证明 设 $x \in X, M$ 是 X 的子空间且 $\dim M < \infty$, 假设 $\exists y, z \in M, \text{s.t.} \ ||x-y|| = ||x-z|| = \text{dist}\,(x, M) \overset{\text{def}}{=} d$，如果 $d=0$，则 $y=z=x$，平凡成立；下面设 $d>0$，则

$$\begin{aligned} \frac{1}{d}||x-[ty+(1-t)z]|| &= \frac{1}{d}||t(x-y)+(1-t)(x-z)|| \\ &= \left|\left| t\frac{x-y}{d}+(1-t)\frac{x-z}{d} \right|\right| < 1 \end{aligned}$$

这就说明 $||x-[ty+(1-t)z]|| < d$，这与 d 的定义矛盾！ □

§ 1.6 商空间

定义 1.80（商空间）设有一个赋范空间 $(X, ||\cdot||), X_0 \xhookrightarrow{\text{闭}} X$（$X_0$ 是 X 的闭子空间），定义 X 上的等价关系 $x \sim y \iff x-y \in X_0$，则它的等价类全体（商集）为

$$X/X_0 = \{[x] : x \in X\}$$

定义商集上的加法与数乘为

$$\begin{cases} [x]+[y] \overset{\text{def}}{=} [x+y] \\ \lambda[x] \overset{\text{def}}{=} [\lambda x] \end{cases}$$

容易验证 X/X_0 是向量空间，称为 $X \bmod X_0$（作为向量空间）的商空间

评价 良定性？

定义 1.81（商空间的范数）定义商空间中的范数

$$||[x]||_* \overset{\text{def}}{=} \inf_{y\in[x]} ||y||$$

评价

$$||[x]||_* \overset{\text{def}}{=} \inf_{y\in[x]} ||y|| = \inf_{m\in X_0} ||x+m||$$

定理 1.82 (1) $||\cdot||_*$ 是 X/X_0 上的一个范数
(2) 如果 $(X, ||\cdot||)$ 是 Banach 空间，则 $(X/X_0, ||\cdot||_*)$ 也是 Banach 空间

证明 (1). 验证三条公理

- （正定性）：$||[x]||_* \geq 0$ 平凡；若 $||[x]||_* = 0$，则 $\exists y_n \in [x], n = 1, 2, \cdots, \text{s.t.} \ ||y_n|| \to 0$，进而 $y_n \to 0$，由 X_0 是闭集知，$[x] = x + X_0$ 也是闭集，故 $0 \in [x]$
- （齐次性）：平凡

- （三角不等式）：要证明 $||[x]+[y]||_* \le ||[x]||_* + ||[y]||_*$，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in [x], y' \in [y], \text{s.t.}$

$$\begin{cases} ||x'|| \le ||[x]||_* + \frac{\varepsilon}{2} \\ ||y'|| \le ||[y]||_* + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

则 $||x'|| + ||y'|| \le ||[x]||_* + ||[y]||_* + \varepsilon$，而 $x' + y' \in [x+y]$，则 $||x'+y'|| \ge ||[x+y]||_*$，即

$$||[x+y]||_* \le ||x'+y'|| \le ||x'|| + ||y'|| \le ||[x]||_* + ||[y]||_* + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 即得证

(2). 设 $\{[x_n]\}_{n=1}^\infty$ 是 X/X_0 中的任一基本列，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t.}\ \forall m, n > N$

$$||[x_n] - [x_m]||_* < \varepsilon$$

对 $\forall k \in \mathbb{N}$，取 $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}, \exists n_k \in \mathbb{N}$ s.t. $||[x_{n_k}] - [x_m]||_* < \frac{1}{2^{k+1}}, \forall m \ge n_k$，因此我们找到了子列 $\{[x_{n_k}]\}_{k=1}^\infty, \text{s.t.}\ ||[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]||_* < \frac{1}{2^{k+1}}, \forall k$，所以存在 $y_{n_k} \in [x_{n_k} - x_{n_{k+1}}], \text{s.t.}$

$$||y_{n_k}|| < ||[x_{n_k} - x_{n_{k+1}}]||_* + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}$$

令 $z_1 = x_{n_1}, z_2 = z_1 - y_{n_1}, \cdots, z_k = z_{k-1} - y_{n_{k-1}}, \cdots$，则

$$z_k = x_{n_1} - y_{n_1} - \cdots - y_{n_{k-1}} \in [x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}})] = [x_{n_k}]$$

即 $[z_k] = [x_{n_k}]$，且

$$\begin{aligned} ||z_k - z_{k+p}|| &\le ||z_k - z_{k+1}|| + \cdots + ||z_{k+p-1} - z_{k+p}|| \\ &= ||y_{n_k}|| + \cdots + ||y_{n_{k+p-1}}|| \\ &\le \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+p-1}} = \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

所以 $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ 是 X 中的基本列，故 $\exists z \in X, \text{s.t.}\ ||z_k - z|| \to 0$ as $k \to \infty$，故

$$||[x_{n_k}] - [z]||_* = ||[z_k] - [z]||_* \le ||z_k - z|| \to 0 \text{ as } k \to \infty$$

$\square$

§ 1.7 内积空间

定义 1.83（内积、内积空间）设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，如果函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X\to\mathbb{K}$ 满足

(1)（对第一变元线性）：$\forall x_1,x_2,y\in X,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$，有

$$\langle\alpha x_1+\beta x_2,y\rangle=\alpha\langle x_1,y\rangle+\beta\langle x_2,y\rangle$$

(2)（对第二变元共轭线性）：$\forall x,y_1,y_2\in X,\forall\alpha,\beta\in K$，有

$$\langle x,\alpha y_1+\beta y_2\rangle=\overline{\alpha}\langle x,y_1\rangle+\overline{\beta}\langle x,y_2\rangle$$

(3)（共轭对称性）：$\forall x,y\in X,\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$

(4)（二次型正定）：$\langle x,x\rangle\geq 0,\forall x\in X$，且 $\langle x,x\rangle=0\iff x=0$

则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 X 上的一个内积，$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 称为内积空间

评价 $(1)+(3)\Longrightarrow(2)$

引理 1.84（Cauchy-Schwarz 不等式）设有内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$，定义 $||x||\overset{\text{def}}{=}\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$，则

$$|\langle x,y\rangle|\leq||x||\cdot||y||\quad\forall x,y\in X$$

等号成立 $\iff\exists\lambda\in\mathbb{K},\text{s.t. }x=\lambda y$

证明 不妨设 $y\neq 0$，对 $\forall\lambda\in\mathbb{K}$，因为

$$\begin{aligned}0&\leq\langle x+\lambda y,x+\lambda y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+\lambda\langle y,x\rangle+\overline{\lambda}\langle x,y\rangle+\lambda\overline{\lambda}\langle y,y\rangle\\&=||x||^2+2\mathrm{Re}(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle)+|\lambda|^2||y||^2\end{aligned}$$

取 $\lambda=-\frac{\langle x,y\rangle}{||y||^2}$，则

$$0\leq||x||^2-2\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{||y||^2}+\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{||y||^4}\cdot||y||^2=||x||^2-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{||y||^2}$$

移项即证 □

命题 1.85（内积诱导范数）设有内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$，则对 $\forall x\in X$

$$||x||\overset{\text{def}}{=}\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

是 X 上的一个范数，称为内积诱导范数或典则范数

证明 只验证三角不等式，其余平凡：对 $\forall x, y \in X$，因为

$$
\begin{aligned}
||x+y||^2 &= ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + ||y||^2 \\
&\le ||x||^2 + 2|\langle x, y\rangle| + ||y||^2 \\
&\le ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2
\end{aligned}
$$

□

定义 1.86 (Hilbert 空间) 如果一个内积空间在其内积诱导的范数下是一个 Banach 空间，则称之为 Hilbert 空间

例 1.87 在 l^2 上定义内积如下

$$\langle x, y\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$$

先前已经验证 l^2 是 Hilbert 空间

例 1.88 在 L^2 上定义内积如下

$$\langle f, g\rangle \overset{\text{def}}{=} \int f\overline{g}\mathrm{d}x$$

则容易验证 L^2 是 Hilbert 空间

定理 1.89 设有内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$，内积诱导范数 $||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$，则我们有

(1) 极化恒等式：如果 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$，则

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$$

如果 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，则

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k ||x + i^k y||^2$$

(2) 平行四边形等式：

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

证明 留作习题 □

定理 1.90 (Frecher-Von Neumann) 设有赋范空间 $(X, ||\cdot||)$，则

$$||\cdot||\text{可由某个内积给出} \iff ||\cdot||\text{满足平行四边形等式}$$

证明 留作习题 □

定义 1.91 (正交、正交补) 设有内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$，如果 $\langle x,y\rangle=0$，则称 x 与 y 正交，记为 $x\perp y$；对 $M\subset X$，如果 $x\perp y,\forall y\in M$，则记 $x\perp M$，定义 M 的正交补为

$$M^{\perp}\overset{\text{def}}{=}\{x\in X|x\perp M\}$$

命题 1.92 (勾股定理) $x\perp y\Longrightarrow ||x+y||^2=||x||^2+||y||^2$

命题 1.93 若 $M\overset{\text{dense}}{\subset}X,x\perp M$，则 $x=0$

证明 对 $\forall y\in X,\exists y_n\in M,n=1,2,\cdots,\text{s.t. }y_n\to y$，则 $0=\langle x,y_n\rangle\to\langle x,y\rangle$，故 $\langle x,y\rangle=0,\forall y\in X$，所以只能是 $x=0$ □

命题 1.94 $x\perp M\Longrightarrow x\perp\operatorname{span}(M)$

命题 1.95 $M^{\perp}$ 一定是 X 的闭子空间

证明 子空间显然，下证闭性：设 $M^{\perp}\ni x_n\to x$，对 $\forall y\in M,0=\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$，故 $\langle x,y\rangle=0,x\perp y$，所以 $x\in M^{\perp}$ □

定理 1.96 设 H 是一个 Hilbert 空间，$M\subset H$ 是闭凸集，则对 $\forall x\in H,\exists$ 唯一 $y\in M,\text{s.t. }||x-y||=\operatorname{dist}(x,M)$，即 y 是 M 中距 x 最近的点

证明 存在性：令 $\mathrm{d}=\operatorname{dist}(x,M)=\inf\limits_{y\in M}||x-y||$，则 $\exists y_n\in M,n=1,2,\cdots,\text{s.t. }||x-y_n||\to\mathrm{d}$

Claim: $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛

Proof Of Claim :

$$\begin{aligned}||y_m-y_n||^2&=||(y_m-x)-(y_n-x)||^2\\&\overset{(*)}{=}2(||y_m-x||^2+||y_n-x||^2)-4\left|\left|\frac{y_m+y_n}{2}-x\right|\right|^2\\&\le 2(||y_m-x||^2+||y_n-x||^2)-4\mathrm{d}^2\to 4\mathrm{d}^2-4\mathrm{d}^2=0\text{ as }m,n\to\infty\end{aligned}$$

因此 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列，由 H 完备知，$\exists y\in H,\text{s.t. }||y_n-y||\to 0$，再由 M 是闭集知 $y\in M$

Claim: y 是最近点

Proof Of Claim : 因为

$$\mathrm{d}\le||x-y||\le||x-y_n||+||y_n-y||\to\mathrm{d}$$

所以 $||x-y||=d$

唯一性：假设 $\exists y' \in M, \text{s.t.}\ ||x-y'|| = d$，由平行四边形等式

$$\begin{aligned}||y-y'||^2 &= 2(||y-x||^2+||y'-x||^2) - 4\left|\left|\frac{y+y'}{2}-x\right|\right|^2 \\ &\le 4\mathrm{d}^2 - 4\mathrm{d}^2 = 0\end{aligned}$$

因此 $y = y'$ □

评价 其中 $(*)$ 是因为平行四边形等式

$$||(y_m-x)-(y_n-x)||^2 + ||(y_m-x)+(y_n-x)||^2 = 2(||y_m-x||^2+||y_n-x||^2)$$

即

$$\begin{aligned}||y_m-y_n||^2 &= 2(||y_m-x||^2+||y_n-x||^2) - ||y_m+y_n-2x||^2 \\ &= 2(||y_m-x||^2+||y_n-x||^2) - 4\left|\left|\frac{y_m+y_n}{2}-x\right|\right|^2\end{aligned}$$

定理 1.97（正交分解）设 H 是 Hilbert 空间，$M \subset H$ 是闭子空间，则存在正交分解

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

即 $\forall x \in H$，存在唯一的 $y \in M, z \in M^{\perp}, \text{s.t.}\ x = y + z$

证明 对 $\forall x \in H$，由定理1.96知，存在唯一的 $y \in M$（最近点），使得 $||x-y|| = \mathrm{dist}\,(x, M) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}$

Claim: $x - y \in M^{\perp}$

Proof Of Claim : 对 $\forall 0 \neq w \in M, \forall \lambda \in \mathbb{K}$，则 $y + \lambda w \in M$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 &\le ||x-(y+\lambda w)||^2 \\ &= ||x-y||^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{\lambda}\langle x-y, w\rangle) + |\lambda|^2||w||^2\end{aligned}$$

特别地，取 $\lambda = \frac{<x-y,w>}{||w||^2}$，则

$$\mathrm{d}^2 \le ||x-y||^2 - 2\frac{|\langle x-y,w\rangle|^2}{||w||^2} + \frac{|\langle x-y,w\rangle|^2}{||w||^4}||w||^2 = \mathrm{d}^2 - \frac{|\langle x-y,w\rangle|^2}{||w||^2}$$

因此只能是 $\langle x-y, w\rangle = 0, \forall w \in M$，即 $x - y \in M^{\perp}$，由 y 的唯一性知分解唯一 □

定义 1.98（正交投影）设 H 是 Hilbert 空间，$M \subset H$ 是闭子空间，映射 P_M 定义如下

$$\begin{aligned}P_M : H &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto y_x(\text{最近点})\end{aligned}$$

称为 H 到 M 的正交投影

命题 1.99 (1) $P_M x \in M, x - P_M x \in M^{\perp}$
(2) $\text{Range}(P_M) = M, \text{Ker}(P_M) = M^{\perp}$
(3) $||x - P_M x|| = \text{dist}\,(x, M)$
(4) $P_M^2 = P_M$
(5) $||P_M x|| \le ||x||, \forall x \in M$
(6) $\text{Id} - P_M = P_{M^{\perp}}$

定义 1.100（正交系、规范正交系、完备正交系）设有内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$
(1) 如果 $S = \{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 满足 $e_\alpha \perp e_\beta, \forall \alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta$，则称 S 是 X 中的正交系；
(2) 如果 S 还满足 $||e_\alpha|| = 1, \forall \alpha \in I$，则称 S 是规范正交系（O.N.S）
(3) 如果一个正交系 S 满足 $S^{\perp} = \{0\}$，则称 S 为完备正交系

定理 1.101 每个非平凡内积空间中都有完备的正交系

为了证明该定理，我们需要回顾一下 Zorn 引理

定义 1.102（偏序集）设 $X \neq \varnothing$，如果 X 上的一个关系 $\lesssim$ 满足
(1)（传递性）若 $x \lesssim y$ 且 $y \lesssim z$，则 $x \lesssim z$
(2)（反身性）$x \lesssim x$
(3) 若 $x \lesssim y, y \lesssim x$，则 $x = y$
则称 $\lesssim$ 是 X 上的一个偏序，称 $(X, \lesssim)$ 为偏序集

定义 1.103 (1) 如果 $\forall x, y \in X, x \lesssim y, y \lesssim x$ 二者必取其一，则称 $\lesssim$ 为一个全序
(2) 对 $Y \subset X$，如果 $\exists p \in X, \text{s.t. } y \lesssim p, \forall y \in Y$，则称 p 是 Y 的一个上界
(3) 如果 $\exists m \in X$ 满足 $m \lesssim x \implies x = m$，则称 m 是 X 的一个极大元

公理 1.104（Zorn Lemma）设有偏序集 $(X, \lesssim)$，如果 X 的每个全序子集都有上界，则 X 一定有极大元

证明（定理 1.102）令

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{X\text{中的正交系}\}$$

考虑集合的包含关系 $\subset$，则 $(\mathcal{F}, \subset)$ 是一个偏序集，设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathcal{F}$ 的全序子集，令

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{A\in\mathscr{C}} A$$

则 P 是 $\mathscr{C}$ 的一个上界，由 Zorn Lemma 知，$\mathcal{F}$ 有极大元 S

Claim: $S^{\perp} = \{0\}$

假设不然，则 $\exists 0 \neq x_0 \in X, \text{s.t. } x_0 \perp S$，所以 $S \cup \{x_0\} \in \mathcal{F}$，这与 S 的极大性矛盾！ □

定义 1.105（规范正交基）设有内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$，$S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一个规范正交系，如果 $\forall x\in X$ 均可表为

$$x=\sum_{\alpha\in I}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha$$

则称 S 为 X 的一个规范正交基 (O.N.B)，我们称 $\{\langle x,e_\alpha\rangle\}_{\alpha\in I}$ 称为 x 关于 S 的 Fourier 系数

评价 上面的求和只是形式和，未必收敛，接下来我们会证明这样定义是合理的

定理 1.106（Bessel 不等式）设 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一个规范正交系，则对 $\forall x\in X$

$$\sum_{\alpha\in I}|\langle x,e_\alpha\rangle|^2\le ||x||^2$$

证明 Step 1. 证明任何有限项 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_N\}\subset I$, $\sum_{k=1}^N|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|\le ||x||^2$

因为

$$\begin{aligned}
0\le&\left\langle x-\sum_{k=1}^N\langle x,e_{\alpha_k}\rangle e_{\alpha_k}, x-\sum_{j=1}^N\langle x,e_{\alpha_j}\rangle e_{\alpha_j}\right\rangle\\
=&||x||^2-\sum_{k=1}^N\langle x,e_{\alpha_k}\rangle\langle e_{\alpha_k},x\rangle-\sum_{j=1}^N\overline{\langle x,e_{\alpha_j}\rangle}\langle x,e_{\alpha_j}\rangle+\sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N\langle x,e_{\alpha_k}\rangle\overline{\langle x,e_{\alpha_j}\rangle}\langle e_{\alpha_k},e_{\alpha_j}\rangle\\
=&||x||^2-\sum_{k=1}^N|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|^2\quad\text{（第三项和第四项消去）}
\end{aligned}$$

Step 2. 证明 $\tilde{I}=\{\alpha\in I:\langle x,e_\alpha\rangle\neq 0\}$ 至多可数

令

$$I_n\overset{\text{def}}{=}\{\alpha\in I:|\langle x,e_\alpha\rangle|>\frac{1}{n}\},n=1,2,\cdots$$

Claim: $\forall n\in\mathbb{N},\#I_n<\infty$

Proof Of Claim : 假设不然，则存在 n_0, s.t. $\#I_{n_0}=\infty$，取 N 充分大，使得

$$\frac{N}{n_0^2}>||x||^2$$

在 I_{n_0} 中任取 N 个指标 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，则

$$\sum_{k=1}^N|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|^2>\frac{N}{n_0^2}>||x||^2$$

这与 Step 1 矛盾！进而 $\tilde{I}=\bigcup_{n=1}^\infty I_n$ 可数

Step 3. 任给 $\tilde{I}$ 的一个排列 $\tilde{I}=\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$，对 $\forall N$，由 Step 1 我们有

$$\sum_{k=1}^N|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|^2\le ||x||^2$$

因此我们可以定义

$$\sum_{\alpha\in I} |\langle x, e_\alpha\rangle| \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2 \le ||x||^2$$

□

评价 在证明 Bessel 不等式前,求和 $\sum\limits_{\alpha\in I} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2$ 未必良定,但是我们证明了该求和是收敛的,由 Riemann 重排定理知它是良定的，即与排列方式无关

引理 1.107 设 H 是 Hilbert 空间，$S = \{e_\alpha\}_{k=1}^{\infty}$ 是规范正交系，定义

$$M \overset{\text{def}}{=} \overline{\text{Span}(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})}$$

则 $\forall x \in H$，有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k \in M$，且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k = P_M x$

证明 由 Bessel 不等式知

$$\sum_{\alpha\in I} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \le ||x||^2$$

所以由勾股定理知

$$\left|\left|\sum_{k=m}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\right|\right|^2 = \sum_{k=n}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2 \to 0, \quad \text{as } m, n \to \infty$$

这说明 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ 是基本列，我们定义它的极限为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$$

由 M 是闭集知

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k \in M$$

又因为

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k, e_m \right\rangle = \langle x, e_m\rangle - \langle x, e_m\rangle = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

即 $x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle \in M^{\perp}$，所以

$$x = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle\right) + \left(x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle\right)$$

因为 H 有直和分解 $H = M \oplus M^{\perp}$，由直和分解的唯一性知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle = P_M x$ □

引理 1.108 对 $\mathbb{N}$ 的任一置换 σ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle x, e_{\sigma(k)}\right\rangle e_{\sigma(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle x, e_k\right\rangle e_k$$

证明 令

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\operatorname{Span}(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})}, \quad \tilde{M} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\operatorname{Span}(\{e_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty})}$$

则作为集合有 $M=\tilde{M}$，所以 $LHS=P_{\tilde{M}}x=P_M x=RHS$ □

评价 $\sum\limits_{\alpha\in I}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$，之前证明过 $\{\langle x, e_\alpha\rangle\}_{\alpha\in I}$ 中只有至多可数个非零，我们任取这些非零项的一个排列即可

定理 1.109 设 H 是 Hilbert 空间，$\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一个规范正交系，则对 $\forall x\in H$

(1) $\sum\limits_{\alpha\in I}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha\in H$

(2)

$$\left\|x-\sum_{\alpha\in I}\langle x-e_\alpha\rangle e_\alpha\right\|=||x||^2-\sum_{\alpha\in I}|\langle x, e_\alpha\rangle|^2$$

证明 对 $\forall x\in H, \tilde{I}=\{\alpha\in I|\langle x, e_\alpha\rangle\neq 0\}$ 至多可数，令 $\tilde{I}=\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$，则可以定义

$$\sum_{\alpha\in I}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_{\alpha_k}\rangle e_{\alpha_k}\in H$$

由勾股定理知

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_{\alpha_k}\rangle e_{\alpha_k}\right\|^2=||x||^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2$$

令 $n\to\infty$ 即得证 □

定理 1.110 设 H 是 Hilbert 空间，$S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是规范正交系，则以下等价 TFAE

(1) S 是规范正交基

(2) $S^\perp=\{0\}$（完备）

(3) Parseval 等式成立：$\forall x\in H$

$$||x||^2=\sum_{\alpha\in I}|\langle x, e_\alpha\rangle|^2$$

证明 (1) $\Longrightarrow$ (3) 由规范正交基的定义和定理1.109立得

(3) $\Longrightarrow$ (2) 假设 $S^\perp\neq\{0\}$，则存在 $0\neq x_0\in H$, s.t. $\langle x_0, e_\alpha\rangle=0, \forall\alpha\in I$，则

$$\sum_{\alpha\in I}|\langle x_0, e_\alpha\rangle|^2=0$$

由 Parseval 等式知 $||x_0||^2 = 0$，这与 $x_0 \neq 0$ 矛盾！

(2) $\Longrightarrow$ (1) 假设 S 不是规范正交基，则 $\exists x_0 \in H, \text{s.t.} \sum\limits_{\alpha\in I} \langle x_0, e_\alpha\rangle e_\alpha \neq x_0$，即 $x_0 - \sum\limits_{\alpha\in I} \langle x_0, e_\alpha\rangle e_\alpha \neq 0$，另一方面，对 $\forall \beta \in I$

$$\left\langle x_0 - \sum_{\alpha\in I} \langle x_0, e_\alpha\rangle e_\alpha, e_\beta \right\rangle = \langle x_0, e_\beta\rangle - \langle x_0, e_\beta\rangle = 0$$

故 $x_0 - \sum\limits_{\alpha\in I} \langle x_0, e_\alpha\rangle e_\alpha \in S^\perp$，这与 $S^\perp = \{0\}$ 矛盾！ □

综上我们有如下定理

定理 1.111 非平凡的 Hilbert 空间都有规范正交基

例 1.112 考虑 l^2 以及

$$e_n \overset{\text{def}}{=} (\underbrace{0, \cdots, 0}_{(n-1)\text{个}}, 1, 0, \cdots), \quad n = 1, 2, \cdots$$

因为 $(\{e_n\}_{n=1}^\infty)^\perp = \{0\}$，所以 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 l^2 的规范正交基

评价 上面的例子中，$\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 不是 l^2 的 Hamel 基，考虑 $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots) \in l^2$，但是它不能被有限多个 e_n 线性表示出

定理 1.113（Gram-Schmidt 正交化）设有内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle), \{x_k\}_{k=1}^\infty$ 线性无关，则存在规范正交系 $\{e_k\}_{k=1}^\infty$，使得 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Span}(\{e_k\}_{k=1}^n) = \text{Span}(\{x_k\}_{k=1}^n)$$

证明 构造性证明：令 $y_1 = x_1$，归一化得 $e_1 = \frac{y_1}{||y_1||}$；令 $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$，归一化得 $e_2 = \frac{y_2}{||y_2||}$；假设前 $k-1$ 个 y_n, e_n 已经定义好，接下来定义

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle x_k, e_i\rangle e_i, \quad e_k = \frac{y_k}{||y_k||}$$

□

定理 1.114 设 H 是 Hilbert 空间，则 H 可分 $\Longleftrightarrow$ H 有至多可数的规范正交基

证明 $(\Longrightarrow)$: Case 1. 若 $\dim H < \infty$，对 Hamel 基进行 Gram-Schmidt 正交化即得

Case 2. 若 $\dim H = \infty$，由 H 可分知 $\exists A = \{x_k\}_{k=1}^\infty \overset{\text{dense}}{\subset} H$

Claim: $\exists B = \{y_k\}_{k=1}^\infty \subset A$ 线性无关，使得 $\text{Span}(B) = \text{Span}(A)$

Proof Of Claim : 取 $x_{n_1} = x_1, x_{n_2} \in A, \text{s.t.}\ x_{n_2} \notin \text{Span}\{x_{n_1}\}, \cdots$，取 $x_{n_k} \in A, \text{s.t.}\ x_{n_k} \notin \text{Span}\{x_{n_1}, \cdots, x_{n_{k-1}}\}$，令 $y_k = x_{n_k}, k = 1, 2, \cdots, B = \{y_k\}_{k=1}^\infty$，则由选取知 $\forall x_k \in A, x_k \in \text{Span}\{y_1, \cdots, y_{k-1}\}$，所以 $A \subset \text{Span}(B) \Longrightarrow \text{Span}(A) = \text{Span}(B)$，由 A 的稠密性知

$$\overline{\text{Span}(A)} = \overline{\text{Span}(B)} = H$$

且 $\#B=\infty$（若 $\#B<\infty$，则 $\operatorname{Span}(B)$ 是有限维子空间，故 $\overline{\mathrm{Span(B)}}=\mathrm{Span(B)}=H$，这与 $\dim H=\infty$ 矛盾！）

对 B 进行 Gram-Schmidt 正交化得到规范正交系 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, s.t. $\overline{\operatorname{Span}(\{e_n\}_{n=1}^{\infty})}=\overline{\operatorname{Span}(B)}=H$，故 $(\{e_n\}_{n=1}^{\infty})^{\perp}=\{0\}$，所以它是规范正交基

$(\Longleftarrow)$：设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的可数规范正交基（有限情形类似），令

$$M\overset{\text{def}}{=}\operatorname{Span}^{\mathbb{Q}}(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\middle|\lambda_k\in\mathbb{Q}+i\mathbb{Q},k=1,2,\cdots\right\}$$

Claim: M 可数

Proof Of Claim：考虑一一对应

$$\begin{aligned}\varphi:M&\longrightarrow\bigcup_{\substack{I\subset\{e_k\}_{k=1}^{\infty}\\ \#I<\infty}}(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^{\#I}\\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_{n_k}&\longmapsto(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\end{aligned}$$

由 $\bigcup\limits_{\substack{I\subset\{e_k\}_{k=1}^{\infty}\\ \#I<\infty}}(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^{\#I}$ 可数知 M 可数

Claim: $M\overset{\text{dense}}{\subset}H$

Proof Of Claim：对 $\forall x\in H,\forall\varepsilon>0$，由 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$，对 $\forall n,\exists\alpha_n\in\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$, s.t. $|\alpha_n-\langle x,e_n\rangle|<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$，则对 $\forall N\in\mathbb{N}$ 有

$$\left\|\sum_{k=1}^{N}\langle x,e_k\rangle e_k-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k e_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{N}|\langle x,e_k\rangle-\alpha_k|^2<\frac{\varepsilon^2}{4}$$

再取 N 充分大，使得

$$\left\|\sum_{k=1}^{N}\langle x,e_k\rangle e_k-x\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

因此

$$\left\|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k e_k-x\right\|\le\left\|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k e_k-\sum_{k=1}^{N}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|+\left\|\sum_{k=1}^{N}\langle x,e_k\rangle e_k-x\right\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

□

例 1.115（不可分的 Hilbert 空间）设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的计数测度，即

$$\mu(E)=\begin{cases}\#E, & \#E<\infty\\ +\infty, & \#E=\infty\end{cases}$$

记 $L^2(\mathbb{R},\mu)=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mu\text{-可测，且}f\text{在至多可数个点处非零，且}\sum\limits_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|^2<\infty\right\}$，则对 $f:\mathbb{R}\to$

$[0,\infty]$，我们可以定义和式以及内积

$$\sum_{t\in\mathbb{R}} f(t) = \sup\left\{\sum_{t\in F} f(t) : f\subset\mathbb{R}, \#F<\infty\right\}$$

$$\langle f,g\rangle = \sum_{t\in\mathbb{R}} f(t)g(t)$$

考虑函数

$$e_r(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & t=r \\ 0, & t\neq r \end{cases}$$

则 $\{e_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ 是 $L^2(\mathbb{R},\mu)$ 的规范正交基：只需证明 $(\{e_r\}_{r\in\mathbb{R}})^\perp=\{0\}$，注意到 $\langle f,e_r\rangle = f(r)$，若 f 和每个 e_r 都正交，则 $\forall r\in\mathbb{R}, f(r)=0$，故 $f\equiv 0$；因此它是 H 的不可数的规范正交基，故 H 不可分

接下来我们对可分的内积空间进行分类

定义 1.116（内积空间同构）设有两个内积空间 $(X_1,\langle\cdot,\cdot\rangle_1),(X_2,\langle\cdot,\cdot\rangle_2)$，如果 $\exists$ 线性同构 $T:X_1\to X_2$, s.t.

$$\langle Tx,Ty\rangle_2 = \langle x,y\rangle_1$$

则称 X_1,X_2 作为内积空间同构，记为 $X_1\simeq X_2$

定理 1.117 (1) n 维 Hilbert 空间 $\simeq\mathbb{K}^n$
(2) 无穷维可分 Hilbert 空间 $\simeq l^2$

证明 只证明 (2)：设 $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ 是 H 的一个规范正交基，定义

$$\begin{aligned} T: H &\longrightarrow l^2 \\ x &\longmapsto \{\langle x,e_k\rangle\}_{k=1}^\infty \end{aligned}$$

则我们有如下观察

(1) T 线性

(2) T 等距：$||Tx||_{l^2} = \left(\sum\limits_{k=1}^\infty |\langle x,e_k\rangle|^2\right)^{\frac12} \overset{\text{Parseval}}{=} ||x||$

(3) T 是单射（由等距可得）

(4) T 是满射：对 $\forall a\in l^2, a=(a_1,a_2,\cdots)$，下面找它的原像，因为

$$\left\|\sum_{k=n}^m a_k e_k\right\|^2 = \sum_{k=n}^m |a_k|^2 \to 0,\quad \text{as } m,n\to\infty$$

因此 $\sum\limits_{k=1}^n a_k e_k$ 是基本列，故 $\exists x\in H$, s.t.

$$\left\|\sum_{k=1}^n a_k e_k - x\right\| \to 0,\quad \text{as } n\to\infty$$

也就是说 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_ke_k$，且 $\langle x,e_k\rangle=a_k$，因此 $Tx=a$

(5) $\langle Tx,Ty\rangle_{l^2}=\langle x,y\rangle,\forall x,y\in H$：这是因为

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle&=\left\langle\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k,\sum_{j=1}^{\infty}\langle y,e_j\rangle e_j\right\rangle\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_j\rangle}\langle e_k,e_j\rangle\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}=\langle Tx,Ty\rangle_{l^2}\end{aligned}$$

□

例 1.118 考虑单位圆周 $\mathbb{T}\overset{\text{def}}{=}\{e^{2\pi it}|t\in\mathbb{R}\}$，试求 $L^2(\mathbb{T})$ 上的规范正交基（定义内积为 $\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{T}}f\overline{g}$）？对 $\mathbb{T}$ 上的函数 F，令

$$f(t)\overset{\text{def}}{=}F(e^{2\pi it}),\quad t\in\mathbb{R}$$

则 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的函数，且我们有一一对应

$$F\longleftrightarrow f,\quad \mathbb{T}\longleftrightarrow[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

定义 $e_k(t)=e^{2\pi ikt},t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，则 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 中的规范正交系，称为三角函数系，这是因为

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}e^{2\pi ikt}\overline{e^{2\pi ijt}}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{t}{2}}e^{2\pi i(k-j)t}\mathrm{d}t=\delta_{ij}$$

对 $f\in L^2(\mathbb{T})$，令

$$\hat{f}(k)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t=\langle f,e_k\rangle,\quad k\in\mathbb{Z}$$

实际上 $f(x)$ 有 Fourier 展开 $f(x)\sim\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)e^{2\pi ikx}=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,e_k\rangle e_k$

Q：是否每个 f 的 Fourier 级数都收敛于 f？

A：需要考虑以何种形式收敛

(1) 逐点收敛：1876 Du Bois-Reymond 构造了反例；充分条件（Dini 条件）

(2) a.e 收敛？（较难，本科阶段不考虑）

(3) **平方平均收敛**（依 L^2 范数收敛）

定理 1.119 $\forall f\in L^2(\mathbb{T})$，我们有

$$||S_Nf-f||_2\to0\text{ as }N\to\infty$$

这里 $(S_Nf)(t)=\sum\limits_{k=-N}^{N}\hat{f}(k)e^{2\pi ikt}$ 为 Fourier 级数的部分和

证明 证明思路：

$$\begin{aligned}\text{Thm} &\iff \{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\text{是}L^2(\mathbb{T})\text{的规范正交基}\\ &\iff (\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}})^\perp=\{0\}\\ &\iff \overline{\text{Span}(\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}})}=L^2(\mathbb{T})\\ &\iff \{\text{三角多项式}\}\overset{\text{dense}}{\subset}L^2(\mathbb{T})\end{aligned}$$

首先我们有 $S_Nf=f*D_N$，其中 $D_N(t)=\sum\limits_{k=-N}^{N}e^{2\pi ikt}=\frac{\sin[(2N+1)\pi t]}{\sin\pi t}$（Dini 核）

这是因为

$$\begin{aligned}(S_Nf)(x)&=\sum_{k=-N}^{N}\left[\int_{-\frac12}^{\frac12}f(t)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t\right]e^{2\pi ikx}\\ &=\int_{-\frac12}^{\frac12}f(t)\left[\sum_{k=-N}^{N}e^{2\pi ik(x-t)}\right]\mathrm{d}t=(f*D_N)(x)\end{aligned}$$

但是 $||D_N||_1\to\infty$ as $N\to\infty$，即它不是好核，我们考虑 Cesaro 求和

$$\begin{aligned}\sigma_Nf&\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}S_kf=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}f*D_k\\ &=f*F_N\end{aligned}$$

其中 $F_N(t)=\frac{1}{N+1}\sum\limits_{k=0}^{N}D_k(t)=\frac{1}{N+1}\frac{\sin^2[(N+1)\pi t]}{\sin^2(\pi t)}$ 为 Fejer 核

Claim1: $\int_{-\frac12}^{\frac12}F_N(t)\mathrm{d}t=1$，即 $||F_N||_1=1$

Claim2: $\forall\delta>0,\ \lim\limits_{N\to\infty}\int_{\delta<|t|<\frac12}F_N(t)\mathrm{d}t=0$

Proof Of Claim：断言 1 自行验证，对于断言 2 我们有

$$0\le F_N(t)\le\frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2(\pi\delta)},\quad\forall t\text{ with }\delta<|t|<\frac12$$

我们还需要一个引理

引理 1.120（Minkowski 积分不等式）设 $1\le p<\infty$

$$\left|\left|\int_Y f(\cdot,y)\mathrm{d}y\right|\right|_p\le\int_Y||f(\cdot,y)||_p\mathrm{d}y$$

即

$$\left(\int_X\left|\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac1p}\le\int_Y\left(\int_X|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac1p}\mathrm{d}y$$

接下来我们证明 $\forall f\in L^2(\mathbb{T})$，有

$$||\sigma_Nf-f||_2\to0,\quad\text{as }N\to\infty$$

对 $\forall \varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
||\sigma_N f - f||_2 &= \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(x-t) - f(x)] F_N(t) \mathrm{d}t \right|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x-t) - f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} F_N(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ||f(\cdot - t) - f(\cdot)||_2 F_N(t) \mathrm{d}t \\
&= \left(\int_{|t| \leq \delta} + \int_{\delta < |t| < \frac{1}{2}} \right) ||f(\cdot - t) - f(\cdot)||_2 F_N(t) \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2||f||_2 \int_{\delta < |t| < \frac{1}{2}} F_N(t) \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

（当 N 充分大时），又因为

$$
\sigma_N f = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k f
$$

即 $\sigma_N f$ 为三角多项式，即 $\{$三角多项式$\} \overset{\text{dense}}{\subset} L^2(\mathbb{T})$ $\square$

第二章 线性算子与线性泛函

§2.1 线性算子

定义 2.1（线性算子）设 X, Y 是向量空间，如果映射 $T : X \to Y$ 满足

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \quad \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

则称 T 是线性算子，若 $Y = \mathbb{K}$，则称 T 是线性泛函

例 2.2 微分算子：设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集，$X = Y = C^\infty(\Omega)$

$$T = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \partial^\alpha$$

例 2.3 积分算子：设 $X = L^p(\Omega), Y = \{\Omega\text{上的可测函数}\}$，定义积分核 $K(\cdot, \cdot)$ 为 $\Omega \times \Omega$ 上的可测函数（通常它还具有其它性质），定义

$$Tu(x) = \int_\Omega K(x, y) u(y) \mathrm{d}y, \quad x \in \Omega$$

比如 Fourier 变换

$$\mathcal{F}f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} \mathrm{d}x$$

例 2.4 $f(u) = \int_\Omega u(x)^2 \mathrm{d}x$ 为非线性泛函；$||u||_p$ 也是非线性泛函

定义 2.5（有界算子）设有赋范空间 $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$，设 $T : X \to Y$ 是线性算子，如果 $\exists C > 0, \text{s.t. } ||Tx||_Y \le C||x||_X, \forall x \in X$，则称 T 有界

评价 T 有界 $\iff$ T 把有界集映为有界集（留作习题）

定理 2.6 设有赋范空间 $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y), T : X \to Y$ 为线性算子，则 T 有界 $\iff$ T 连续

证明 $(\Longrightarrow)$: 设 $x_n \to x$，即 $||x_n - x||_X \to 0$，由定义有

$$||Tx_n - Tx||_Y = ||T(x_n - x)||_Y \le C||x_n - x||_X \to 0$$

$(\Longleftarrow)$: 假设 T 无界，则对 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X, \text{s.t. } ||Tx_n||_Y > n||x||_X$，设 $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{n||x_n||_X}, \forall n \in \mathbb{N}$，则

$$||\tilde{x}_n||_X = \frac{1}{n} \to 0$$

由 T 连续知 $T\tilde{x}_n \to 0$，但另一方面

$$||T\tilde{x}_n||_Y = \frac{||Tx_n||_Y}{n||x_n||_X} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

矛盾！ □

定理 2.7 有限维赋范空间之间的线性算子有界

证明 Case 1. $X = \mathbb{K}^n, Y = \mathbb{K}^m$

设有线性算子 $T: X \to Y$，由 T 线性知 $\exists A = (a_{ij})_{m\times n}$, s.t. $Tx = Ax$，则

$$||Tx||_{\mathbb{K}^m} = \left(\sum_{i=1}^m \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} ||x||_{\mathbb{K}^n}$$

Case 2. 一般情况（$\dim X = n, \dim Y = m$）

设有线性算子 $T: X \to Y$，因为存在线性同构 $\varphi: X \to \mathbb{K}^n, \psi: Y \to \mathbb{K}^m$，考虑 $\tilde{T} = \psi \circ T \circ \varphi^{-1}: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$，则由 Case 1 知 $\tilde{T}$ 是有界的，进而 $T = \psi^{-1} \circ \tilde{T} \circ \varphi$ 连续，故有界 □

例 2.8（无界算子）设 $X = C^1[0,1], Y = C[0,1]$，都赋予一致范数（取上确界），则微分算子 $T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 无界：构造 $u_n(t) = t^n, \quad t \in [0,1], n \in \mathbb{N}$ 则

$$\frac{||Tu_n||}{||u_n||} = n \to \infty$$

习题 2.9 证明：

(1) 若 $\dim X < \infty$，则线性算子 $T: X \to Y$ 有界

(2) 若 $\dim X = \infty, Y \neq \{0\}$，则存在无界线性算子 $X \to Y$

定义 2.10 约定记号

$$\begin{cases} \mathscr{L}(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \{X\text{到}Y\text{的有界线性算子}\} \\ \mathscr{L}(X) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{L}(X,X) \\ X^* \overset{\text{def}}{=} \mathscr{L}(X,\mathbb{K}) = \{X\text{上的连续线性泛函}\} \end{cases}$$

定义算子间的加法与数乘

$$(T+S)(x) \overset{\text{def}}{=} Tx + Sx, \quad (\lambda T)(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda(Tx)$$

对 $\forall T \in \mathscr{L}(X,Y)$，定义

$$||T||_{X\to Y} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X} = \sup_{\substack{x\in X \\ ||X||=1}} ||Tx||$$

称为 T 的算子范数

定理 2.11 $(\mathscr{L}(X,Y), ||\cdot||_{X\to Y})$ 是赋范空间，进而

(1) 如果 Y 完备，则 $\mathscr{L}(X,Y)$ 完备

(2) X^* 是 Banach 空间

证明 只证明 (1)：赋范空间自行验证，设 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ 是基本列，则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, s.t.

$$||T_n - T_m|| < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq N$$

即 $\forall x \in X, ||T_n x - T_m x|| < \varepsilon ||x||, \forall m, n \geq N$，所以 $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 中的基本列，由 Y 完备知 $\exists y \in Y$, s.t. $T_n x \to y$，定义映射

$$T : X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto y = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

由 $T_n, \forall n$ 线性知，T 是线性的，下证 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$，即 T 有界

$$\begin{aligned} ||T_n x - Tx|| &\leq ||T_n x - T_m x|| + ||T_m x - Tx|| \\ &< \varepsilon ||x|| + ||T_m x - Tx|| \overset{m\to\infty}{\leq} \varepsilon ||x||, \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

进而 $||T_n x - Tx|| \leq \varepsilon ||x||, \forall n \geq N$，所以

$$||Tx|| \leq ||T_N x|| + \varepsilon ||x|| \leq (||T_N|| + \varepsilon)||x|| \overset{\text{def}}{=} C||x||$$

所以 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$，最后证明 $||T_n - T|| \to 0$, as $n \to \infty$

由上过程知

$$||T_n - T|| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{||T_n x - Tx||}{||x||} \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即证 □

例 2.12 设 H 是 Hilbert 空间,$M \subset H$ 是闭子空间,回忆 H 到 M 的正交投影 P_M,我们有 $||P_M x|| \leq ||x||$,进而

$$||P_M|| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{||P_M x||}{||x||} = 1$$

这是因为当 $x \in M$ 时，$P_M x = x$

接下来介绍 Hilbert 空间中的 Riesz 表示定理

设 H 是 Hilbert 空间，对 $\forall y \in H$，定义

$$f_y(x) \overset{\text{def}}{=} \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in H$$

则 f_y 是线性泛函，且

$$|f_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||, \quad \forall x \in H$$

所以 $f_y \in H^*$ 且 $||f_y|| \leq ||y||$，另一方面

$$||y||^2 = |\langle y, y \rangle| = |f_y(y)| \leq ||f_y|| \cdot ||y|| \Longrightarrow ||y|| \leq ||f_y||$$

因此 $||f_y|| = ||y||$

Q：是否 $\forall f \in H^*, \exists y \in H$, s.t. $f(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in H$?

A：是的，这就是 Hilbert 空间中的 Riesz 表示定理

定理 2.13（Riesz 表示定理）设 H 是 Hilbert 空间，对 $\forall f \in H^*$,$\exists$ 唯一 $y_f \in H$, s.t. $f(x) = \langle x, y_f \rangle, \forall x \in H$，且 $||y_f|| = ||f||$

证明 存在性：如果 $f \equiv 0$，则取 $y_f = 0$；下面假设 $f \not\equiv 0$，则

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in X : f(x) = 0\} \neq H$$

且它是 H 的闭子空间，进而 $\mathrm{Ker}(f)^\perp \neq \{0\}$ 非平凡，则 $\exists 0 \neq y_0 \in \mathrm{Ker}(f)^\perp$，不妨设 $||y_0|| = 1$，则对 $\forall x \in H$

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y_0)} \cdot f(y_0) = 0, \quad \forall x \in H$$

即 $x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0 \in \mathrm{Ker}(f)$，又因为 $y_0 \in \mathrm{Ker}(f)^\perp$，所以

$$\left\langle x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0, y_0 \right\rangle = 0, \quad \forall x \in H$$

即 $\langle x, y_0 \rangle - \frac{f(x)}{f(y_0)} ||y_0||^2 = 0 \Longrightarrow f(x) = \left\langle x, \overline{f(y_0)} y_0 \right\rangle$，取 $y_f = \overline{f(y_0)} y_0$ 即可

唯一性：若 $\exists y_f^1, y_f^2 \in H$, s.t. $f(x) = \langle x, y_f^1 \rangle = \langle x, y_f^2 \rangle, \forall x \in X$，则

$$\langle x, y_f^1 - y_f^2 \rangle = 0, \forall x \in H$$

进而取 $x = y_f^1 - y_f^2$ 即知 $y_f^1 = y_f^2$ □

定理 2.14 设 H 是 Hilbert 空间，$a(\cdot, \cdot)$ 是 H 上的共轭双线性函数，如果 $\exists C > 0$, s.t.

$$|a(x, y)| \leq C ||x|| \cdot ||y||, \quad \forall x, y \in H$$

则 $\exists A \in \mathscr{L}(H)$, s.t. $a(x, y) = \langle x, Ay \rangle, \forall x, y \in H$，且

$$||A|| = \sup_{\substack{x,y \in H \\ x,y \neq 0}} \frac{|a(x, y)|}{||x|| \cdot ||y||}$$

证明 固定 $y \in H$，定义 $f_y(x) = a(x, y), \forall x \in H$，则

$$|f_y(x)| = |a(x, y)| \leq C ||y|| \cdot ||x||$$

因此 $f_y \in H^*$，且 $||f_y|| \leq C||y||$，由 Riesz 表示定理，存在唯一 $z \in H$, s.t.

$$f_y(x) = \langle x, z \rangle, \quad \forall x \in H$$

且 $||z|| = ||f_y||$，定义

$$\begin{aligned} A : H &\longrightarrow H \\ y &\longmapsto z \end{aligned}$$

(其中 z 如上定义)，则 $a(x,y)=f_y(x)=\langle x,z\rangle=\langle x,Ay\rangle$，且我们有观察

(1) A 线性

(2) $\forall y\in H, ||Ay||=||z||=||f_y||\le C||y||$

因此 A 有界，$A\in\mathscr{L}(H), ||A||\le C$，特别地取 $C=\sup\limits_{\substack{x,y\in H\\x,y\neq 0}}\frac{|a(x,y)|}{||x||\cdot||y||}$，即

$$||A||\le \sup_{\substack{x,y\in H\\x,y\neq 0}}\frac{|a(x,y)|}{||x||\cdot||y||}$$

另一方面有 $|a(x,y)|=|\langle x,Ay\rangle|\le||x||\cdot||Ay||\le||A||\cdot||x||\cdot||y||,\forall x,y\in H$，移项取上确界得

$$\sup_{\substack{x,y\in H\\x,y\neq 0}}\frac{|a(x,y)|}{||x||\cdot||y||}\le||A||$$

因此二者相等 □

§ 2.2 纲推理

定义 2.15 (疏集) 设有度量空间 $(X,\mathrm{d}), E\subseteq X$，如果 $\overline{E}$ 无内点，则称 E 是疏集或无处稠密集

例 2.16 $\mathbb{Q}$ 不是疏集；Cantor 三分集 $\mathcal{C}$ 是疏集

定义 2.17 (第一纲集、第二纲集) 设有度量空间 (X,d)，若一个集合 A 可以表示成可数个疏集的并集，则称 A 是第一纲集，即

$$\text{第一纲集} \overset{\text{def}}{=} \text{可数个疏集之并}$$

不是第一纲集的集合称为第二纲集

评价 可数集是第一纲集

定理 2.18 (Baire 纲定理,BCT=Baire Category Theorem) 完备的度量空间是第二纲集

为证明 Baire 纲定理，我们需要如下引理

引理 2.19 (闭集套定理) 设 (X,d) 是完备度量空间，一列闭球 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

(1) $B_{k+1}\subseteq B_k,\forall k\in\mathbb{N}$

(2) $\mathrm{diam}B_k\to 0, \text{as } k\to\infty$

则 $\exists x_0\in X, \text{s.t.}$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k=\{x_0\}$$

证明 设 $B_k=\overline{B(x_k,r_k)}$，对 $\forall n,m\in\mathbb{N}$，不妨设 $n>m$，则 $B_n\subseteq B_m$，故 $x_n\in B_m$，进而 $\mathrm{d}(x_n,x_m)<r_m\to 0$ as $m,n\to\infty$，故球心序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列，由 X 完备知，$\exists x_0\in X,\text{s.t. } x_n\to x_0$，且由 B_m 闭知 $x_0\in B_m,\forall m$，故 $x_0\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}B_m$

如果还存在 $y \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} B_m$，则

$$\mathrm{d}(x_0, y) \le \mathrm{d}(x_0, x_n) + \mathrm{d}(x_n, y) \le 2r_n \to 0$$

故 $\mathrm{d}(x_0, y) = 0 \Longrightarrow y = x_0$ □

接下来我们可以证明 Baire 纲定理

证明 反证，假设完备度量空间 X 是第一纲集，则存在一列疏集 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, s.t.

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_n$$

任取 $B(x_0, r_0) \subset X$，由 E_1 是疏集知，存在 $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$，且 $r_1 < 1, \overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{E}_1 = \varnothing$（这样取是因为 $\overline{E}_1$ 没有内点，即 $B(x_0, r_0)$ 不完全落在 $\overline{E}_1$ 中，所以 $\exists x_1 \in B(x_0, r_0) \backslash \overline{E}_1$，则 $\operatorname{dist}(x_1, \overline{E}_1) > 0$，取 $r_1 < \min\{1, \frac{1}{2} \operatorname{dist}(x_1, \overline{E}_1)\}$）

同理，由 E_2 是疏集知 $\exists B(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1)$，且 $r_2 < \frac{1}{2}, \overline{B(x_2, r_2)} \cap \overline{E}_2 = \varnothing$，依次下去我们得到一列闭球 $\{\overline{B(x_n, r_n)}\}$，它满足闭球套定理，进而 $\exists x \in X$, s.t.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B(x_k, r_k)} = \{x\}$$

因为 $x \in \overline{B(x_k, r_k)}, \forall k$，则 $x \notin \overline{E}_k, \forall k$，所以 $x \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overline{E}_k = X$，矛盾！ □

例 2.20 在 l^2 中 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是规范正交基，但不是 Hamel 基，因为 l^2 的 Hamel 基一定不可数（一般地，无穷维 Banach 空间的 Hamel 基都不可数）

证明 假设存在 l^2 的一个可数 Hamel 基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，令 $\mathcal{B} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, X_k \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Span}\{x_1, \cdots, x_n\}$，则 X_k 是闭集，且由 Hamel 基的定义知

$$l^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

由 l^2 是完备的知，它是第二纲集，由 Baire 纲定理知一定 $\exists n_0$, s.t. X_{n_0} 有内点（否则全都没内点则 l^2 是第一纲集，矛盾！），但是 X_{n_0} 没有内点，矛盾！ □

评价 赋范空间的真子空间没有内点

习题 2.21 证明：多项式全体组成的向量空间上赋以任何范数都不是 Banach 空间

纲推理（category argument）

定理 2.22（Banach,1931）集合 $\{C[0,1]$中处处不可微的函数$\}$ 是第二纲集

证明 记 $X = C[0,1], A \overset{\text{def}}{=} \{f \in C[0,1] : f$处处不可微$\}$，由 X 完备知 X 是第二纲集，要证明 $A \subseteq X$ 是第二纲集，只需证明 $X \backslash A$ 是第一纲集

因为 $X\backslash A=\{f\in C[0,1]: f$ 至少在一点处可微$\}$，记

$$A_n=\left\{f\in C[0,1]:\exists t\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right],\text{s.t.}\sup_{h\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|\le n\right\}$$

则 $X\backslash A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，且 $A_n\subseteq A_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}$。我们只需证明每个 A_n 都是疏集

1° 证明 $A_n,\forall n\in\mathbb{N}$ 是闭集：设 $\{f_k\}\subseteq A_n, f_k\overset{C[0,1]}{\to}f$，则 $f_k\rightrightarrows f$，下证 $f\in A_k$，因为对每个 $f_k,\exists t_k\in[0,1-\frac{1}{n}]$, s.t.

$$|f_k(t_k+h)-f_k(t_k)|\le n|h|,\quad\forall h\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]$$

故存在 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ 子列 $\{t_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, s.t. $t_{k_j}\to t_0\in[0,1-\frac{1}{n}]$，所以

$$\begin{aligned}|f(t_0+h)-f(t_0)|&=|f(t_0+h)-f(t_{k_j}+h)|+|f(t_{k_j}+h)-f_{k_j}(t_{k_j}+h)|+|f_{k_j}(t_{k_j}+h)-f_{k_j}(t_{k_j})|\\&+|f_{k_j}(t_{k_j})-f(t_{k_j})|+|f(t_{k_j})-f(t_0)|\overset{\text{def}}{=}I_1+\cdots+I_5\end{aligned}$$

由 f 连续知，可取合适的 k_j, s.t. $I_1,I_5<\frac{|h|\varepsilon}{4}$

由 $f_{k_j}\rightrightarrows f$ 知，可取合适的 k_j, s.t. $I_2,I_4\le||f-f_{k_j}||<\frac{|h|\varepsilon}{4}$

再由上知 $I_3\le n|h|$，因此

$$|f(t_0+h)-f(t_0)|\le(n+\varepsilon)|h|$$

令 $\varepsilon\to0$ 知 $|f(t_0+h)-f(t_0)|\le n|h|$，故 $f\in A_n$

2° 证明 $\mathrm{int}(A_n)=A_n^\circ=\varnothing$，只需证 $\forall f\in A_n,\forall\varepsilon>0,B(f,\varepsilon)\backslash A_n\ne\varnothing$

首先，$\exists p\in\mathcal{P}[0,1]$, s.t. $||f-p||<\frac{\varepsilon}{2}$，记 $M\overset{\text{def}}{=}\max_{t\in[0,1]}|p'(t)|$，则

$$|p(t+h)-p(t)|\le M|h|,\quad\forall h\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right],t\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$$

设 $g\in C[0,1]$ 满足

(1) 分段仿射

(2) $||g||<\frac{\varepsilon}{2}$

(3) 每段斜率的绝对值 $>M+n$

则 $||f-(p+g)||\le||f-p||+||g||<\varepsilon\Longrightarrow p+g\in B(f,\varepsilon)$，但是 $p+g\notin A_n$，因为除去有限个不可微的点外，$|(g+p)'(t)|\ge|g'(t)|-|p'(t)|>(M+n)-M=n$ 即 $A_n^\circ=\varnothing$ □

§ 2.3 三大定理

定理 2.23（一致有界定理,Uniform Boundedness Principle,UBP）设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范空间，$\mathcal{F}\subset\mathscr{L}(X,Y)$ 满足

$$\forall x\in X,\sup_{T\in\mathcal{F}}||Tx||<\infty$$

则 $\sup_{T\in\mathcal{F}}||T||<\infty$，即逐点有界可推一致有界

等价地我们有

$$\sup_{T\in\mathcal{F}}||T||=\infty\Longrightarrow\exists x_0\in X,\text{s.t.}\sup_{T\in\mathcal{F}}||Tx_0||=\infty$$

故我们又称一致有界定理为共鸣定理

证明 对 $\forall n \in \mathbb{N}$，令

$$F_n \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : \sup_{T\in\mathcal{F}} ||Tx|| \le n\} = \bigcap_{T\in\mathcal{F}} \{x \in X : ||Tx|| \le n\}$$

由 T 连续知 $\{x \in X : ||Tx|| \le n\}$ 是闭集，故 F_n 也为闭集；因为 $\forall x \in X, \sup_{T\in\mathcal{F}} ||Tx|| < \infty$，所以

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

另一方面，由 Baire 纲定理知，$\exists n_0, \text{s.t. } F_{n_0}$ 有内点，所以 $\exists B(x_0, r) \subseteq F_{n_0}$，故

$$||T(x_0 + rx)|| \le n_0, \quad \forall x \in B(0,1), \forall T \in \mathcal{F}$$

由三角不等式知 $||T(rx)|| \le n_0 + ||Tx_0|| \le 2n_0$，即 $||Tx|| \le \frac{2n_0}{r}, \forall x \in B(0,1), \forall T \in \mathcal{F}$，再对 $T \in \mathcal{F}$ 取上确界得

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \sup_{x\in B(0,1)} ||Tx|| = \sup_{T\in\mathcal{F}} ||T|| \le \frac{2n_0}{r}$$

（作业中证明过 $||T|| = \sup_{x\in B(0,1)} ||Tx||$） □

定理 2.24（Banach-Steinhaus）设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范空间，$T, T_n \in \mathscr{L}(X,Y), \forall n \in \mathbb{N}, M \overset{\text{dense}}{\subset} X$，则

$$T_n x \to Tx, \forall x \in X \iff \begin{cases} \sup_n ||T_n|| < \infty \\ T_n x \to Tx, \forall x \in M \end{cases}$$

证明 $(\Longrightarrow)$：由 $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 逐点收敛知逐点有界，进而由共鸣定理知它们一致有界

$(\Longleftarrow)$：令 $C \overset{\text{def}}{=} \sup_n ||T_n||$，由 $M \overset{\text{dense}}{\subset} X$ 知 $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in M, \text{s.t.}$

$$||x - y|| < \frac{\varepsilon}{4(||T|| + C)}$$

因此

$$\begin{aligned} ||T_n x - Tx|| &\le ||T_n x - T_n y|| + ||T_n y - Ty|| + ||Ty - Tx|| \\ &\le C||x-y|| + \frac{\varepsilon}{2} + ||T|| \cdot ||x - y|| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

定理 2.25 设 X, Y 是 Banach 空间，$T_n \in \mathscr{L}(X,Y), \forall n \in \mathbb{N}$，如果 $\forall x \in X, \lim_{n\to\infty} T_n x$ 存在，定义

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \lim_{n\to\infty} T_n x \end{aligned}$$

则 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$，且 $||T|| \le \liminf\limits_{n\to\infty} ||T_n||$

习题 2.26 课后习题 2.3.7-2.3.9

定理 2.27（Du Bois-Reymond,1876）记

$$S_nf(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$$

则 $\exists f \in C(\mathbb{T}), \text{s.t. } \{S_nf(0)\}_{n=1}^{\infty}$ 发散

证明 因为 $S_nf(x)$ 有卷积形式

$$S_nf(x) = (f * D_n)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t, \quad D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikt} = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin(\pi t)}$$

我们定义

$$\begin{aligned} T_n : C(\mathbb{T}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto S_nf(0) \end{aligned}$$

（D_n 是实值函数，若 f 是实值函数，则 S_nf 也是实值函数），因为

$$|T_nf| = \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)D_n(t)\mathrm{d}t\right| \le ||D_n||_1||f||$$

所以 $||T_n|| \le ||D_n||_1$，且 $T_n \in C(\mathbb{T})^*$

Claim: $||T_n|| = ||D_n||_1$

Proof Of Claim : 由定义 D_n 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 中只有有限个零点，故 $\mathrm{sgn}(D_n)$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 中只有有限个间断点，故 $\forall \varepsilon > 0, \exists f_\xi \in C(\mathbb{T}), \text{s.t.}$

(1) f_ξ 分段仿射

(2) $||f_\xi|| = 1$

(3) $f_\xi = \mathrm{sgn}(D_n)$，在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\backslash I_\xi$ 上，且 $|I_\xi| < \frac{\varepsilon}{4n+3}$

所以

$$\begin{aligned} |T_nf_\xi| = \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_\xi(t)D_n(t)\mathrm{d}t\right| &\ge \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\backslash I_\xi} |D_n(t)|\mathrm{d}t - \int_{I_\xi} |D_n(t)|\mathrm{d}t \\ &\ge ||D_n||_1 - 2\int_{I_\xi} |D_n(t)|\mathrm{d}t > ||D_n||_1 - \varepsilon \end{aligned}$$

最后一步放缩是因为 $||D_n||_\infty \le 2n+1$，因此

$$||T_n|| \ge \frac{|T_nf_\xi|}{||f_\xi||} > ||D_n||_1 - \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得 $||T_n|| \geq ||D_n||_1$，而

$$||D_n||_1 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin(\pi t)}\right| \mathrm{d}t \geq 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\sin[(2n+1)\pi t]}{\pi t}\right| \mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{x=(2n+1)\pi t} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}(2n+1)} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \to +\infty \text{ as } n \to \infty$$

因此 $\sup\limits_{n\to\infty} ||T_n|| = +\infty$，由共鸣定理知 $\exists f \in C(\mathbb{T}), \text{s.t.} \sup\limits_n |T_n f| = +\infty$，因此

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n f(0)| = +\infty$$

故 $\{S_n f(0)\}_{n=1}^\infty$ 发散 □

Q： 方程 $Tx = y$，若 y 变化很小时，对应的解 x 变化是否很小？（或者说如果 T^{-1} 存在，T^{-1} 的连续性如何）

定理 2.28（开映射定理,OMT）设 X, Y 是 Banach 空间，若 $T \in \mathscr{L}(X,Y), T$ 是满射，则 T 是开映射，即 T 把开集映为开集

我们需要一个引理

引理 2.29 设 X, Y 是 Banach 空间，$T \in \mathscr{L}(X,Y)$，若 T 是满射，则 $\exists \delta > 0, \text{s.t.}\ \delta B_Y \subseteq T(B_X)$，其中 B_X, B_Y 分别为 X, Y 中的单位球

证明 Step 1. 证明 $\exists r > 0, \text{s.t.}\ rB_Y \subseteq \overline{T(B_X)}$

因为 $X = \bigcup\limits_{n=1}^\infty nB_X$，由 T 是满射知

$$Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^\infty T(nB_X) = \bigcup_{n=1}^\infty \overline{T(nB_X)}$$

由 BCT 知 $\exists n_0, \text{s.t.}\ \overline{T(n_0 B_X)}$ 有内点，即 $\exists B_Y(y_0, t) \subseteq \overline{T(n_0 B_X)}$，令 $r = \frac{t}{n_0}$

Claim: $rB_Y \subseteq \overline{T(B_X)}$

Proof Of Claim : 对 $\forall z \in rB_Y$, $y_0 + n_0 z, y_0 - n_0 z \in B_Y(y_0, t) \subseteq \overline{T(n_0 B_X)}$, 所以 $\exists \{x_k\}_{k=1}^\infty, \{x_k'\}_{k=1}^\infty \subseteq n_0 B_X, \text{s.t.}$

$$Tx_k \to y_0 + n_0 z, \quad Tx_{k'} \to y_0 - n_0 z$$

因此

$$T\left(\frac{x_k - x_{k'}}{2n_0}\right) \to z$$

由于 $\frac{x_k - x_{k'}}{2n_0} \in B_X$，所以 $z \in \overline{T(B_X)}$

Step 2. 令 $\delta = \frac{r}{3}$，下证：$\delta B_Y \subset T(B_X)$，即证明 $\forall y \in \delta B_Y, \exists x \in B_X, \text{s.t.}\ Tx = y$

对 $\forall y \in \delta B_Y$，由第一步知 $3y \in rB_Y \subset \overline{T(B_X)}$，因此 $\exists \tilde{x}_1 \in B_X, \text{s.t.}\ ||3y - T\tilde{x}_1|| < \delta$，令 $x_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3}\tilde{x}_1 \in \frac{1}{3}B_X$，则 $||y - Tx_1|| < \frac{\delta}{3}$，令 $y_1 = y - Tx_1$，则 $y_1 \in \frac{\delta}{3}B_Y \Longrightarrow 9y_1 \in rB_Y \subset \overline{T(B_X)}$，同上知 $\exists x_2 \in \frac{1}{3^2}B_X, \text{s.t.}\ ||y_1 - Tx_2|| < \frac{\delta}{3^2}$，归纳构造 x_k, y_k，它们满足 $y_k = y_{k-1} - Tx_k \in \frac{\delta}{3^k}B_Y$，且

$\exists x_{k+1}\in\frac{1}{3^{k+1}}B_X$, s.t. $||y_k-Tx_{k+1}||<\frac{\delta}{3^{k+1}}$，所以

$$\left|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}x_k\right|\right|<\frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}<\frac{1}{2\cdot 3^n},\quad \forall p\in\mathbb{N}$$

因此 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列，由 X 完备知 $\exists x\in X$, s.t. $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\to x$，且当 n 足够大时

$$||x||\le\left|\left|x-\sum_{k=1}^{n}x_k\right|\right|+\left|\left|\sum_{k=1}^{n}x_k\right|\right|<1$$

故 $x\in B_X$，此时

$$\frac{\delta}{3^n}>||y_n||=||y_{n-1}-Tx_n||=\cdots=||y-T(x_1+\cdots+x_n)||$$

即 $T\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\to y$，另一方面 $T\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\to Tx$，所以 $Tx=y$ □

接下来可以证明开映射定理

证明 设 $U\subseteq X$ 是开集，下证明 $T(U)$ 是 Y 的开集，对 $\forall y\in T(U),\exists x\in U$, s.t. $Tx=y$，令 $V\overset{\text{def}}{=}U-x$ 是开集，则 $0_X\in V$ 是 V 的内点，故 $\exists t>0$, s.t. $tB_X\subseteq V$，由引理知 $\exists\delta>0$, s.t. $\delta B_Y\subset T(B_X)\subset\frac{1}{t}T(V)$，进而 0_Y 是 $T(V)$ 的内点，故 $y=Tx$ 是 $T(V)+Tx=T(U)$ 的内点 □

定理 2.30（逆算子定理,Inverse mapping theorem,IMT）设 (X,Y) 为 Banach 空间，若 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$, T 是双射，则 $T^{-1}\in\mathscr{L}(Y,X)$

证明 T^{-1} 连续 $\iff\forall U\subseteq X$ 是开集，它的原像 $(T^{-1})^{-1}(U)=T(U)\subseteq Y$ 是开集，由 T 满射以及开映射定理知 T 是开映射，则 T^{-1} 连续 □

定理 2.31（Lax-Milgram）设 H 是 Hilbert 空间，如果共轭双线性函数 $a(\cdot,\cdot):H\times H\to\mathbb{K}$ 满足

(1) 连续：$\exists C>0$, s.t. $|a(x,y)|\le C||x||\cdot||y||,\forall x,y\in H$

(2) 强制 (coersive)：$\exists\delta>0$, s.t. $\delta||x||^2\le a(x,x),\forall x\in H$

则存在唯一的 $A\in\mathscr{L}(H)$, s.t.

(1) $a(x,y)=\langle x,Ay\rangle$

(2) $A^{-1}\in\mathscr{L}(H)$，且 $||A^{-1}||\le\frac{1}{\delta}$

证明 A 的存在性由定理2.14保证

Step 1.A 是单射

设 $Ay=0$，则 $a(x,y)=\langle x,Ay\rangle=0,\forall x\in H$，取 $x=y$，则 $0=a(y,y)\ge\delta||y||^2\ge0$，故 $y=0$，则 $\text{Ker}(A)=0$，A 单射

Step 2.A 是满射

先证明 $\mathrm{Range}(A)\subset H$ 是闭集，设 $\{Ax_n\}\subset \mathrm{Range}(A)$，且 $Ax_n\to y$，则

$$\begin{aligned}\delta||x_n-x_m||^2&\le a(x_n-x_m,x_n-x_m)=\langle x_n-x_m,Ax_n-Ax_m\rangle\\&\le ||x_n-x_m||\cdot||Ax_n-Ax_m||\end{aligned}$$

进而 $||x_n-x_m||\le\frac{1}{\delta}||Ax_n-Ax_m||\to 0$，故 $\{x_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 列，$\exists x\in H,\text{s.t. }x_n\to x$，由 $A\in\mathscr{L}(H)$ 知 $Ax_n\to Ax$，故 $y=Ax\in\mathrm{Range}(A)$

其次证明 $\mathrm{Range}(A)=H$，由 $\mathrm{Range}(A)$ 是闭集知，H 有直和分解 $H=\mathrm{Range}(A)\oplus\mathrm{Range}(A)^{\perp}$，故只需证明 $\mathrm{Range}(A)^{\perp}=\{0\}$，设 $\langle y,Ax\rangle=0,\forall x\in H$，则 $a(y,x)=0,\forall x\in H$，故 $0=a(y,y)\ge\delta||y||^2$，则 $y=0$，从而 $\mathrm{Range}(A)^{\perp}=\{0\}$

综上 A 是双射，由逆算子定理知 $A^{-1}\in\mathscr{L}(H)$，又因为

$$\delta||x||^2\le a(x,x)=\langle x,Ax\rangle\le||x||\cdot||Ax||$$

故 $||x||\le\frac{1}{\delta}||Ax||,\forall x\in H$，由 A 是双射知 $||A^{-1}y||\le\frac{1}{\delta}||y||,\forall y\in H$，故 $||A^{-1}||\le\frac{1}{\delta}$ □

定理 2.32（范数等价定理）设 $(X,||\cdot||_1),(X,||\cdot||_2)$ 都是 Banach 空间，若 $||\cdot||_2\lesssim||\cdot||_1$，则 $||\cdot||_1\simeq||\cdot||_2$

证明 由条件知 $\exists C>0,\text{s.t. }||x||_2\le C||x||_1,\forall x\in X$，这说明

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}:(X,||\cdot||_1)&\longrightarrow(X,||\cdot||_2)\\x&\longmapsto x\end{aligned}$$

是有界算子，即 $\mathrm{Id}\in\mathscr{L}((X,||\cdot||_1),(X,||\cdot||_2))$，由逆算子定理知 $\mathrm{Id}^{-1}\in\mathscr{L}((X,||\cdot||_2),(X,||\cdot||_1))$，故 $\exists C'>0,\text{s.t. }||x||_1\le C'||x||_2,\forall x\in X$，所以

$$\frac{1}{C'}||x||_1\le||x||_2\le C||x||_1,\quad\forall x\in X$$

故两个范数等价 □

定义 2.33（乘积空间）设有赋范线性空间 $(X,||\cdot||_X),(Y,||\cdot||_Y)$，定义

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\},\quad ||(x,y)||\overset{\text{def}}{=}||x||_X+||y||_Y$$

称 $(X\times Y,||\cdot||_{X\times Y})$ 为乘积空间，不难看出 X,Y 完备 $\Longrightarrow X\times Y$ 完备

定义 2.34（图像）设 $T:X\to Y$ 是线性算子，称

$$\mathrm{Gr}(T)\overset{\text{def}}{=}\{(x,Tx):x\in\mathrm{Dom}(T)\}$$

为 T 的图像，如果 $\mathrm{Gr}(T)$ 是 $X\times Y$ 的闭子空间，则称 T 是闭算子

评价 $\mathrm{Dom}(T)$ 表示 T 的定义域

命题 2.35 T 是闭算子当且仅当若 $\mathrm{Dom}(T) \ni x_k \to x, Tx_k \to y$，则 $x \in \mathrm{Dom}(T), y = Tx$

评价 $\mathrm{Dom}(T)$ 不一定是闭的

例 2.36（无界闭算子）$T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : C[0,1] \to C[0,1]$，其中 $\mathrm{Dom}(T) = C^1[0,1]$，则显然 T 是无界线性算子，下面验证闭性，设 $C^1[0,1] \ni u_k \to u, Tu_k \to v$，则

$$u_k(t) - u_k(0) = \int_0^t u_k'(s)\mathrm{d}s$$

两边同时令 $k \to \infty$ 即可得到

$$u(t) - u(0) = \int_0^t v(s)\mathrm{d}s$$

所以 $u \in C^1[0,1], u' = v$ □

命题 2.37 若 T 有界，$\mathrm{Dom}(T)$ 闭，则 T 是闭算子

证明 见作业题 2.3.4(1) □

定理 2.38（Bounded Linear Transformation,BLT）设 X 是赋范空间，Y 是 Banach 空间，$T \in \mathscr{L}(\mathrm{Dom}(T), Y)$，则存在唯一的 $\tilde{T} \in \mathscr{L}(\overline{\mathrm{Dom}(T)}, Y), \text{s.t. } \tilde{T}|_{\mathrm{Dom}(T)} = T$，且 $||\tilde{T}|| = ||T||$（保范），即 T 总可以延拓为定义在其闭包上的线性算子

证明 对 $\forall x \in \overline{\mathrm{Dom}(T)}, \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Dom}(T), \text{s.t. } x_n \to x$，由 $T \in \mathscr{L}(\mathrm{Dom}(T), Y)$ 知

$$||Tx_n - Tx_m|| \le ||T|| \cdot ||x_n - x_m|| \to 0, \quad \text{as } m, n \to \infty$$

则 $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 中的基本列，由 Y 完备知 $\exists y \in Y, \text{s.t. } Tx_n \to y$，因此可以定义映射

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \overline{\mathrm{Dom}(T)} &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = \lim_{n\to\infty} Tx_n \end{aligned}$$

容易验证 $\tilde{T}$ 是良定且线性的。对 $\forall x \in \overline{\mathrm{Dom}(T)}$

$$||\tilde{T}x|| = ||y|| = \lim_{n\to\infty} ||Tx_n|| \le \lim_{n\to\infty} ||T|| \cdot ||x_n|| = ||T|| \cdot ||x||$$

则 $\tilde{T} \in \mathscr{L}(\overline{\mathrm{Dom}(T)}, Y)$，且 $||\tilde{T}|| \le ||T||$，另一方面，

$$||\tilde{T}|| = \sup_{\substack{x\in\overline{\mathrm{Dom}(T)} \\ x\neq 0}} \frac{||\tilde{T}x||}{||x||} \ge \sup_{\substack{x\in\mathrm{Dom}(T) \\ x\neq 0}} \frac{||Tx||}{||x||} = ||T||$$

因此 $||\tilde{T}|| = ||T||$ □

评价 要证明是保范延拓，我们只需证明延拓后范数不增加即可，因为另一边不等式平凡

推论 2.39 稠密有界的线性算子可唯一、保范数地延拓到全空间（要求像空间完备）

推论 2.40 $\{$有界线性算子$\} \subseteq \{$闭线性算子$\}$

例 2.41 考虑 Fourier 变换

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

***Q*:** 如何定义 L^2 上函数的 Fourier 变换？

因为（Plancherel，先承认它）

$$\begin{cases} L^1 \cap L^2 \overset{\text{dense}}{\subset} L^2 \\ ||\mathcal{F}f||_2 = ||f||_2, \forall f \in L^1 \cap L^2 \end{cases}$$

由 BLT 知，$\mathcal{F}$ 可唯一、保范数地延拓到 L^2 上，也定义为 Fourier 变换

定理 2.42（闭图像定理,Closed Graph Theorem,CGT）设 X, Y 是 Banach 空间，$T : X \to Y$ 是闭线性算子，若 $\mathrm{Dom}(T)$ 是闭集，则 $T \in \mathscr{L}(X, Y)$

证明 因为 $\mathrm{Gr}(T)$ 是 $X \times Y$ 的闭子空间，则 $(\mathrm{Gr}(T), ||\cdot||_{X\times Y})$ 也是 Banach 空间，定义

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathrm{Gr}(T) &\longrightarrow \mathrm{Dom}(T) & \pi_2 : \mathrm{Gr}(T) &\longrightarrow Y \\ (x, Tx) &\longmapsto x & (x, Tx) &\longmapsto Tx \end{aligned}$$

则 π_2 显然有界

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Gr}(T) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathrm{Dom}(T) \arrow[rr, "T"'] & & Y \end{tikzcd}$$

由 π_1 是双射及逆算子定理（$\mathrm{Dom}(T)$ 闭 $\Longrightarrow$ 完备）知，π_1^{-1} 有界，进而 $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ 有界 $\square$

习题 2.43 用等价范数定理证明 CGT

例 2.44（Hellimger-Toeplity）设 H 是 Hilbert 空间，如果 $T : H \to H$ 自伴，即

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \quad \forall x, y \in H$$

则 $T \in \mathscr{L}(H)$

证明 只需证明 T 是闭算子，然后由闭图像定理即证，设 $x_n \to x, Tx_n \to y$，则 $\forall z \in H$

$$\begin{aligned} \langle z, Tx\rangle = \langle Tz, x\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle Tz, x_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle z, Tx_n\rangle = \langle z, y\rangle \end{aligned}$$

因此 $\langle z, Tx-y\rangle = 0, \forall z\in H$，故 $Tx=y$，故 T 是闭算子 □

定义 2.45（次线性泛函、半范数）设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，如果函数 $p: X\to\mathbb{R}$ 满足

(1) 正齐次性：$p(tx)=tp(x), \forall x\in X, \forall t\geq 0$

(2) 次可加性：$p(x+y)\leq p(x)+p(y), \forall x,y\in X$

则称 p 是 X 上的次线性泛函 (Sublinear Functional)，如果 p 还满足齐次性，即

$$p(\lambda x)=|\lambda|p(x), \forall x\in X, \forall \lambda\in\mathbb{K}$$

则称 p 是 X 上的半范数

评价 (1) 次线性泛函是凸函数

$$p(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq p(\alpha x)+p((1-\alpha)y)=\alpha p(x)+(1-\alpha)p(y)$$

(2) 半范数非负：$\forall x\in X, 2p(x)=p(x)+p(-x)\geq p(0)=0$

(3) 如果半范数 p 还满足 $p(x)=0\Longrightarrow x=0$，则 p 是范数

定理 2.46（HBT over $\mathbb{R}$）设 X 是实向量空间，p 是 X 上的次线性泛函，$M\subset X$ 是子空间，f 是 M 上的线性泛函且满足 $f(x)\leq p(x), \forall x\in M$，则 $\exists X$ 上的实线性泛函 F, s.t.

(1) 延拓：$F|_M=f$

(2) 受控：$F(x)\leq p(x), \forall x\in X$

我们需要一个引理

引理 2.47 条件同上，设 $x_0\in X\backslash M$，定义 $\tilde{M}=M\oplus\operatorname{Span}\{x_0\}$，则 $\exists\tilde{f}:\tilde{M}\to\mathbb{R}$, s.t.

(1) 延拓：$\tilde{f}|_M=f$

(2) 受控：$\tilde{f}(x)\leq p(x), \forall x\in\tilde{M}$

证明 对 $\forall x,y\in M$，因为

$$f(x)+f(y)=f(x+y)\leq p(x+y)\leq p(x-x_0)+p(y+x_0)$$

即

$$f(x)-p(x-x_0)\leq p(y+x_0)-f(y), \quad \forall x,y\in M$$

对 LHS 取上确界，RHS 取下确界得 $\sup\limits_{x\in M}[f(x)-p(x-x_0)]\leq\inf\limits_{y\in M}[p(y+x_0)-f(y)]$，所以 $\exists\beta\in\mathbb{R}$, s.t.

$$f(x)-p(x-x_0)\leq\beta\leq p(y+x_0)-f(y), \quad \forall x,y\in M \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

定义

$$\begin{aligned}\tilde{f}:\tilde{M}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x+\lambda x_0&\longmapsto f(x)+\lambda\beta\end{aligned}$$

则 $\tilde{f}$ 线性，且 $\tilde{f}|_M = f$

Claim: $\tilde{f}(x+\lambda x_0) \le p(x+\lambda x_0), \forall x \in M, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Proof Of Claim : 若 $\lambda = 0$，则平凡；若 $\lambda > 0$，取 $x = y = \frac{x}{\lambda}$ 代入 $(*)$ 中得

$$f(\frac{x}{\lambda}) - p(\frac{x}{\lambda} - x_0) \le \beta \le p(\frac{x}{\lambda} + x_0) + f(\frac{x}{\lambda})$$

由正齐次性即

$$f(x) - p(x - \lambda x_0) \le \lambda\beta \le p(x+\lambda x_0) - f(x)$$

因此

$$\begin{cases} \tilde{f}(x-\lambda x_0) = f(x) - \lambda\beta \le p(x-\lambda x_0) \\ \tilde{f}(x+\lambda x_0) = f(x) + \lambda\beta \le p(x+\lambda x_0) \end{cases}$$

若 $\lambda < 0$，则在 $(*)$ 中取 $x = y = -\frac{x}{\lambda}$，同理也有 $\tilde{f}(x+\lambda x_0) \le p(x+\lambda x_0), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ □

接下来可以证明定理2.46

证明 约定术语：对两个线性泛函 g, h，如果

(1) $\mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(h)$

(2) $h|_{\mathrm{Dom}(g)} = g$

则称 h 是 g 的延拓，定义

$$\mathcal{F} = \{g : g\text{是}f\text{的延拓}, g(x) \le p(x), \forall x \in \mathrm{Dom}(g)\}$$

在 $\mathcal{F}$ 上定义偏序

$$g \lesssim h \iff h\text{是}g\text{的延拓}$$

设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathcal{F}$ 的任一全序子集，令 $Y = \bigcup\limits_{g \in \mathscr{C}} \mathrm{Dom}(g)$，则 Y 是 X 的子空间，定义

$$\begin{aligned} G : Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x), \quad \text{若}x \in \mathrm{Dom}(g) \end{aligned}$$

由 $\mathscr{C}$ 全序知 G 良定且是 $\mathscr{C}$ 的上界，由 Zorn 引理知，$\mathcal{F}$ 有极大元 F

Claim: $\mathrm{Dom}(F) = X$

Proof Of Claim : 假设不然，则 $\exists x_0 \in X \backslash \mathrm{Dom}(F)$，由引理2.47知，$\exists \mathrm{Dom}(F) \oplus \mathrm{Span}\{x_0\}$ 上的线性泛函 $\tilde{F}$, s.t. $\tilde{F}|_{\mathrm{Dom}(F)} = F$，故 $\tilde{F}(x) \le p(x), \forall x \in \mathrm{Dom}(F) \oplus \mathrm{Span}\{x_0\}$，故 $\tilde{F} \in \mathcal{F}$ 且 $F \lesssim \tilde{F}$，与 F 的极大性矛盾！ □

定理 2.48 (HBT over $\mathbb{C}$) 设 X 是复向量空间，p 是 X 上的**半范数**，$M \subset X$ 是子空间，$f : M \to \mathbb{C}$ 是 M 上的复线性泛函且满足 $|f(x)| \le p(x), \forall x \in M$，则 $\exists X$ 上的复线性泛函 F, s.t.

(1) $F|_M = f$

(2) $|F(x)| \le p(x), \forall x \in X$

证明 Step 1. 先把 X 看作实向量空间（把数乘的数域从复数域换回实数域），令 $g \overset{\text{def}}{=} \text{Re}f$，则 g 是 M 上的实线性泛函，且

$$g(x) \le |f(x)| \le p(x), \quad \forall x \in M$$

由实 HBT 知，$\exists G : X \to \mathbb{R}$ 实线性，使得 $G|_M = g, G(x) \le p(x), \forall x \in X$

Step 2. 复化：令 $F(x) \overset{\text{def}}{=} G(x) - iG(ix)$，则容易验证

$$\begin{cases} F(x+y) = F(x) + F(y), \forall x, y \in X \\ F(\alpha x) = \alpha F(x), \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

则

$$F((\alpha + i\beta)x) = F(\alpha x) + F(i\beta x) = \alpha F(x) + \beta F(ix)$$

下面证明 $F(ix) = iF(x), \forall x \in X$，这是因为

$$\begin{aligned} F(ix) &= G(ix) - iG(i \cdot ix) = G(ix) - iG(-x) \\ &= G(ix) + iG(x) = i[G(x) - iG(ix)] = iF(x) \end{aligned}$$

则 $F((\alpha + i\beta)x) = (\alpha + i\beta)F(x)$，即 F 满足复线性

Step 3. 证明 $F|_M = f$：对 $\forall x \in M$

$$\begin{aligned} F(x) &= G(x) - iG(ix) = g(x) - ig(ix) \\ &= \text{Re}f(x) - i\text{Re}f(ix) = \text{Re}(f(x)) - i\text{Re}(if(x)) \\ &= \text{Re}f(x) + i\text{Im}f(x) = f(x) \end{aligned}$$

Step 4. 证明 $|F(x)| \le p(x), \forall x \in X$

对 $\forall x \in X$，如果 $F(x) = 0$，则平凡，下面设 $F(x) \ne 0$，则 $\exists \theta \in \mathbb{R}, \text{s.t.}\ |F(x)| = e^{-i\theta}F(x)$（取 $\theta = \arg F(x)$ 即可），因此

$$|F(x)| = F(e^{-i\theta}x) = G(e^{-i\theta}x) - iG(ie^{-i\theta}x) \le p(e^{-i\theta}x) = p(x)$$

上面不等式中，$iG(ie^{-i\theta}x) = 0$，因为 $|F(x)| \in \mathbb{R}$，它的虚部为零 □

定理 2.49（HBT, 最常用的形式）设 X 是赋范空间，$M \subseteq X$ 是子空间，则 $\forall f \in M^*, \exists F \in X^*, \text{s.t.}$

$$\begin{cases} F|_M = f \\ ||F|| = ||f|| \end{cases}$$

即 F 是 f 的保范延拓

证明 定义 $p(x) \overset{\text{def}}{=} ||f|| \cdot ||x||, \forall x \in X$，则 p 是 X 上的半范数，且

$$|f(x)| \le ||f|| \cdot ||x|| = p(x), \quad \forall x \in M$$

由复 HBT 知，$\exists X$ 上的线性泛函 $F,\text{s.t. } F|_M = f, |F(x)| \le p(x), \forall x \in X$，即 $|F(x)| \le ||f|| \cdot ||x||, \forall x \in X$，所以 $F \in X^*$ 且 $||F|| \le ||f||$，另一方面平凡地有 $||f|| \le ||F||$ □

评价 HBT 中的延拓不唯一，考虑 $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1), ||(x_1,x_2)||_1 = |x_1| + |x_2|$，设 $M = \mathbb{R} \times \{0\}$，定义

$$
\begin{aligned}
f : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x, 0) &\longmapsto x
\end{aligned}
$$

则 $f \in M^*$ 且 $||f|| = 1$，对 $t \in (-1,1)$ 定义

$$
\begin{aligned}
F_t : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x_1, x_2) &\longmapsto x_1 + tx_2
\end{aligned}
$$

则 $F_t|_M = f$，且

$$|F_t(x_1,x_2)| = |x_1 + tx_2| \le |x_1| + |tx_2| \le ||(x_1,x_2)||_1$$

因此 $||F_t|| \le 1 = ||f||$，由延拓知 $||F_t|| = ||f||$，故延拓并不唯一

推论 2.50 对 $\forall x_0 \in X, \exists f \in X^*$ 且 $||f|| = 1, \text{s.t. } f(x_0) = ||x_0||$，我们称 f 为在 x_0 处达到 x_0 范数的泛函

证明 令 $M \overset{\text{def}}{=} \text{Span}\{x_0\}$，定义

$$
\begin{aligned}
f_0 : M &\longrightarrow \mathbb{K} \\
\lambda x_0 &\longmapsto \lambda ||x_0||
\end{aligned}
$$

则对 $\forall x = \lambda x_0 \in M, |f_0(x)| = |\lambda| \cdot ||x_0|| = ||x||$，所以 $f_0 \in M^*$ 且 $||f_0|| = 1$，由 HBT 知，存在 $f \in X^*, ||f|| = ||f_0|| = 1, \text{s.t. } f|_M = f_0$，即 $f(x_0) = f_0(x_0) = ||x_0||$ □

推论 2.51 $X \ne \{0\} \Longrightarrow X^* \ne \{0\}$

证明 $\exists 0 \ne x_0 \in X$，由推论2.50知 $\exists f \in X^*$ 且 $||f|| = 1, \text{s.t. } f(x_0) = ||x_0|| \ne 0$ □

推论 2.52 设 $x \ne y \in X$，则 $\exists f \in X^*, \text{s.t. } f(x) \ne f(y)$；特别地若 $\forall f \in X^*, f(x) = f(y)$，则 $x = y$

证明 对 $x_0 = x - y$ 应用推论2.50即可 □

以下是推论2.52的一个应用

例 2.53 设 X 是 Banach 空间，如果 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X, \text{s.t. } \sum\limits_{k=1}^{\infty} ||x_k|| < \infty$（此时我们称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 绝对收敛），则对级数的任意重排，即 $\forall \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 双射，有

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

证明 对 $\forall f \in X^*$，因为

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \le ||f|| \sum_{k=1}^{\infty} ||x_k|| < \infty$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ 是绝对收敛的数项级数，故重排不改变取值，所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_{\sigma(k)}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_k)$，由 f 连续知

$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}\right) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right), \quad \forall f \in X^*$$

由推论2.52知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ □

推论 2.54 对 $\forall x \in X$

$$||x|| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ ||f||=1}} |f(x)|$$

证明 对 $\forall f \in X^*$ 满足 $||f|| = 1$，我们有

$$|f(x)| \le ||f|| \cdot ||x|| = ||x|| \Longrightarrow \sup_{\substack{f \in X^* \\ ||f||=1}} |f(x)| \le ||x||$$

另一方面，由推论2.50知这个上界可以取到！ □

定理 2.55 设 X 是赋范空间，M 是 X 的子空间，如果 $\exists x_0 \in X \backslash M, \text{s.t. } \mathrm{d} = \operatorname{dist}(x_0, M) > 0$，则 $\exists f \in X^*, ||f|| = 1, \text{s.t. } f(M) = \{0\}$ 且 $f(x_0) = d$

证明 令 $\tilde{M} = M \oplus \operatorname{Span}\{x_0\}$，定义

$$f_0 : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x = y + \lambda x_0 \longmapsto \lambda \mathrm{d}$$

则 $f_0(M) = \{0\}, f_0(x_0) = \mathrm{d}$，对 $\forall x = y + \lambda x_0$ with $y \in M, \lambda \in \mathbb{K}$，如果 $\lambda = 0$，则 $f_0(x) = 0$；如果 $\lambda \ne 0$，则

$$\begin{aligned} |f_0(x)| &= |\lambda| \operatorname{dist}(x_0, M) \le |\lambda| \cdot ||x_0 + \frac{y}{\lambda}|| \\ &= ||y + \lambda x_0|| = ||x|| \end{aligned}$$

因此 $f_0 \in \tilde{M}^*$，且 $||f_0|| \le 1$，由 HBT 知，$\exists f \in X^*, \text{s.t.}$

$$\begin{cases} f|_{\tilde{M}} = f_0 \Longrightarrow f(M) = \{0\}, f(x_0) = \mathrm{d} \\ ||f|| = ||f_0|| \Longrightarrow ||f|| \le 1 \end{cases}$$

接下来证明 $||f|| \ge 1$，因为 $\mathrm{d} = \inf\limits_{y \in M} ||x_0 - y||$，则 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in M, \text{s.t. } ||x_0 - y_n|| < \mathrm{d} + \frac{1}{n}$，故

$$\frac{|f(x_0 - y_n)|}{||x_0 - y_n||} = \frac{|f(x_0)|}{||x_0 - y_n||} > \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} + \frac{1}{n}} \to 1, \quad \text{as } n \to \infty$$

故 $\sup\limits_n \frac{|f(x_0-y_n)|}{||x_0-y_n||} \geq 1$，即 $||f|| \geq 1$ □

定理 2.56 设 X 是赋范线性空间，$M \subseteq X, 0 \neq x_0 \in X$，则

$$x_0 \in \overline{\text{Span}(M)} \iff \forall f \in X^* \text{ with } f(M)=0\text{都有}f(x_0)=0$$

证明 $(\Longrightarrow)$: 对 $\forall f \in X^*$ with $f(M)=\{0\}$,由线性性知 $f(\text{Span(M)})=0$,再由连续性知 $f(\overline{\text{Span(M)}})=0$,所以 $f(x_0)=0$

$(\Longleftarrow)$: 假设 $x_0 \notin \overline{\text{Span}(M)}$，则 $\mathrm{d}=\operatorname{dist}(x_0, \overline{\text{Span}(M)})>0$，所以 $\exists f \in X^*, \text{s.t. } f(\overline{\text{Span}(M)})=0$，而 $f(x_0)=\mathrm{d}>0$，矛盾！ □

接下来介绍几何形式的 Hahn-Banach 定理，即凸集分离定理（或超平面分离定理）

定义 2.57（凸、对称、吸收）设 X 是向量空间，$C \subseteq X$

(1) 如果 $\forall x, y \in C, \forall t \in [0,1]$，有 $tx+(1-t)y \in C$，则称 C 是凸集

(2) 如果 $-C=C$，则称 C 是对称的

(3) 如果 $\forall x \in X, \exists t>0, \text{s.t. } \frac{x}{t} \in C$，则称 C 是吸收的

Fact 任一族凸集之交仍为凸集

定义 2.58（凸包）对 $\forall A \subseteq X$，定义 A 是凸包为

$$\operatorname{Conv}(A)=\bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ C\text{凸}}} C$$

它是包含 A 的最小凸集

命题 2.59

$$\operatorname{Conv}(A)=\left\{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k: x_1, \cdots, x_n \in A, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in A \text{ with } \sum_{k=1}^n \lambda_k=1, n \in \mathbb{N}\right\}$$

定义 2.60（Minkowski 泛函）设 X 是向量空间，C 是包含 0 的凸集，定义

$$\begin{aligned} P_C: X &\longrightarrow [0,+\infty] \\ x &\longmapsto \inf\left\{t>0: \frac{x}{t} \in C\right\} \end{aligned}$$

称为 C 的 Minkowski 泛函（度规,gauge）

评价 $P_C(x)=+\infty \iff \{t>0: \frac{x}{t} \in C\}=\varnothing$；若 $t>P_C(x)$，则 $\frac{x}{t} \in C$

命题 2.61 (1) $P_C(0)=0$
(2) 正齐次性：$P_C(tx)=tP_C(x),\forall x\in X,\forall t>0$
(3) 次可加性：$P_C(x+y)\le P_C(x)+P_C(y),\forall x,y\in X$

评价 P_C 不一定是次线性泛函，因为可能取值 $+\infty$

证明 (3). 不妨设 $P_C(x),P_C(y)\in\mathbb{R}$，对 $\forall\varepsilon>0$，记 $\lambda=P_C(x)+\frac{\varepsilon}{2},\mu=P_C(y)+\frac{\varepsilon}{2}$，则 $\frac{x}{\lambda}\in C,\frac{y}{\mu}\in C$，由 C 是凸集知

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\frac{x}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{y}{\mu}\in C$$

所以 $\lambda+\mu\ge P_C(x+y)\Longrightarrow P_C(x+y)\le P_C(x)+P_C(y)+\varepsilon$，令 $\varepsilon\to0$ 即得证 □

定义 2.62（均衡）设 X 是复向量空间，C 是包含 0 的凸集，如果 $\forall x\in C,\forall\theta\in\mathbb{R},e^{i\theta}x\in C$，则称 C 均衡

命题 2.63 复向量空间中每个均衡、吸收的凸集 C，它的 Minkowski 泛函 P_C 是一个半范数

证明 由吸收知，P_C 是次线性泛函（即 $\forall x\in X,P_C(x)<\infty$）；由均衡可知 P_C 满足齐次性：$\frac{x}{\lambda}\in C\Longleftrightarrow\frac{e^{i\theta}x}{\lambda}\in C$，所以 $P_C(e^{i\theta}x)=P_C(x)$，故

$$P_C(\lambda x)=P_C(|\lambda|e^{i\arg\lambda}x)=|\lambda|P_C(e^{i\arg\lambda}x)=|\lambda|P_C(x)$$

则 P_C 是半范数 □

定义 2.64（极大子空间）设 X 是实向量空间，$M\subset X$ 是子空间，称 M 是 X 的极大子空间是指：$\forall X$ 的子空间 Y，若 $M\subsetneqq Y$，则 $Y=X$

命题 2.65

$$M\text{ 是极大子空间}\Longleftrightarrow\exists x_0\in X,\text{s.t. }X=M\oplus\mathrm{Span}\{x_0\}\Longleftrightarrow\dim(X/M)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Codim}(M)=1$$

证明 留作习题 □

定义 2.66（超平面,Hyperplane）定义极大子空间的平移为超平面，即 X 中的超平面可写为 $M+x_0$，其中 M 是 X 的极大子空间，$x_0\in X$

定义 2.67 对 X 上的线性泛函 f 和 $r\in\mathbb{R}$，定义

$$H_f^r=\{x\in X:f(x)=r\}$$

命题 2.68 L 是超平面 $\iff$ $L = H_f^r$ for some f and r

证明 $(\Longleftarrow)$: 注意到 $H_f^0 = \mathrm{Ker}(f)$，下证 H_f^0 极大

取 $x_0 \in X\backslash H_f^0$，则 $f(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0) = 0, \forall x \in X$，进而 $x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \in \mathrm{Ker}(f) = H_f^0, \forall x \in X$，所以 $\forall x \in X$ 有分解 $x = \left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right) + \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0$，且 $x_0 \notin H_f^0$，故为直和分解，即

$$X = H_f^0 \oplus \mathrm{Span}\{x_0\}$$

令 $r = f(x_0)$，则

$$x \in H_f^r \iff f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) = 0 \iff x - x_0 \in H_f^0 \iff x \in H_f^0 + x_0$$

即 $H_f^r = H_f^0 + x_0$

$(\Longrightarrow)$: 设 L 是超平面，则 $\exists$ 极大子空间 M, s.t. $L = M + x_0, x_0 \in X\backslash M, X = M \oplus \mathrm{Span}\{x_0\}$，定义

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y + \lambda x_0 &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

则 $f(M) = 0$ 且 $f(x_0) = 1$，因此 $M \subset H_f^0$，由 M 极大知 $M = H_f^0$，进而 $\forall x \in L, f(x) = f(y) + f(x_0) = 1 \Longrightarrow L = H_f^1$ □

命题 2.69 设有赋范空间 $(X, ||\cdot||)$，则 $f \in X^* \Longrightarrow H_f^r$ 是闭的超平面

定义 2.70（集合被超平面分离）设 X 是实向量空间，$A, B \subset X$，称超平面 H_f^r 分离 A, B 是指

$$\begin{cases} f(x) \le r, \forall x \in A \\ f(y) \ge r, \forall y \in B \end{cases} \iff \sup_{x\in A} f(x) \le r \le \inf_{y \in B} f(y)$$

或

$$\begin{cases} f(x) \ge r, \forall x \in A \\ f(y) \le r, \forall y \in B \end{cases} \iff \sup_{y\in B} f(y) \le r \le \inf_{x \in A} f(x)$$

称 H_f^r 严格分离 A, B 是指

$$\sup_{x\in A} f(x) < r < \inf_{y \in B} f(y)$$

或

$$\sup_{y\in B} f(y) < r < \inf_{x \in A} f(x)$$

定理 2.71 设 X 是实赋范空间，C 是有内点的凸集，则 $x_0 \notin C \Longrightarrow \exists f \in X^*, \exists r \in \mathbb{R}$, s.t. H_f^r 分离 x_0 和 C

证明 考虑对 x_0, C 同时平移，我们可不妨设 0 是 C 的内点，因此 C 是吸收的，故 P_C 是次线性泛函，且由习题 1.5.1 知

$$\begin{cases}\overline{C} = \{x \in X : P_C(x) \leq 1\} \\ P_C(x) < 1 \iff x \in \operatorname{int}(C)\end{cases}$$

由 $x_0 \notin C$ 知 $P_C(x_0) \geq 1$；因为 0 是 C 的内点，所以 $\exists \varepsilon > 0, \text{s.t. } B(0,\varepsilon) \subset C$，所以 $\forall 0 \neq x \in X$，有 $\varepsilon \frac{x}{||x||} \in \overline{B(0,\varepsilon)} \subset \overline{C}$，所以

$$P_C(\varepsilon \frac{x}{||x||}) \leq 1 \Longrightarrow P_C(x) \leq \frac{||x||}{\varepsilon}, \forall x \in X$$

令 $M \stackrel{\text{def}}{=} \text{Span}\{x_0\}$，定义

$$f_0 : M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x = \lambda x_0 \longmapsto \lambda P_C(x_0)$$

则 $f_0(x) \leq P_C(x), \forall x \in M$，由实 HBT 知，存在 X 上线性泛函 $f, \text{s.t.}$

$$\begin{cases} f|_M = f_0 \Longrightarrow f(x_0) = f_0(x_0) = P_C(x_0) \geq 1 \\ f(x) \leq P_C(x), \forall x \in X \Longrightarrow f(x) \leq P_C(x) \leq 1, \forall x \in C\end{cases}$$

因此 H_f^1 分离 x_0 和 C，最后证明 $f \in X^*$，因为 $f(x) \leq P_C(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}||x||$，代入 $-x$ 得 $-f(x) = f(-x) \leq \frac{1}{\varepsilon}||x||$，因此 $|f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}||x||, \forall x \in X$，即 $f \in X^*$ □

评价 上面的构造知 $r = f_0(x_0) = P_C(x_0)$

定理 2.72（HST1,Hyperplane Seperation Theorem）设 X 是实赋范空间，A 是开凸集，B 是凸集，则 $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \exists H_f^r$ 闭且分离 A, B

证明 定义 $C = A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$，则我们有如下观察

(1) C 是凸集（自行验证）

(2) C 是开集，因为 $C = \bigcup\limits_{y \in B}(A - y)$，而每个 $A - y$ 均为开集

(3) $0 \notin C$，因为 $A \cap B = \varnothing$

由定理2.71知，存在 H_f^0（由上一个定理的证明知 $r = P_C(0) = 0$）分离 C 和 0，即 $\exists f \in X^*, \text{s.t. } \sup\limits_{z \in C} f(z) \leq 0 = f(0)$，又因为

$$\sup_{z \in C} f(z) = \sup_{\substack{x \in A \\ y \in B}}[f(x) - f(y)] \xlongequal{A \cap B = \varnothing} \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{y \in B} f(y) \leq 0$$

所以取 $r = \frac{1}{2}(\sup\limits_{x \in A} f(x) + \inf\limits_{y \in B} f(y))$，则

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq r \leq \inf_{y \in B} f(y)$$

即 H_f^r 分离 A, B，且由 $f \in X^*$ 知 H_f^r 是闭子空间 $H_f^0 = \text{Ker}(f)$ 的平移，故它是闭的 □

定理 2.73（HST2）设 X 是实赋范空间，A 是闭凸集，B 是紧凸集，若 $A\cap B=\varnothing$，则 $\exists H_f^r$ 闭集，严格分离 A,B

证明 由 A 紧 B 闭，$A\cap B=\varnothing$ 知 $\operatorname{dist}(A,B)>0$，取 $\varepsilon=\frac{1}{4}\operatorname{dist}(A,B)$，定义

$$A_\varepsilon=A+B(0,\varepsilon),\quad B_\varepsilon=B+B(0,\varepsilon)$$

可以验证 $A_\varepsilon,B_\varepsilon$ 是开凸集，且 $A_\varepsilon\cap B_\varepsilon=\varnothing$，由 HST1 知 $\exists f\in X^*,\exists r\in\mathbb{R},\text{s.t.}$

$$\sup_{x\in A_\varepsilon} f(x)\le r\le \inf_{y\in B_\varepsilon} f(y)$$

因此

$$f(x+\varepsilon z)\le r\le f(y+\varepsilon z),\quad \forall x\in A,y\in B,z\in B(0,1)$$

所以 $r\le f(y)+\varepsilon f(z)$，故 $-f(z)\le\frac{f(y)-r}{\varepsilon}$，取上极限得 $\sup\limits_{z\in B(0,1)} f(-z)\le\frac{f(y)-r}{\varepsilon}$，故 $r\le f(y)-\varepsilon||f||,\forall y\in B$，对 $f(y)$ 取下极限得

$$r\le\inf_{y\in B} f(y)-\varepsilon||f||<\inf_{y\in B} f(y)$$

同理

$$\sup_{x\in A} f(x)<\sup_{x\in A} f(x)+\varepsilon||f||\le r$$

□

评价 $||f||=\sup\limits_{z\in B(0,1)} f(z)$

推论 2.74（Ascoli）设 X 是实赋范空间，C 是闭凸集，若 $x_0\notin C$，则 $\exists f\in X^*,\exists r\in\mathbb{R},\text{s.t.}$

$$\sup_{x\in C} f(x)<r<f(x_0)$$

证明 在定理2.73中取 $A=C,B=\{x_0\}$ 即可 □

推论 2.75 设 X 是实赋范空间，$M\subseteq X$ 是子空间，则

$$\overline{M}\ne X\iff \exists f\in X^*,f\ne 0,\text{s.t. } f(M)=\{0\}$$

等价地有

$$\overline{M}=X\iff f\in X^* \text{ with } f(M)=\{0\} \text{ implies } f=0$$

证明 $(\Longleftarrow)$：显然

$(\Longrightarrow)$：由条件知 $\exists x_0\in X\backslash\overline{M}$，由推论2.74（$\overline{M}$ 是闭凸集）知，$\exists f\in X^*,\exists r\in\mathbb{R},\text{s.t.}$

$$\sup_{x\in\overline{M}} f(x)<r<f(x_0)$$

因为向量空间上的非零线性泛函无界，所以由 $\sup\limits_{x\in\overline{M}} f(x) < r$ 知 $f|_M = 0$，所以 $f(M) = 0$，故 $0 < r < f(x_0) \Longrightarrow f \neq 0$ □

推论 2.76（Mazur）设 X 是实赋范空间，C 是开凸集，F 是线性子流形（即线性子空间的平移），若 $C \cap F = \varnothing$，则 $\exists H_f^r$ 闭集，使得

(1) $F \subset H_f^r$

(2) $\sup\limits_{x\in C} f(x) \leq r$

证明 设 $F = M + x_0$，其中 $M \subseteq X$ 是子空间，由 HST1 知，$\exists f \in X^*, \exists s \in \mathbb{R}$, s.t. $\sup\limits_{x\in C} f(x) \leq s \leq \inf\limits_{y\in F} f(y) = \inf\limits_{z\in M} f(z) + f(x_0)$ 因此 $\inf\limits_{z\in M} f(z) \geq s - f(x_0)$，故（非零线性泛函无界）$f|_M = 0, M \subseteq H_f^0$，所以 $F \subseteq H_f^r$，其中 $f(x_0) = r$，此时

$$\sup_{x\in C} f(x) \leq s \leq f(x_0) = r$$

□

定义 2.77（支撑超平面）称超平面 H_f^r 是凸集 C 在 x_0 处的支撑超平面是指

(1) C 完全落在 H_f^r 的一侧

(2) $x_0 \in \overline{C} \cap H_f^r$

即 $\sup\limits_{x\in C} f(x) \leq r = f(x_0)$ 或 $\inf\limits_{x\in C} f(x) \geq r = f(x_0)$

定理 2.78 设 X 是实赋范空间，C 是有内点的闭凸集，则在 $\forall x_0 \in \partial C$ 处均有 C 的一个支撑超平面

证明 令 $E \overset{\text{def}}{=} \text{int}(C)$，则 E 为开凸集，令 $F = \{x_0\}$（它是零维线性子流形），由推论2.76知，$\exists f \in X^*, \exists r \in \mathbb{R}$, s.t. $\sup\limits_{x\in E} f(x) \leq r$，且 $\{x_0\} \subset H_f^r$，由 f 连续知 $\sup\limits_{x\in C} f(x) \leq r = f(x_0)$ □

例 2.79 $C = \overline{B(0,r)}$，则 $\forall x_0 \in \partial B(0,r)$ 处均有 C 的支撑超平面

证明 由推论2.50知，$\exists f \in X^*, ||f|| = 1$, s.t. $f(x_0) = ||x_0|| = r$，而

$$\sup_{x\in C} f(x) \leq ||f|| \sup_{x\in C} ||x|| = r$$

□

§ 2.4 对偶空间

本节考虑对偶空间 $X^* = \mathscr{L}(X, \mathbb{K})$，其中范数定义为算子范数 $||\cdot||_{X\to\mathbb{K}}$

首先回忆 Riesz 表示定理

定理 2.80（Riesz 表示定理）设 H 是 Hilbert 空间，则

(1) $\forall y \in H, f_y(x) \overset{\text{def}}{=} \langle x, y\rangle, \forall x \in H$，则 $f_y \in H^*$ 且 $||f_y|| = ||y||$

(2) $\forall f \in H^*, \exists! y_f \in H, \text{s.t. } f = f_{y_f}$
所以
$$J : H \longrightarrow H^*$$
$$y \longmapsto f_y$$
给出了一个从 H 到 H^* 的线性等距同构，因此我们记 $H^* = H$（等距同构意义下）

Q： $(L^p)^*$ 是什么样的？

定理 2.81（Riesz）设 $1 < p < \infty$，则（在等距同构意义下）
$$(L^p)^* = L^{p'}, \quad p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p = 1 \end{cases}$$
即
(1) $\forall g \in L^{p'}$，定义
$$\Lambda_g(f) \overset{\text{def}}{=} \int fg, \quad f \in L^p$$
则 $\Lambda_g \in (L^p)^*$，且 $||\Lambda_g|| = ||g||_{p'}$
(2) $\forall \Lambda \in (L^p)^*, \exists! g \in L^{p'}, \text{s.t. } \Lambda = \Lambda_g$
也就是说
$$J : L^{p'} \longrightarrow (L^p)^*$$
$$g \longmapsto \Lambda_g$$
是线性等距同构

评价 如果 $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ 是 σ-有限的（即 Ω 可写为可数个有限测度集合之并），则以上结论对 $p = 1$ 也成立；特别地我们有
$$(L^p[0,1])^* = L^{p'}[0,1], \forall 1 \le p < \infty$$

此外，我们暂时还不能回答 $(L^\infty)^*$ 是什么样的（详情可以参考吉田耕《泛函分析》第九章）

我们先证明 $\Omega = [0,1]$ 的情形

证明 (1) Case 1. $1 < p < \infty$
对 $\forall f \in L^p$，由 Holder 不等式
$$|\Lambda_g(f)| = \left| \int_{[0,1]} fg \mathrm{d}x \right| \le ||g||_{p'} ||f||_p$$
所以 $\Lambda_g \in (L^p)^*$，且 $||\Lambda_g|| \le ||g||_{p'}$

Claim: $||\Lambda_g|| \ge ||g||_{p'}$

Proof Of Claim：定义 $f_0 \overset{\text{def}}{=} |g|^{p'-1}\text{sgn}(g)$，则
$$\begin{cases} |f_0|^p = |g|^{(p'-1)p} = |g|^{p'} \overset{\text{同时积分}}{\Longrightarrow} ||f_0||_p^p = ||g||_{p'}^{p'} \\ f_0 g = |g|^{p'} \overset{\text{同时积分}}{\Longrightarrow} \Lambda_g(f_0) = ||g||_{p'}^{p'} \end{cases}$$

因此

$$\frac{|\Lambda_g(f_0)|}{||f_0||_p}=\frac{||g||_{p'}^{p'}}{||g||_{p'}^{\frac{p'}{p}}}=||g||_{p'}^{p'(1-\frac{1}{p})}=||g||_{p'}$$

所以

$$||\Lambda_g||\geq\frac{|\Lambda_g(f_0)|}{||f_0||_p}=||g||_{p'}$$

Case 2. $p=1$

对 $\forall f\in L^1$，因为

$$|\Lambda_g(f)|=\left|\int_{[0,1]}fg\mathrm{d}x\right|\leq||g||_\infty||f||_1$$

所以 $\Lambda_g\in(L^1)^*$ 且 $||\Lambda_g||\leq||g||_\infty$

Claim: $||\Lambda_g||\geq||g||_\infty$

Proof Of Claim : 对 $\forall k\in\mathbb{N}$，定义

$$E_k=\left\{t\in[0,1]:|g(t)|>||\Lambda_g||+\frac{1}{k}\right\},\quad f_k=\chi_{E_k}\mathrm{sgn}(g)$$

则

$$||f_k||_1=\int_{E_k}|\mathrm{sgn}(g)|\mathrm{d}x\leq m(E_k)$$

因为

$$||\Lambda_g||\cdot m(E_k)\geq||\Lambda_g||\cdot||f_k||_1\geq|\Lambda_g(f_k)|=\left|\int_{[0,1]}\chi_{E_k}\mathrm{sgn}(g)g\mathrm{d}x\right|=\int_{E_k}|g|\mathrm{d}x\geq\left(||\Lambda_g||+\frac{1}{k}\right)m(E_k)$$

所以 $m(E_k)=0,\forall k\in\mathbb{N}$，又因为

$$\{t\in[0,1]:|g(t)|\geq||\Lambda_g||\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$$

它是零测集，由本性上确界的定义知 $||g||_\infty\leq||\Lambda_g||$

(2) 我们需要一个技术性引理

引理 2.82 设 $g\in L^1$，如果 $\exists C>0,\text{s.t.}\ \left|\int_{[0,1]}fg\mathrm{d}x\right|\leq C||f||_p,\forall f\in L^\infty$，则 $g\in L^{p'}$，且 $||g||_{p'}\leq C$

Proof of Lemma：Case 1. $1<p<\infty$

考虑对 g 截断，令 $g_k\overset{\text{def}}{=}g\chi_{\{|g|\leq k\}}$，其中 $\{|g|\leq k\}=\{t\in[0,1]:|g(t)|\leq k\}$，令 $f_k\overset{\text{def}}{=}|g_k|^{p'-1}\mathrm{sgn}(g_k)$，则

$$\begin{cases}f_k\in L^\infty\\ ||f_k||_p^p=\int_{[0,1]}|g_k|^{(p'-1)p}\mathrm{d}x=||g_k||_{p'}^{p'}\\ f_kg=f_kg_k=|g_k|^{p'}\end{cases}$$

对第三行两边同时积分得

$$||g_k||_{p'}^{p'}=\left|\int_{[0,1]}f_kg\mathrm{d}x\right|\leq C||f_k||_p=C||g_k||_{p'}^{\frac{p'}{p}}$$

因此 $||g_k||_{p'} \le C$，注意到 $g_k \to g$，由 Fatou 引理知

$$\int_{[0,1]} |g|^{p'} \mathrm{d}x \le \liminf_{k\to\infty} \int_{[0,1]} |g_k|^{p'} \mathrm{d}x \le C^{p'}$$

所以 $g \in L^{p'}$，且 $||g||_{p'} \le C$

Case 2. $p=1$，留做习题 □

现在回到 (2) 的证明，我们先考虑示性函数的情形，再由逼近推广到一般的函数

Step 1. 令

$$G(t) \overset{\text{def}}{=} \Lambda(\chi_{[0,t]}), t \in [0,1]$$

Claim: $G \in AC[0,1]$

Proof Of Claim : 对 $\forall \varepsilon > 0$，令 $\delta \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\varepsilon}{||\Lambda||}\right)^p$，对任意有限个互不相交的区间 $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k=1}^N \subset [0,1]$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^N (\beta_k - \alpha_k) < \delta$，令

$$f \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N \operatorname{sgn}(G(\beta_k) - G(\alpha_k))\chi_{(\alpha_k,\beta_k]}$$

则积分得 $||f||_p^p \le \sum\limits_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) < \delta$，且

$$\begin{aligned}
\Lambda(f) &= \sum_{k=1}^N \operatorname{sgn}(G(\beta_k) - G(\alpha_k)) \left[\Lambda(\chi_{[0,\beta_k]}) - \Lambda(\chi_{[0,\alpha_k]})\right] \\
&= \sum_{k=1}^N \operatorname{sgn}(G(\beta_k) - G(\alpha_k)) \left[G(\beta_k) - G(\alpha_k)\right] \\
&= \sum_{k=1}^N |G(\beta_k) - G(\alpha_k)|
\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=1}^N |G(\beta_k) - G(\alpha_k)| = |\Lambda(f)| \le ||\Lambda|| \cdot ||f||_p \le ||\Lambda|| \cdot \delta^{\frac{1}{p}} = \varepsilon$$

因此 $G \in AC[0,1]$，由微积分基本定理，$\exists g \in L^1, \text{s.t. } G(t) = \int_0^t g(s)\mathrm{d}s, t \in [0,1]$，所以

$$\Lambda(\chi_{[0,t]}) = G(t) = \int_{[0,1]} \chi_{[0,t]} g \mathrm{d}x$$

由线性性知，$\Lambda(\varphi) = \int_{[0,1]} \varphi g \mathrm{d}x$，其中 φ 为任意阶梯函数

Step 2.$g \in L^{p'}$

对 $\forall f \in L^\infty \subset L^p$，令 $M \overset{\text{def}}{=} ||f||_\infty + 1$，所以 $\exists \varphi_k$ 阶梯函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, s.t.

$$\begin{cases} \varphi_k \to f \text{ a.e} \\ ||\varphi_k||_\infty \le M \end{cases}$$

又因为 $|\varphi_k-f|^p\le(2M)^p$，由控制收敛定理知

$$\int_{[0,1]}|\varphi_k-f|^p\mathrm{d}x\to 0 \text{ as } k\to\infty$$

所以

$$|\Lambda(f)-\Lambda(\varphi_k)|\le||\Lambda||\cdot||f-\varphi_k||_p\to 0 \text{ as } k\to\infty$$

因此 $\Lambda(f)=\lim\limits_{k\to\infty}\Lambda(\varphi_k)$，再由控制收敛定理知（控制函数为 Mg）

$$\int_{[0,1]}fg\mathrm{d}x\overset{\text{DCT}}{=}\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]}\varphi_k g\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\Lambda(\varphi_k)=\Lambda(f)$$

所以

$$\left|\int_{[0,1]}fg\mathrm{d}x\right|=|\Lambda(f)|\le||\Lambda||\cdot||f||_p,\forall f\in L^\infty$$

由引理知 $g\in L^{p'}$ 且 $||g||_{p'}\le||\Lambda||$

Step 3.$\Lambda(f)=\int_{[0,1]}fg\mathrm{d}x,\forall f\in L^p$

对 $\forall\varepsilon>0,\exists\varphi$ 阶梯函数（$\{\text{阶梯函数}\}\overset{\text{dense}}{\subset}L^p$），使得

$$||f-\varphi||_p<\frac{\varepsilon}{2(||\Lambda||+||g||_{p'})}$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\Lambda(f)-\int_{[0,1]}fg\mathrm{d}x\right|&\le|\Lambda(f)-\Lambda(\varphi)|+\left|\Lambda(\varphi)-\int_{[0,1]}\varphi g\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{[0,1]}\varphi g\mathrm{d}x-\int_{[0,1]}fg\mathrm{d}x\right|\\&=||\Lambda||\cdot|||f-\varphi||_p+0+||g||_{p'}\cdot||f-\varphi||_p<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$ 即有 $\Lambda(f)=\int_{[0,1]}fg\mathrm{d}x,\forall f\in L^p$ □

评价 利用放缩及 Holder 不等式可证明 $L^\infty[0,1]\subset L^p[0,1]\subset L^1[0,1]$（将 $[0,1]$ 换为任意有限测度空间均成立）

定理 2.83

$$L^1[0,1]\subsetneqq(L^\infty[0,1])^*$$

证明 (1) $L^1[0,1]\subset(L^\infty[0,1])^*$

对 $\forall g\in L^1$，因为

$$|\Lambda_g(f)|=\left|\int_{[0,1]}fg\mathrm{d}x\right|\le||g||_1||f||_\infty,\quad\forall f\in L^\infty$$

所以 $\Lambda_g\in(L^\infty)^*$，且 $||\Lambda_g||\le||g||_1$

(2) $L^1\neq(L^\infty)^*$

因为 $C[0,1]$ 是 $L^\infty[0,1]$ 的闭子空间（因为对 $\forall f\in C[0,1],||f||_\infty=\operatorname*{esssup}\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|=||f||_{C[0,1]}$），所以 $\exists f_0\in L^\infty[0,1]\backslash C[0,1],\text{s.t. d}=\text{dist}\,(f_0,C[0,1])>0$，由定理2.55知，$\exists\Lambda\in(L^\infty[0,1])^*$ with

$||\Lambda|| = 1, \text{s.t.}$

$$\begin{cases} \Lambda(C[0,1]) = \{0\} \\ \Lambda(f_0) = \mathrm{d} \end{cases}$$

假设 $\exists g \in L^1, \text{s.t. } \Lambda = \Lambda_g, \text{s.t. } \Lambda(f) = \int_{[0,1]} fg\mathrm{d}x, \forall f \in L^\infty[0,1]$，则

$$\int_{[0,1]} fg\mathrm{d}x = 0, \forall f \in C[0,1]$$

又因为 $C[0,1] \overset{\text{dense}}{\subset} L^1[0,1]$，所以 $\exists\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C[0,1], \text{s.t.}$

$$||f_k - \mathrm{sgn}(g)||_1 \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

由 Riesz 定理知（L^p 收敛 $\Longrightarrow$ 依测度收敛 $\Longrightarrow$ 存在子列 a.e 收敛），存在子列 $f_{n_k} \to \mathrm{sgn}(g)$ a.e $x \in [0,1]$，由控制收敛定理知

$$\int_{[0,1]} |g|\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k g\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow g = 0 \text{ a.e } x \in [0,1]$$

所以 $\Lambda = 0$，但与 $\Lambda(f_0) = \mathrm{d} > 0$ 矛盾！ □

Q： $C[0,1]^* = ?$

定义 2.84（有界变差函数空间）回忆实分析中的有界变差函全体为 $BV[a,b] \overset{\text{def}}{=} \{f : V_a^b(f) < \infty\}$，其中

$$V_a^b(f) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\Delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b} \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

我们在 $BV[a,b]$ 上定义范数

$$||f||_{BV} \overset{\text{def}}{=} |f(a)| + V_a^b(f)$$

可以验证 $(BV[a,b], ||\cdot||_{BV})$ 是 Banach 空间，继续定义

$$BV_0[a,b] \overset{\text{def}}{=} \{f \in BV[a,b] : f\text{在}(a,b)\text{右连续}, f(a) = 0\}$$

可以验证 $BV_0[a,b]$ 是 $BV[a,b]$ 的闭子空间，进而是 Banach 空间

定义 2.85（Riemann-Stieltjes 积分）设 f, g 是 $[a,b]$ 上的实函数，$I \in \mathbb{R}$，对 $[a,b]$ 的划分 $\Delta : t_0 < \cdots < t_n$，任取 $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n, \xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$，定义

$$\sigma(\Delta, \xi) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})]$$

如果 $\sigma(\Delta, \xi) \to I$ as $||\Delta|| \to 0$（与 Δ 的分法和 ξ 的选取无关），则称

$$I = \int_a^b f\mathrm{d}g$$

为 f 关于 g 的 Riemann-Stieltjes 积分

评价 若 $f \in C[a,b], g \in BV[a,b]$，则 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 存在

定理 2.86（Riesz）

$$C[a,b]^* = BV_0[a,b]$$

也就是说

(1) $\forall g \in BV_0[a,b], \Lambda_g(f) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f\mathrm{d}g, f \in C[a,b]$，则 $\Lambda_g \in C[a,b]^*$

(2) $\forall \Lambda \in C[a,b]^*, \exists! g \in BV_0[a,b], \text{s.t. } \Lambda = \Lambda_g$，且 $||g||_{BV} = ||\Lambda||$

定义 2.87（二次对偶）定义

$$X^{**} = (X^*)^* = \mathscr{L}(X^*, \mathbb{K})$$

称为 X 的二次对偶 (bidual) 或第二共轭空间

对 $\forall x \in X$，定义映射

$$\begin{aligned} x^{**} : X^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

则

$$|x^{**}(f)| = |f(x)| \le ||x|| \cdot ||f||, \quad \forall f \in X^*$$

所以 $x^{**} \in X^{**}$，且 $||x^{**}|| \le ||x||$

另一方面，由 HBT 的推论2.50，$\exists f_0 \in X^*$ with $||f_0|| = 1, \text{s.t. } x^{**}(f_0) = f_0(x) = ||x||$，故

$$||x^{**}|| \ge ||x^{**}(f_0)|| = ||x||$$

因此 $||x^{**}|| = ||x||$，故

$$\begin{aligned} i : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto x^{**} \end{aligned}$$

是线性等距嵌入（等距蕴含单射），称为 X 到 X^{**} 的自然映射或自然嵌入

定义 2.88（自反空间）如果自然映射 $i : X \to X^{**}, x \mapsto x^{**}$ 满射（从而是线性等距同构），则称 X 是自反的，记为 $X^{**} = X$

评价 存在非自反的 Banach 空间 X，使得 X 与 X^{**} 线性等距同构 (James,1950)

例 2.89 (1) 不完备的空间一定不自反

(2) 有限维赋范空间自反（课本习题 2.5.4）

(3) Hilbert 空间自反（留作习题）

定理 2.90 当 $1 < p < \infty$ 时，L^p 自反

证明 即证明自然映射是满射，即 $\forall \Lambda \in (L^p)^{**}, \exists u \in L^p, \text{s.t. } \Lambda(f) = u^{**}(f) = f(u), \forall f \in (L^p)^*$，又因为

$$\begin{aligned} J: L^{p'} &\longrightarrow (L^p)^* \\ v &\longmapsto f_v : u \mapsto \int uv\mathrm{d}x \end{aligned}$$

是线性等距同构

$$\begin{array}{ccc} L^{p'} & \xrightarrow{J} & (L^p)^* \\ & \searrow^{\varphi} & \downarrow{\scriptstyle\Lambda} \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

令 $\varphi = \Lambda \circ J$，则 $\varphi \in (L^{p'})^*$，又因为 $(L^{p'})^* = L^p$，所以 $\exists ! u \in L^p, \text{s.t. } \varphi = f_u$，即 $\varphi(v) = \int vu\mathrm{d}x, \forall v \in L^{p'}$，则对 $\forall f \in (L^p)^*$，令 $v_f \overset{\text{def}}{=} J^{-1}(f) \in L^{p'}$，即 v_f 是 f 的表示向量，则

$$\Lambda(f) = \Lambda(J \circ J^{-1}(f)) = (\Lambda \circ J)(v_f) = \varphi(v_f) = \int v_f u\mathrm{d}x = f(u)$$

□

定理 2.91 $C[a,b]$ 不自反

证明 假设 $C[a,b]$ 自反，则对 $\forall \Lambda \in C[a,b]^{**}, \exists u \in C[a,b], \text{s.t. } \Lambda(f) = f(u), \forall f \in C[a,b]^*$，又因为 $f \in C[a,b]^*$，所以 $\exists ! v_f \in BV_0[a,b], \text{s.t.}$

$$f(u) = \int_a^b u\mathrm{d}v_f$$

且 $||v_f||_{BV} = ||f||$，令 $c = \frac{a+b}{2}$，定义

$$\begin{aligned} F_c : C[a,b]^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto v_f(c+0) - v_f(c-0) \end{aligned}$$

则

$$|F_c(f)| = |v_f(c+0) - v_f(c-0)| \leq V_a^b(v_f) = ||v_f|| = ||f||$$

所以 $F_c \in C[a,b]^{**}$，由反证假设知，$\exists u_c \in C[a,b], \text{s.t. } F_c(f) = f(u_c) = \int_a^b u_c\mathrm{d}v_f, \forall f \in C[a,b]^*$，令

$$v(t) = \int_a^t u_c(s)\mathrm{d}s$$

则 $v \in BV_0[a,b]$，令 $J: BV_0[a,b] \to C[a,b]^*, v \mapsto f_v, f_v(u) = \int_a^b u\mathrm{d}v$，由 v 连续知 $F_c(f_v) = 0$，所以

$$0 = F_c(f_v) = \int_a^b u_c\mathrm{d}v = \int_a^b u_c^2\mathrm{d}t \Longrightarrow u_c \equiv 0$$

所以 $F_c = 0$，这与 F_c 的定义矛盾！ □

定理 2.92（Banach）X^* 可分 $\Longrightarrow X$ 可分

评价 逆命题不成立，之后我们会证明 L^1 可分但是 L^∞ 不可分

证明 Step 1. 证明 X^* 中的单位球面 S_1^* 可分

由 X^* 可分知，$\exists \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{dense}}{\subset} X^*$，不妨设 $f_n \neq 0, \forall n$，令

$$g_n = \frac{f_n}{||f_n||}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

对 $\forall g \in S_1^*, \exists \{f_n\}$ 的子列 $f_{n_k} \to g$，所以

$$\begin{aligned} ||g - g_{n_k}|| &\leq ||g - f_{n_k}|| + ||f_{n_k} - g_{n_k}|| \\ &= ||g - f_{n_k}|| + \left|\left| f_{n_k} - \frac{f_{n_k}}{||f_{n_k}||} \right|\right| \\ &= ||g - f_{n_k}|| + \big| ||f_{n_k}|| - 1 \big| \to 0 \end{aligned}$$

所以 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{dense}}{\subset} S_1^*$

Step 2. 证明 $\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X, ||x_n|| = 1, \text{s.t.}$

$$\overline{\text{Span}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})} \overset{\text{dense}}{\subset} X$$

注意到 $\sup\limits_{\substack{x\in X \\ ||x||=1}} |g_n(x)| = ||g_n|| = 1$，则 $\exists x_n \in X, ||x_n|| = 1, \text{s.t.} \ |g_n(x_n)| > \frac{1}{2}$

Claim: $\overline{\text{Span}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})} = X$

Proof Of Claim : 假设不然，则 $\exists x_0 \in X \backslash \overline{\text{Span}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})}$，由 HBT 知，$\exists f \in X^*, ||f|| = 1, \text{s.t.}$

$$f(\overline{\text{Span}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})}) = 0, f(x_0) = \text{dist}\,(x_0, \overline{\text{Span}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})}) > 0$$

则

$$\begin{aligned} ||g_n - f|| &= \sup_{\substack{x\in X \\ ||x||=1}} |g_n(x) - f(x)| \\ &\geq |g_n(x_n) - f(x_n)| = |g_n(x_n)| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

因为 $f \in S_1^*$，但是上式与 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{dense}}{\subset} S_1^*$ 矛盾！

Step 3. 证明 $\text{Span}^{\mathbb{Q}}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \overset{\text{dense}}{\subset} X$

留作习题 □

定理 2.93 当 $1 \leq p < \infty$ 时，$L^p[0,1]$ 可分

证明

$$\left\{ \sum_{k=1}^{2^n} r_k \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})} \middle| r_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}_0 \right\} \overset{\text{dense}}{\subset} L^p[0,1]$$

□

评价 具体过程可参考 Wheeden-Zyymund,Real Analysis，此处仅介绍

定理 2.94 $L^\infty[0,1]$ 不可分

证明 反证，假设 $\exists\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{dense}}{\subset} L^\infty[0,1]$，对 $\forall t\in(0,1),\exists f_{n_t}\in B(\chi_{[0,t]},\frac{1}{3})$，而

$$\text{dist}\,(\chi_{[0,t]},\chi_{[0,s]}) = ||\chi_{[0,t]}-\chi_{[0,s]}||_\infty = 1, \forall t\neq s$$

因此对不同的 t，$B(\chi_{[0,t]},\frac{1}{3})$ 互不相交，则我们有单射

$$\begin{aligned}\varphi:(0,1)&\longrightarrow\mathbb{N}\\ t&\longmapsto n_t\end{aligned}$$

因此 $(0,1)$ 与 $\mathbb{N}$ 的某个子集一一对应，这显然矛盾！ □

定理 2.95 $L^1[0,1]$ 不自反

证明 留作习题，提示：你可能会用到如下结论

$$\begin{cases} X^*\text{可分} \Longrightarrow X\text{可分}\\ L^1[0,1]\text{可分}\\ L^\infty[0,1]\text{不可分}\end{cases}$$

□

接下来介绍对偶算子

定理 2.96（对偶算子）设有赋范空间 $(X,||\cdot||_X),(Y,||\cdot||_Y),T\in\mathscr{L}(X,Y)$，则 $\exists T^*\in\mathscr{L}(Y^*,X^*)$, s.t.

$$(T^*f)(x) = f(Tx),\quad \forall f\in Y^*,\forall x\in X$$

我们称 T^* 为 T 的对偶算子，进而映射

$$\begin{aligned}*:\mathscr{L}(X,Y)&\longrightarrow\mathscr{L}(Y^*,X^*)\\ T&\longmapsto T^*\end{aligned}$$

是线性等距嵌入

证明 设 $f\in Y^*$，定义

$$\begin{aligned}\Lambda_f:X&\longrightarrow\mathbb{K}\\ x&\longmapsto f(Tx)\end{aligned}$$

则

$$|\Lambda_f(x)| = |f(Tx)| \le ||f|| \cdot ||Tx|| \le ||f|| \cdot ||T|| \cdot ||x||, \forall x \in X$$

故 $\Lambda_f \in X^*, ||\Lambda_f|| \le ||T|| \cdot ||f||$，定义

$$\begin{aligned} T^* : Y^* &\longrightarrow X^* \\ f &\longmapsto \Lambda_f \end{aligned}$$

则 T^* 线性，且

$$||T^* f|| = ||\Lambda_f|| \le ||T|| \cdot ||f||, \quad \forall f \in Y^*$$

故 $T^* \in \mathscr{L}(Y^*, X^*)$，且 $||T^*|| \le ||T||$

接下来证明 $||T^*|| \ge ||T||$，对 $\forall x \in X$，我们要证 $||Tx|| \le ||T^*|| \cdot ||x||$，不妨设 $Tx \ne 0$，则 $\exists f \in Y^*, ||f|| = 1, \text{s.t. } f(Tx) = ||Tx||$，故

$$||Tx|| = |f(Tx)| = |(T^* f)(x)| \le ||T^* f|| \cdot ||x|| \le ||T^*|| \cdot ||f|| \cdot ||x|| = ||T^*|| \cdot ||x||$$

进而 $||T|| \le ||T^*||$ □

例 2.97 设有线性映射 $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, x \mapsto Ax, A$ 是 $m \times n$ 阶矩阵，则

$$\begin{aligned} T^* : (\mathbb{K}^m)^* &\longrightarrow (\mathbb{K}^n)^* \\ y &\longmapsto \overline{A^T} y \end{aligned}$$

证明留作习题

定理 2.98（Pettis）自反空间的闭子空间自反

证明 设 X 是自反空间，Y 是 X 的闭子空间，只需证明 $\forall z \in Y^{**}, \exists y \in Y, \text{s.t. } z(f) = f(y), \forall f \in Y^*$（即 $z = y^{**}$），定义算子

$$\begin{aligned} T : X^* &\longrightarrow Y^* \\ f &\longmapsto f|_Y \end{aligned}$$

则 $T \in \mathscr{L}(X^*, Y^*)$，则存在对偶算子 $T^* \in \mathscr{L}(Y^{**}, X^{**}), \text{s.t.}$

$$(T^* z)(f) = z(Tf), \quad \forall f \in X^*$$

由 X 自反知自然映射 $i : X \to X^{**}, x \mapsto x^{**}$ 是满射，又因为 $T^* z \in X^{**}$，则 $\exists y \in X, \text{s.t. } T^* z = y^{**}$，即

$$(T^* z)(f) = y^{**}(f) = f(y), \quad \forall f \in X^*$$

Claim: $y \in Y$

Proof Of Claim : 假设不然，则 $\mathrm{d} = \mathrm{dist}\,(y, Y) > 0$，进而 $\exists \tilde{f} \in X^*, \text{s.t.}$

$$\tilde{f}(Y) = \{0\}, \quad \tilde{f}(y) = \mathrm{dist}\,(y, Y) > 0$$

则 $T\tilde{f} = \tilde{f}|_Y = 0$，另一方面 $\tilde{f}(y) = (T^* z)(\tilde{f}) = z(T\tilde{f}) = 0$，矛盾！

Claim: $z(f) = f(y), \forall f \in Y^*$

对 $\forall f \in Y^*$，由 HBT 知 $\exists F \in X^*$, s.t. $F|_Y = f$，则

$$f = TF \Longrightarrow z(f) = z(TF) = (T^*z)(F) = F(y) \xlongequal{y \in Y} f(y)$$

□

§ 2.5 弱收敛

定义 2.99（弱收敛）设有赋范空间 $(X, ||\cdot||)$，称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ 弱收敛于 $x_0 \in X$ 是指

$$f(x_n) \to f(x_0), \quad \forall f \in X^*$$

记为 $x_n \overset{w}{\to} x_0$ 或 $x_n \rightharpoonup x_0$，并称 x_0 为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的弱极限

命题 2.100 弱极限（如果存在）唯一

证明 设 $x_n \overset{w}{\to} x_0, y_n \overset{w}{\to} y_0$，即 $f(x_n) \to f(x_0), f(x_n) \to f(y_0), \forall f \in X^*$，即 $f(x_0) = f(y_0), \forall f \in X^*$，由 HBT 的推论知 $x_0 = y_0$ □

评价 范数拓扑（依范数收敛）下的收敛称为强收敛

命题 2.101 强收敛 $\Longrightarrow$ 弱收敛

证明 若 $||x_n - x|| \to 0$，则

$$|f(x_n) - f(x_0)| \le ||f|| \cdot ||x_n - x_0|| \to 0, \forall f \in X^*$$

□

例 2.102 在 $L^2(\mathbb{T})$ 中

$$e_k(t) \overset{\text{def}}{=} e^{-2\pi i k t}, \quad t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$$

我们有 $e_k \overset{w}{\to} 0$ as $|k| \to \infty$

证明 对 $\forall f \in L^2(\mathbb{T})^*, \exists! v \in L^2(\mathbb{T})$, s.t.

$$f(u) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u(t)v(t)\mathrm{d}t, \quad u \in L^2(\mathbb{T})$$

则

$$f(e_k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} v(t)e^{-2\pi i k t}\mathrm{d}t = \hat{v}(k)$$

由 Riemann-Lebesgue 引理知 $f(e_k) = \hat{v}(k) \to 0$，即 $e_k \overset{w}{\to} 0$ □

定理 2.103 若 $\dim X < \infty$，则 X 中的强收敛与弱收敛等价

证明 设 $\dim X = m, X$ 有一组基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$，由强收敛蕴含弱收敛知，只需证明弱收敛蕴含强收敛，假设 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，设 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k^{(n)} e_k, \forall n \in \mathbb{N}, x_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^{(0)} e_k$，由课本习题 2.4.7 知，$\exists X^*$ 中的一组基 $\{f_1, \cdots, f_m\}$, s.t. $f_j(e_k) = \delta_{jk}$，由弱收敛知 $f_j(x_n) \to f_j(x_0), 1 \le j \le m$，因为 $f_j(x_n) = \alpha_j^{(n)}, f_j(x_0) = \alpha_j^{(0)}$，所以 $\alpha_j^{(n)} \to \alpha_j^{(0)}, 1 \le j \le m$，进而

$$||x_n - x_0||_\infty \to 0 \text{ where } ||x||_\infty = \max_{1 \le j \le m} |\alpha_j|$$

由于有限维空间中范数均等价，所以 $||x_n - x_0|| \to 0$ □

评价 逆命题不成立，即弱收敛与强收敛等价并不能推出 $\dim X < \infty$，反例：Schur 空间，见汪林《泛函分析中的反例》P76

定理 2.104（Mazur）若 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，则 $x_0 \in \overline{\mathrm{Conv}(\{x_n\}_{n=1}^\infty)}$

证明 记 $C \overset{\text{def}}{=} \overline{\mathrm{Conv}(\{x_n\}_{n=1}^\infty)}$，假设 $x_0 \notin C$，由 Ascoli 定理知，$\exists f \in X^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}$, s.t.

$$\sup_{x \in C} f(x) < \alpha < f(x_0)$$

特别地有 $f(x_n) < \alpha < f(x_0), n = 1, 2, \cdots$，这说明 $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$，这与 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 矛盾！ □

定义 2.105（泛函的弱 $*$ 收敛）称 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ 弱 $*$ 收敛于 $f \in X^*$，若

$$f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in X$$

记为 $f_n \xrightarrow{w^*} f$

命题 2.106 在 X^* 中，强收敛 $\Longrightarrow$ 弱收敛 $\Longrightarrow$ 弱 $*$ 收敛

证明 设 $f_n \xrightarrow{w} f$，则 $\Lambda(f_n) \to \Lambda(f), \forall \Lambda \in X^{**}$，则对 $\forall x \in X, x^{**}(f_n) \to x^{**}(f)$，即

$$\forall x \in X, f_n(x) \to f(x) \Longrightarrow f_n \xrightarrow{w^*} f$$

□

命题 2.107 X 自反 $\Longrightarrow X^*$ 中的弱 $*$ 收敛与弱收敛等价

证明 只需注意到在自反空间 X 中，对 $\forall x \in X$

$$x^{**}(f_n) \to x^{**}(f) \iff f_n(x) \to f(x)$$

□

定理 2.108 设有赋范空间 $(X, ||\cdot||)$，则

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \iff \begin{cases} \sup\limits_n ||x_n|| < \infty \text{（从而弱收敛序列有界）} \\ \exists \mathcal{F} \overset{\text{dense}}{\subset} X^*, \text{s.t. } f(x_n) \to f(x_0), \forall f \in \mathcal{F} \end{cases}$$

证明 因为

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow{w} x_0 &\iff f(x_n) \to f(x_0), \forall f \in X^* \\ &\iff x_n^{**}(f) \to x_0^{**}(f), \forall f \in X^* \end{aligned}$$

由 Banach-Steinhaus 定理2.24，这等价于（另一方向平凡）

$$\begin{cases} \sup\limits_n ||x_n^{**}|| < \infty \\ \exists \mathcal{F} \overset{\text{dense}}{\subset} X^*, \text{s.t. } x_n^{**}(f) \to x_0^{**}(f), \forall f \in \mathcal{F} \end{cases}$$

由 X 自反知，自然映射 $i : X \to X^{**}$ 是等距同构，翻译回来即等价于

$$\begin{cases} \sup\limits_n ||x_n|| < \infty \text{（从而弱收敛序列有界）} \\ \exists \mathcal{F} \overset{\text{dense}}{\subset} X^*, \text{s.t. } f(x_n) \to f(x_0), \forall f \in \mathcal{F} \end{cases}$$

□

定理 2.109 设 X 是 Banach 空间，$f_n, f \in X^*$，则

$$f_n \xrightarrow{w^*} f \iff \begin{cases} \sup\limits_n ||f_n|| < \infty \\ \exists M \overset{\text{dense}}{\subset} X, \text{s.t. } f_n(x) \to f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

定义 2.110（弱列紧、弱 $*$ 列紧）设有赋范空间 $(X, ||\cdot||)$，称 $M \subset X$ 弱列紧，是指 M 中每个序列都有弱收敛子列；称 $\mathcal{F} \subset X^*$ 弱 $*$ 列紧是指 $\mathcal{F}$ 中每个序列都有弱 $*$ 收敛的子列

定理 2.111（可分 Banach-Alaoglu 定理）X 可分 $\implies X^*$ 中的有界集弱 $*$ 列紧

评价 一般 Banach-Alaoglu 定理：X^* 中的闭单位球弱 $*$ 紧（本课程没有定义弱 $*$ 紧，这里仅介绍）

证明 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ 有界，令 $C = \sup\limits_n |||f_n||$，则 X 可分 $\implies \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \overset{\text{dense}}{\subset} X$，对任意固定的 $m, \{f_n(x_m)\}_{n=1}^\infty$ 是有界数列，它有收敛子列，用对角线法可取得 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 的子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, s.t. $\forall m$, $\{f_{n_k}(x_m)\}_{k=1}^\infty$ 收敛

Claim: $\exists f \in X^*, \text{s.t. } f_{n_k} \xrightarrow{w^*} f$

Proof Of Claim：$\forall x\in X,\forall\varepsilon>0,\exists x_m\in\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\text{s.t.}\ ||x-x_m||<\frac{\varepsilon}{3C}$，再取 k 充分大使得 $|f_{n_{k+p}}(x_m)-f_{n_k}(x_m)|<\frac{\varepsilon}{3}$，则

$$\begin{aligned}|f_{n_{k+p}}(x)-f_{n_k}(x)|&\le|f_{n_{k+p}}(x)-f_{n_{k+p}}(x_m)|+|f_{n_{k+p}}(x_m)-f_{n_k}(x_m)|+|f_{n_k}(x_m)-f_{n_k}(x)|\\&\le C||x-x_m||+\frac{\varepsilon}{3}+C||x_m-x||<\varepsilon\end{aligned}$$

所以 $f(x)\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)$ 存在，故

$$|f(x)|\le\sup_n|f_n(x)|\le\sup_n||f_n||\cdot||x||$$

故 $f\in X^*,f_{n_k}\overset{w^*}{\to}f$ □

定理 2.112（Eberlein-Smulian）
(1) 自反空间中的有界集弱列紧
(2) 自反空间中的闭单位球弱自列紧

证明 (1). 只需证明 $\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ with $\sup\limits_n||x_n||<\infty$ 均有子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 弱收敛

令 $Y\overset{\text{def}}{=}\overline{\text{Span}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})}$，则 Y 是 X 的闭子空间，由 pettis 定理知 Y 也是自反的，由 Y 的构造知 Y 是可分的（有可数稠密子集 $\text{Span}^{\mathbb{Q}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$），则由 $i:Y\to Y^{**}$ 是等距同构知 Y^{**} 也可分，由 Banach 定理2.92知 Y^* 可分，再由可分 Banach-Alaoglu 定理2.111知 Y^{**} 中的有界集弱 $*$ 列紧，由 $i:Y\to Y^{**}$ 等距知，$\{x_n^{**}\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，则 $\{x_n^{**}\}_{n=1}^{\infty}$ 有弱 $*$ 收敛子列 $\{x_{n_k}^{**}\}_{k=1}^{\infty}$, s.t.

$$x_{n_k}^{**}\overset{w^*}{\to}x_0^{**}\text{ for some }x_0\in Y$$

则对 $\forall f\in Y^*$，因为 $f(x_{n_k})=x_{n_k}^{**}(f)\to x_0^{**}(f)=f(x_0)$，则对 $\forall F\in X^*,F(x_{n_k})=(F|_Y)(x_{n_k})\to(F|_Y)(x_0)=F(x_0)$，所以 $x_{n_k}\overset{w}{\to}x_0$

(2). 设 $\sup\limits_n||x_n||\le1$，由 (1) 知 $\exists x_0\in X$ 以及子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, s.t. $x_{n_k}\overset{w}{\to}x_0$，由 HBT 知，$\exists f\in X^*,||f||=1,\text{s.t.}\ f(x_0)=||x_0||$，故

$$||x_0||=|f(x_0)|=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})\le\sup_n|f(x_{n_k})|\le\sup_k||x_{n_k}||\le1$$

故 x_0 也在闭单位球中 □

§ 2.6 谱理论

定义 2.113（Banach 代数）设 X 是复 Banach 空间，$A,B\in\mathscr{L}(X)$，我们定义 A,B 的乘法

$$(AB)(x)\overset{\text{def}}{=}A(Bx),\quad\forall x\in X$$

容易验证这样定义的乘法具有如下性质
(1) $(AB)C=A(BC)$
(2) $A(B+C)=AB+AC,(A+B)C=AC+BC$

(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \forall \lambda \in \mathbb{C}$
(4) $AI = A = IA$
(5) $||AB|| \le ||A|| \cdot ||B||$
我们称 $\mathscr{L}(X)$ 在这样定义的乘法下为 Banach 代数

评价 由数学归纳法可得，对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 有

$$||A^n|| \le ||A||^n$$

定义 2.114（可逆）称 $A \in \mathscr{L}(X)$ 可逆是指 $\exists B \in \mathscr{L}(X)$, s.t.

$$AB = I = BA$$

定义 2.115（谱）定义

$$\sigma(A) \overset{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A\text{不可逆}\}$$

称为 A 的谱 (Spectrum)，$\sigma(A)$ 中的元素称为谱点；定义

$$\rho(A) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \backslash \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A\text{可逆}\}$$

称为 A 的预解集 (Resolvent set)，$\rho(A)$ 中的元素称为 A 的正则值

定义 2.116（特征值）如果 $\lambda \in \mathbb{C}$, s.t.

$$\mathrm{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\}$$

（即 $\lambda I - A$ 不是单射，故不可逆）即 $\exists 0 \neq x \in X$, s.t. $Ax = \lambda x$，则称 λ 是 A 的特征值，记 A 的特征值全体

$$\sigma_p(A) = \{\lambda : \lambda\text{是}A\text{的特征值}\}$$

为 A 的点谱

例 2.117 $X = \mathbb{C}^n, A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$，则由线性代数的知识

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \neq \varnothing, \quad \#\sigma(A) \le n$$

例 2.118 定义 $C[0,1]$ 上的乘法算子

$$A : \mathbb{C}[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}[0,1]$$
$$u(t) \longmapsto tu(t)$$

则 $\sigma_p(A) = \varnothing$

证明 假设 $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, s.t. $(\lambda I - A)u = 0$，即 $(\lambda - t)u(t) = 0, t \in [0,1]$，则由连续性知只能是 $u \equiv 0$，因此不存在这样的 λ □

对于给定的 $\lambda \in \mathbb{C}$，我们有以下两种情况

Case 1. $\mathrm{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\}$，则 $\lambda \in \sigma_p(A)$

Case 2. $\mathrm{Ker}(\lambda I - A) = \{0\}$，我们按 A 是否满射分为以下情形

- $\mathrm{Range}(\lambda I - A) \neq X, \overline{\mathrm{Range}(\lambda I - A)} = X$，此时称 λ 为 A 的连续谱点，记 $\lambda \in \sigma_c(A)$
- $\mathrm{Range}(\lambda I - A) \neq X, \overline{\mathrm{Range}(\lambda I - A)} \neq X$，此时称 λ 为 A 的剩余谱点，记 $\lambda \in \sigma_r(A)$
- $\mathrm{Range}(\lambda I - A) = X$，此时 $\lambda I - A$ 即单又满，故它可逆，此时 $\lambda \in \rho(A)$

因此我们将 A 的谱 $\sigma(A)$ 分解为不交并

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A)$$

例 2.119 考虑例2.118，对乘法算子 A，我们有

$$\sigma(A) = \sigma_r(A) = [0, 1]$$

证明 Step 1. 证明 $\mathbb{C} \backslash [0, 1] \subset \rho(A)$

对 $\forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash [0, 1]$，下证 $\lambda I - A$ 可逆，考虑 $\lambda I - A$ 的形式，我们可以定义

$$T : C[0, 1] \longrightarrow C[0, 1]$$
$$u(t) \longmapsto \frac{1}{\lambda - t} u(t)$$

所以 $(\lambda I - A)T = I = T(\lambda I - A)$，下证 T 是有界算子，因为

$$||Tu|| \leq \max_{t \in [0,1]} \frac{1}{|\lambda - t|} \cdot ||u|| \Longrightarrow T \in \mathscr{L}(X)$$

即 $T = (\lambda I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$

Step 2. 证明 $[0, 1] \subset \sigma_r(A)$

设 $\lambda \in [0, 1]$，对 $\forall v \in \mathrm{Range}(\lambda I - A)$，则 $\exists u \in C[0, 1], \text{s.t. } v = (\lambda I - A)(u) = (\lambda - t)u(t), t \in [0, 1]$，所以 $v(\lambda) = 0$，因此

$$1 \notin \overline{\mathrm{Range}(\lambda I - A)}, \quad (1\text{是打到}1\text{的常值函数})$$

即 $\overline{\mathrm{Range}(\lambda I - A)} \neq X, \lambda \in \sigma_r(A)$，所以

$$[0, 1] \subset \sigma_r(A) \subset \sigma(A) \subset [0, 1]$$

即 $\sigma_r(A) = [0, 1]$ □

例 2.120 定义 $L^2[0, 1]$ 上的乘法算子

$$A : L^2[0, 1] \longrightarrow L^2[0, 1]$$
$$u(t) \longmapsto tu(t)$$

则 $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0, 1]$

证明

Step 1. 证明 $\mathbb{C}\backslash[0,1] \subset \rho(A)$

对 $\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash[0,1]$，同2.119构造 T，证明 $T \in \mathscr{L}(X), T = (\lambda I - A)^{-1}$ 即可

Step 2. 证明 $\forall \lambda \in [0,1], \mathrm{Range}(\lambda I - A) \neq X$

Claim: 常值函数 $1 \notin \mathrm{Range}(\lambda I - A)$

Proof Of Claim : 假设 $1 \in \mathrm{Range}(\lambda I - A)$，则 $\exists u \in L^2[0,1]$, s.t. $(\lambda - t)u(t) = 1$，因此 $u(t) = \frac{1}{\lambda - t} \in L^2[0,1]$，但是 $t = \lambda$ 是瑕点，这与它平方可积矛盾！

Step 3. 证明对 $\forall \lambda \in [0,1], \mathrm{Range}(\lambda I - A) \overset{\text{dense}}{\subset} X$

对 $\forall v \in L^2[0,1], \forall \varepsilon > 0$，令

$$u_\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda - t} v(t) \chi_{[0,1]\backslash(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}$$

则 $u_\varepsilon \in L^2[0,1]$，又因为

$$\mathrm{Range}(\lambda I - A) \ni (\lambda I - A)u_\varepsilon = v\chi_{[0,1]\backslash(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} \overset{L^2}{\to} v \text{ as } \varepsilon \to 0^+$$

（这是因为 $\int_{[0,1]} |v - v\chi_{[0,1]\backslash(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}|^2 \mathrm{d}x = \int_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} |v|^2 \mathrm{d}x \to 0$ as $\varepsilon \to 0^+$），进而 $v \in \overline{\mathrm{Range}(\lambda I - A)}$

结合 Step 2,3 得

$$[0,1] \subset \sigma_c(A) \subset \sigma(A) \subset [0,1]$$

即 $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0,1]$ □

定义 2.121（预解式）算子值函数

$$\begin{aligned} R_\lambda(A) : \rho(A) &\longrightarrow \mathscr{L}(X) \\ \lambda &\longmapsto (\lambda I - A)^{-1} \end{aligned}$$

称为 A 的预解式

引理 2.122 设 $T \in \mathscr{L}(X), ||T|| < 1$，则

(1) $(I - T)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$

(2) $(I - T)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k$，称为 Von-Neumann 级数

(3) $||(I - T)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||T||}$

证明 (1). 定义部分和 $S_n \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} T^n$，则

$$\begin{aligned} ||S_{n+p} - S_n|| &= \left|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} T^k\right|\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} ||T^k|| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} ||T||^k < \frac{||T||^{n+1}}{1 - ||T||} \end{aligned}$$

所以 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{L}(X)$ 中的基本列，由 $\mathscr{L}(X)$ 的完备性知，$\exists S \in \mathscr{L}(X)$, s.t.

$$||S_n - S|| \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

Claim: $S = (I-T)^{-1}$

Proof Of Claim :

$$||S_n(I-T) - I|| = ||I - T^{n+1} - I|| \le ||T||^{n+1} \to 0$$

所以

$$\begin{aligned} ||S(I-T) - I|| &= ||S(I-T) - S_n(I-T)|| + ||S_n(I-T) - I|| \\ &\le ||S - S_n|| \cdot ||I-T|| + ||S_n(I-T) - I|| \to 0 \text{ as } n \to \infty \end{aligned}$$

因此 $S(I-T) = I$，同理可证 $(I-T)S = I$

(2).

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

(3).

$$||S|| \le \sup_n ||S_n|| \le \frac{1}{1 - ||T||}$$

□

定理 2.123 $\rho(A)$ 是 $\mathbb{C}$ 中开集（$\iff \sigma(A)$ 是 $\mathbb{C}$ 中闭集）

证明 设 $\lambda_0 \in \rho(A)$，则 $\lambda_0 I - A$ 可逆，下证 λ_0 是 $\rho(A)$ 的内点，因为

$$\begin{aligned} \lambda I - A &= \lambda_0 I - A + (\lambda - \lambda_0) I \\ &= (\lambda_0 I - A)[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}] \end{aligned}$$

当 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||(\lambda_0 I - A)^{-1}||} = \frac{1}{||R_\lambda(A)||}$ 时，由引理2.122知

$$B \stackrel{\text{def}}{=} [I + (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}(A)]^{-1} \in \mathscr{L}(X)$$

此时有

$$(\lambda I - A)^{-1} = B R_{\lambda_0}(A) \in \mathscr{L}(X)$$

即 $\mathbb{D}\left(\lambda_0, \frac{1}{||R_{\lambda_0}(A)||}\right) \subset \rho(A)$（$\mathbb{D}$ 表示圆盘） □

定理 2.124 设 $A \in \mathscr{L}(X)$，则 $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{D}(0, ||A||)}$

证明 这等价于证明 $\mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}(0, ||A||)} \subset \rho(A)$，这又等价于证明 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ with $|\lambda| > ||A||$，有

$$(\lambda I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$$

因为 $|\lambda| > ||A||$ 时有 $||\frac{A}{\lambda}|| < 1$，由引理知 $\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$，乘以 λ 即 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ □

推论 2.125 $\sigma(A)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集

证明 由定理2.123,2.124立得 □

定义 2.126（算子值全纯）设 X 是复 Banach 空间，$\Omega \subset \mathbb{C}$ 是开集，称算子值函数

$$T : \Omega \longrightarrow \mathscr{L}(X)$$
$$\lambda \longmapsto T_\lambda$$

在 $\lambda_0 \in \Omega$ 全纯是指，$\exists$ 邻域 $U \ni \lambda_0$, s.t. $\forall \lambda \in U, \exists S_\lambda \in \mathscr{L}(X)$, s.t.

$$\left|\left|\frac{T_{\lambda+z} - T_\lambda}{z} - S_\lambda\right|\right| \to 0 \text{ as } |z| \to 0$$

引理 2.127（R.I=Resolvent Identity, 第一预解式公式）

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A), \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(A)$$

证明

$$\begin{aligned} R_\lambda(A) &= (\lambda I - A)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)(\mu I - A)^{-1} \\ &= (\lambda I - A)^{-1}[(\lambda I - A) + (\mu - \lambda)I](\mu I - A)^{-1} \\ &= R_\mu(A) + (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A) \end{aligned}$$

□

定理 2.128 $\lambda \mapsto R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ 是 $\rho(A)$ 上的算子值全纯函数

证明 Step 1. 连续性

对 $\forall \lambda_0 \in \rho(A)$

$$\lambda I - A = (\lambda_0 I - A)[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}]$$

则当 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||R_{\lambda_0}(A)||}$ 时，$I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}$ 可逆，对上式同时取逆得

$$R_\lambda(A) = [I + (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]^{-1}R_{\lambda_0}(A)$$

当 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{2||R_{\lambda_0}(A)||}$ 时，我们有估计

$$\begin{aligned} ||R_\lambda(A)|| &\le ||[I + (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]^{-1}|| \cdot ||R_{\lambda_0}(A)|| \\ &\le \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}||R_{\lambda_0}(A)|| = 2||R_{\lambda_0}(A)|| \end{aligned}$$

由第一预解式公式2.127，当 $|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{2||R_{\lambda_0}(A)||}$ 时

$$\begin{aligned}||R_\lambda(A)-R_{\lambda_0}(A)|| &\le |\lambda-\lambda_0|\cdot||R_\lambda(A)||\cdot||R_{\lambda_0}(A)|| \\ &= 2||R_{\lambda_0}(A)||^2|\lambda-\lambda_0|\end{aligned}$$

因此连续性得证

Step 2. 全纯性

$$\left|\left|\frac{R_\lambda(A)-R_{\lambda_0}(A)}{\lambda-\lambda_0}+R_{\lambda_0}(A)^2\right|\right| = ||-R_\lambda(A)R_{\lambda_0}(A)+R_{\lambda_0}(A)^2|| \le ||R_{\lambda_0}(A)||\cdot||R_\lambda(A)-R_{\lambda_0}(A)|| \to 0 \text{ as } \lambda\to\lambda_0$$

□

定理 2.129（Gelfand, 谱不空定理）设 $A\in\mathscr{L}(X)$，则 $\sigma(A)\neq\varnothing$

证明 反证，假设 $\sigma(A)=\varnothing$，则 $\rho(A)=\mathbb{C}$，进而 $\lambda\mapsto R_\lambda(A)$ 是算子值整函数，对 $\forall f\in\mathscr{L}(X)^*$，定义

$$u_f(\lambda)\overset{\text{def}}{=}f(R_\lambda(A)),\quad \forall\lambda\in\mathbb{C}$$

则 u_f 是复值整函数，这是因为

$$\left|\frac{u_f(\lambda)-u_f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}+f(R_{\lambda_0}(A))^2\right| \le ||f||\cdot\left|\left|\frac{R_\lambda(A)-R_{\lambda_0}(A)}{\lambda-\lambda_0}+R_{\lambda_0}(A)^2\right|\right| \to 0 \text{ as } \lambda\to\lambda_0$$

当 $|\lambda|>2||A||$ 时

$$||R_\lambda(A)||=\left|\left|\frac{1}{\lambda}(I-\frac{A}{\lambda})^{-1}\right|\right| \le \frac{1}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{1-||\frac{A}{\lambda}||}=\frac{1}{|\lambda|-||A||}<\frac{1}{||A||}$$

另一方面由连续性知 $||R_\lambda(A)||$ 在 $\overline{D(0,2||A||)}$ 上有界，所以 $\exists C>0,\text{s.t.}$

$$||R_\lambda(A)||\le C,\forall\lambda\in\mathbb{C}$$

故

$$|u_f(\lambda)|=|f(R_\lambda(A))|\le||f||\cdot||R_\lambda(A)||\le C||f||$$

进而 u_f 是有界整函数，由 Liouville 定理知 u_f 是常值函数，故

$$f(R_\lambda(A))=f(R_\mu(A)),\forall\lambda,\mu\in\mathbb{C},\forall f\in\mathscr{L}(X)^*$$

由 HBT 的推论知 $R_\lambda(A)=R_\mu(A),\forall\lambda,\mu\in\mathbb{C}$，由第一预解式公式2.127

$$R_\lambda(A)-R_\mu(A)=(\mu-\lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A),\quad\forall\lambda,\mu\in\rho(A)$$

此时 LHS 为零算子，而 RHS 为可逆算子，矛盾！ □

定义 2.130（谱半径）对 $\forall A \in \mathscr{L}(X)$，定义

$$r_\sigma(A) \overset{\text{def}}{=} \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

称为 A 的谱半径

定理 2.131（Gelfand, 谱半径公式）

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$$

证明 Step 1. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$ 存在

令 $r = \inf\limits_n ||A^n||^{\frac{1}{n}}$，由下极限的定义知

$$\liminf_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} \geq r$$

另一方面，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \text{s.t.}\ ||A^m||^{\frac{1}{m}} < r + \varepsilon$，对 $\forall n \in \mathbb{N}$，由带余除法知 $n = p_n m + q_n, 0 \leq q_n < m$，则

$$\begin{aligned} ||A^n||^{\frac{1}{n}} &= ||A^{p_n m + q_n}||^{\frac{1}{n}} \leq ||A^{p_n m}||^{\frac{1}{n}} ||A^{q_n}||^{\frac{1}{n}} \\ &\leq ||A^m||^{\frac{p_n m}{n}} ||A||^{\frac{q_n}{n}} < (r+\varepsilon)^{\frac{p_n m}{n}} ||A||^{\frac{q_n}{n}} \end{aligned}$$

因为 $\frac{q_n}{n} \to 0$ as $n \to \infty$, $\frac{p_n m}{n} \to 1$ as $n \to \infty$，所以

$$\limsup_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} \leq r + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 得

$$\limsup_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} \leq r \leq \liminf_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} = r$$

Step 2.$r_\sigma(A) \leq \lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$

因为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||A^n|| z^n$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}}$，则当 $|\lambda| > \lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$ 时，$z = \frac{1}{\lambda}$ 落在收敛圆内部，级数绝对收敛，即

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||A^n|| \frac{1}{\lambda^n} < \infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left|\left| \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \right|\right| < \infty$$

进而由 $\mathscr{L}(X)$ 完备知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ 收敛

另一方面

$$\left|\left| \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} (\lambda I - A) - I \right) \right|\right| = \left|\left| I - \frac{A^{N+1}}{\lambda^{N+1}} - I \right|\right| \to 0 \text{ as } N \to \infty$$

所以 $(\lambda I-A)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}\in\mathscr{L}(X)$，所以 $\lambda\in\rho(A),\forall\lambda>\lim\limits_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$，所以

$$r_\sigma(A)\le\lim_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$$

Step 3.$r_\sigma(A)\ge\lim\limits_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$

假设 $|\lambda|>r_\sigma(A)$，由定义知 $\lambda\in\rho(A)$，则对 $\forall f\in\mathscr{L}(X)^*,f(R_\lambda(A))$ 在 λ 处全纯，则 $f(R_\lambda(A))$ 在圆环 $|\lambda|>r_\sigma(A)$ 内全纯，故可展为收敛的 Laurent 级数；另一方面由 Step 2 知，当 $|\lambda|>\lim\limits_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$ 时，有

$$R_\lambda(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

两边同时作用 f 得（f 连续，可与求和号交换）

$$f(R_\lambda(A))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}}$$

由 Laurent 展开唯一知

$$f(R_\lambda(A))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}},\forall\lambda>r_\sigma(A)$$

取 $\lambda=r_\sigma(A)+\varepsilon$，由 Laurent 展开在圆环内部绝对收敛知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|f(A^n)|}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}}<\infty$$

令 $T_n\overset{\text{def}}{=}\frac{A^n}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}}$，由收敛级数的通项有界知

$$\sup_n|f(T_n)|=\sup_n||T_n^{**}(f)||<\infty$$

由共鸣定理知 $C\overset{\text{def}}{=}\sup\limits_n||T_n^{**}||=\sup\limits_n||T_n||<\infty$，则

$$||A^n||\le C(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}\le r_\sigma(A)+\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即得 $\lim\limits_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}\le r_\sigma(A)$

综上即得谱半径公式 □

评价

$$\begin{cases}\liminf\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{j\ge n}x_j\\ \limsup\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{j\ge n}x_j\end{cases}$$

例 2.132（右移位算子）定义右移位算子

$$A:l^2\longrightarrow l^2$$
$$(x_1,x_2,\cdots)\longmapsto(0,x_1,x_2,\cdots)$$

则我们有

$$\sigma_p(A)=\varnothing,\sigma_c(A)=\partial\mathbb{D},\sigma_r(A)=\mathbb{D}$$

其中 $\mathbb{D}$ 是单位圆盘

证明 Step 1.$\sigma_p(A)=\varnothing$

假设 $\exists\lambda\in\mathbb{C},\exists 0\neq x\in l^2$, s.t. $Ax=\lambda x$，即

$$(0,x_1,x_2,\cdots)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots)$$

所以

$$\begin{cases}\lambda x_1=0\\ \lambda x_2=x_1\\ \lambda x_3=x_2\\ \cdots\cdots\end{cases}$$

如果 $\lambda=0$，则 $x=0$，矛盾；如果 $\lambda\neq 0$，则 $x_1=0\Longrightarrow x_2=0\Longrightarrow x_3=0$，以此类推可得 $x=0$，矛盾！

Step 2. 证明 $\mathbb{D}\subset\sigma_r(A)$

设 $\lambda\in\mathbb{D}$，下证 $\overline{\mathrm{Range}(\lambda I-A)}\neq l^2$，由 l^2 是 Hilbert 空间知，只需证明 $\mathrm{Range}(\lambda I-A)^{\perp}\neq\{0\}$，令 $z=(1,\overline{\lambda},\overline{\lambda}^2,\cdots)$，则对 $\forall x\in l^2$

$$\langle(\lambda I-A)x,z\rangle=\left\langle(\lambda x_1,\lambda x_2-x_1,\lambda x_3-x_2,\cdots),(1,\overline{\lambda},\overline{\lambda}^2,\cdots)\right\rangle=\lambda x_1+\lambda^2x_2-\lambda x_1+\lambda^3x_3-\lambda^2x_2+\cdots=0$$

所以 $z\in\mathrm{Range}(\lambda I-A)^{\perp}$

Step 3. 证明 $\partial\mathbb{D}\subset\sigma_c(A)$

设 $\lambda\in\partial\mathbb{D}$，首先证明 $\mathrm{Range}(\lambda I-A)\neq l^2$：设 $y\in\mathrm{Range}(\lambda I-A)$，则 $\exists x\in l^2$, s.t. $y=(\lambda I-A)x$，则

$$\begin{cases}y_1=\lambda x_1\\ y_k=\lambda x_k-x_{k-1},\forall k\geq 2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}y_1=\lambda x_1\\ \lambda^{k-1}y_k=\lambda^k x_k-\lambda^{k-1}x_{k-1}\end{cases}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}y_k=\lambda^n x_n,\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

假设 $\mathrm{Range}(\lambda I-A)=l^2$，特别地取 $y=e_1$，则 $\exists x\in l^2$, s.t. $e_1=(\lambda I-A)x$，则 $\forall n$ 有

$$\lambda^n x_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}y_k=1\Longrightarrow x_n=\frac{1}{\lambda^n}$$

故 $x=\left(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda^2},\cdots\right)$，但是 $|\lambda|=1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda^n}\right|^2=\infty,x\notin l^2$，矛盾！

其次证明 $\mathrm{Range}(\lambda I-A)^{\perp}=\{0\}$：对 $\forall z\in\mathrm{Range}(\lambda I-A)^{\perp}$，设 e_n 为只有第 n 元为 1 的向量，则 $\{e_n\}$ 是 l^2 的规范正交基，则

$$0=\langle z,(\lambda I-A)e_n\rangle=\overline{\lambda}z_n-z_{n+1}\Longrightarrow z_{n+1}=\overline{\lambda}z_n$$

所以 $|z_{n+1}|=|z_n|,\forall n\in\mathbb{N}$，由 $z\in l^2$ 知，$z_n=0,\forall n\in\mathbb{N}$，即 $z=0$，即 $\mathrm{Range}(\lambda I-A)^\perp=\{0\}$

Step 4. 因为 $||A||=1$，所以由定理2.124知 $\sigma(A)\subset\overline{\mathbb{D}}$，所以

$$\overline{\mathbb{D}}\subset\sigma_p(A)\sqcup\sigma_c(A)\subset\sigma_(A)\subset\overline{\mathbb{D}}$$

再结合 $\mathbb{D}\subset\sigma_r(A),\partial\mathbb{D}\subset\sigma_c(A)$ 知，$\sigma_r(A)=\mathbb{D},\sigma_c(A)=\partial\mathbb{D}$ □

§ 2.7 紧算子

定义 2.133（紧算子）设 X,Y 是两个 Banach 空间，设 $A\in\mathscr{L}(X,Y)$

(1) 若 A 把每个有界集都映为列紧集，则称 A 是紧算子，记为 $A\in\mathscr{C}(X,Y)$

(2) 若 A 把 X 中的每个弱收敛序列映为 Y 中的强收敛序列，则称 A 全连续

(3) 若 $\dim(\mathrm{Range}(A))<\infty$，则称 A 是有限秩算子，记 $A\in\mathcal{F}(X,Y)$

命题 2.134 有限秩算子一定是紧算子，即

$$\mathcal{F}(X,Y)\subset\mathscr{C}(X,Y)$$

评价 以下 $M\overset{\text{bdd}}{\subset}X$ 表示 M 是 X 中的有界集 (Bounded)

证明 设 $A\in\mathcal{F}(X,Y)$，对 $\forall M\overset{\text{bdd}}{\subset}X$，则 $A(M)\overset{\text{bdd}}{\subset}\mathrm{Range}(A)$，又因为 $\mathrm{Range}(A)$ 维数有限，所以 $A(M)$ 列紧，即 $A\in\mathscr{C}(X,Y)$ □

例 2.135 记 I 是恒同算子，则

$$I\in\mathscr{C}(X)\iff\dim(X)<\infty$$

评价 X 中单位球面列紧 $\iff\dim X<\infty$

例 2.136 设 $K(\cdot,\cdot)\in C([0,1]^2)$，定义

$$(Tu)(s)=\int_0^1K(s,t)u(t)\mathrm{d}t$$

则 $T\in\mathscr{C}(C[0,1])$

证明 设 $\mathcal{F}\overset{\text{bdd}}{\subset}C[0,1]$，接下来证明 $T(\mathcal{F})$ 列紧，由 A-A 定理，我们只需证明

(1) $T(\mathcal{F})$ 一致有界：设 $C\overset{\text{def}}{=}\sup\limits_{u\in\mathcal{F}}||u||<\infty$，则

$$||Tu||\le||T||\cdot||u||\le C||T||,\forall u\in\mathcal{F}$$

(2) $T(\mathcal{F})$ 等度连续：对 $\forall\varepsilon>0,\forall u\in\mathcal{F}$，由 K 一致连续知 $\exists\delta>0$，使得若 $|s'-s''|<\delta$，则 $|K(s',t)-K(s'',t)|<\frac{\varepsilon}{C}$，因此对 $\forall s',s''\in[0,1]$ with $|s'-s''|<\delta,\forall u\in\mathcal{F}$，有

$$|(Tu)(s')-(Tu)(s'')|=\int_0^1|K(s',t)-K(s'',t)|\cdot|u(t)|\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{C}\cdot C=\varepsilon$$

$\square$

命题 2.137 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是 $\mathscr{L}(X,Y)$ 的闭子空间

证明 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{C}(X,Y), ||A_n - A|| \to 0$，下证 $A \in \mathscr{C}(X,Y)$：设 $M \overset{\text{bdd}}{\subset} X$，则 $C \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{x\in M} ||x|| < \infty$

***Claim*:** $A(M)$ 列紧

Proof Of Claim : 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{s.t.}$

$$||A_N - A|| < \frac{\varepsilon}{3C}$$

因为 $A_N(M)$ 列紧，所以它有有穷的 $\frac{\varepsilon}{3}$-网 $\{A_N x_1, \cdots, A_N x_m\}$，即

$$A_N(M) \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(A_N x_k, \frac{\varepsilon}{3})$$

因此对 $\forall x \in M, \exists k \in \{1,2,\cdots,m\}, \text{s.t.}$

$$||A_N x - A_N x_k|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

所以

$$\begin{aligned} ||Ax - Ax_k|| &\le ||Ax - A_N x|| + ||A_N x - A_N x_k|| + ||A_N x_k - Ax_k|| \\ &\le C||A - A_N| + \frac{\varepsilon}{3} + C||A_N - A|| < \varepsilon \end{aligned}$$

所以 $\{Ax_1, \cdots, Ax_m\}$ 是 $A(M)$ 的 ε-网，由 ε 的任意性知 $A(M)$ 列紧 $\square$

命题 2.138 紧算子的值域可分

证明 因为 $\text{Range}(A) = A(X) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A(B(0,k))$，而对 $\forall k \in \mathbb{N}, A(B(0,k))$ 是列紧集，而列紧空间是可分的，则对 $\forall k \in \mathbb{N}^*$，我们设 M_k 是 $A(B(0,k))$ 的可数稠密子集，进而 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$ 是 $\text{Range}(A)$ 的可数稠密子集 $\square$

命题 2.139 紧算子与有界算子的复合是紧算子，也就是说

$$\begin{cases} A \in \mathscr{C}(X,Y) \\ T \in \mathscr{L}(Y,Z) \end{cases} \Longrightarrow T \circ A \in \mathscr{C}(X,Z)$$

$$\begin{cases} T \in \mathscr{L}(X,Y) \\ A \in \mathscr{C}(Y,Z) \end{cases} \Longrightarrow A \circ T \in \mathscr{C}(X,Z)$$

证明 Case 1.$A \in \mathscr{C}(X,Y), T \in \mathscr{L}(Y,Z)$

设 $\{x_n\} \overset{\text{bdd}}{\subset} X$，由 A 紧知 $\{Ax_n\}$ 有收敛子列 $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，由 T 连续知 $\{TAx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛，即 $T \circ A$ 紧

Case 2.$T \in \mathscr{L}(X,Y), A \in \mathscr{C}(Y,Z)$

设 $M \overset{\text{bdd}}{\subset} X$，由 T 有界知 $T(M) \overset{\text{bdd}}{\subset} Y$，由 A 紧知 $A(T(M))$ 列紧 □

定理 2.140 对 $A \in \mathscr{L}(X,Y)$

(1) 紧 $\Longrightarrow$ 全连续

(2) 如果 X 是自反空间，则 A 紧 $\Longleftrightarrow$ A 全连续

证明 (1). 假设 A 不全连续，则 $\exists x_n \xrightarrow{w} x_0$, s.t. $||Ax_n - Ax_0|| \nrightarrow 0$，故 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 和子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, s.t.

$$||Ax_{n_k} - A_{x_0}|| \geq \varepsilon_0, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

因为 $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$，即 $x_{n_k}^{**}(f) \to x_0^{**}(f), \forall f \in \mathscr{L}(X,Y)$，由共鸣定理知 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 有界，由 A 紧知 $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 有收敛子列，不妨设仍为自身，则 $\exists y \in Y$, s.t. $||Ax_{n_k} - y|| \to 0$

另一方面，对 $\forall f \in Y^*$，考虑 A 的共轭算子 $A^* \in \mathscr{L}(Y^*, X^*)$，则 $A^*f \in X^*$，由 $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$ 知

$$f(Ax_{n_k} - Ax_0) = (A^*f)(x_{n_k} - x_0) \to 0 \text{ as } k \to \infty$$

即在 Y 中有 $Ax_{n_k} \xrightarrow{w} Ax_0$，又因为 $Ax_{n_k} \to y \Longrightarrow Ax_{n_k} \xrightarrow{w} y$，由弱收敛极限唯一知 $y = Ax_0$，即 $||Ax_{n_k} - Ax_0|| \to 0$，但这与 $||Ax_{n_k} - Ax_0|| \geq \varepsilon_0$ 矛盾！

(2). 设 X 自反，下证 A 全连续 $\Longrightarrow A$ 紧

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{\text{bdd}}{\subset} X$，因为 X 自反，由 Eberlein-Smulian 定理2.112知，存在子列 $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$，由 A 全连续知 $||Ax_{n_k} - Ax_0|| \to 0$，故 A 是紧的 □

§ 2.8 Riesz-Fiedholm 理论

定理 2.141（Riesz-Fiedholm 理论）设 $A \in \mathscr{C}(X), T \overset{\text{def}}{=} I - A$，则

(1) $\dim \operatorname{Ker}(T) < \infty$

(2) $\operatorname{Range}(T)$ 是 X 的闭子空间（我们也称 T 是闭值域算子）

(3) T 单 $\Longleftrightarrow$ T 满（我们称该结论为 F.A,Fredholm-Alternative，中文翻译为 Fredholm 二择一律）

(4) $\operatorname{Range}(T) = \operatorname{Ker}(T^*)^{\perp}$，这里，对 $\forall \mathcal{F} \subset X^*$

$$\mathcal{F}^{\perp} \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in \mathcal{F}\}$$

称为 $\mathcal{F}$ 在 X 中的零化子

(5) $\dim \operatorname{Ker}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T^*)$

评价 为什么称 (3) 是二择一律？

对上述的 T，只有以下两种情形

- 若 $\forall y \in Y, Tx = y$ 有唯一解，则 T 是双射
- 若 $Tx = 0$ 有非零解，则 T 不是单射，由 F.A 知 T 不是满射，进而 $\exists y \in X$, s.t. $Tx = y$ 无解

接下来我们逐个证明

定理 2.142 设 $A \in \mathscr{C}(X), T \overset{\text{def}}{=} I - A$，则

$$\dim \operatorname{Ker}(T) < \infty$$

证明 令 $M \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ker}(T), S_M \overset{\text{def}}{=} M$中的单位球面$, S_X \overset{\text{def}}{=} X$中的单位球面，则

$$x \in S_M \iff \begin{cases} x \in S_X \\ x - Ax = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in S_X \\ x = Ax \in A(S_X) \end{cases}$$

所以 $S_M \subset A(S_X)$，由 A 紧，S_X 有界知 $A(S_X)$ 列紧，故 S_M 列紧，即 M 中单位球面列紧 $\Longrightarrow \dim M < \infty$

□

定理 2.143 设 $A \in \mathscr{C}(X), T = I - A$，则 $\operatorname{Range}(T)$ 是 X 的闭子空间

证明 子空间显然，下面验证闭性：设 $\operatorname{Range}(T) \ni y_n \to y$，则 $\exists x_n \in X, \text{s.t. } Tx_n = y_n$，下证 $y \in \operatorname{Range}(T)$

Case 1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{\text{bdd}}{\subset} X$

由 A 紧知 $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列 $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，设 $Ax_{n_k} \to u$，因为 $T = I - A$，所以 $x_{n_k} = Ax_{n_k} + Tx_{n_k}$，故

$$x_{n_k} \to u + y \Longrightarrow Tx_{n_k} \to T(u+y)$$

由极限唯一知 $y = T(u+y) \in \operatorname{Range}(T)$

Case 2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无界

令 $\mathrm{d}_n = \operatorname{dist}(x_n, \operatorname{Ker}(T))$（已证 $\dim \operatorname{Ker}(T) < \infty$），则存在最佳逼近元 $z_n \in \operatorname{Ker}(T), \text{s.t.}$

$$||x_n - z_n|| = \mathrm{d}_n$$

Claim: $\{x_n - z_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{\text{bdd}}{\subset} X$

Proof Of Claim：假设不然，则 $\sup\limits_n \mathrm{d}_n = +\infty$，则存在 $\{\mathrm{d}_n\}$ 的子列趋于无穷，不妨设 $\mathrm{d}_n \to \infty$，令

$$v_n \overset{\text{def}}{=} \frac{x_n - z_n}{||x_n - z_n||}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

则 $Tv_n = \frac{Tx_n - Tz_n}{\mathrm{d}_n} = \frac{y_n}{\mathrm{d}_n} \to 0$ as $n \to \infty$（y_n 是收敛列故有界，$\mathrm{d}_n \to \infty$）

另一方面，$\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{\text{bdd}}{\subset} X$，由 A 紧知 $\{Av_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列，设 $Av_{n_k} \to w$，所以

$$\begin{cases} Tv_{n_k} \to 0 \\ v_{n_k} = Tv_{n_k} + Av_{n_k} \end{cases} \Longrightarrow v_{n_k} \to w$$

由 T 的连续性知 $Tv_{n_k} \to Tw$，由极限的唯一性知 $Tw = 0 \Longrightarrow w \in \operatorname{Ker}(T)$，但是对 $\forall z \in \operatorname{Ker}(T)$

$$||v_n - z|| = \frac{1}{\mathrm{d}_n}||x_n - (z_n + \mathrm{d}_n z)|| \geq \frac{\mathrm{d}_n}{\mathrm{d}_n} = 1$$

所以 $\text{dist}\,(v_n, \text{Ker}(T)) \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$，但是 $w \in \text{Ker}(T)$，这与 $v_{n_k} \to w$ 矛盾！

因此 $T(x_n - z_n) = Tx_n = y_n$，约化到 Case1 □

定理 2.144（Fredholm 二择一律）设 $A \in \mathscr{C}(X), T = I - A$，则

$$T\text{是单射} \iff T\text{是满射}$$

证明 我们首先证明一个引理

引理 2.145 (1) $\text{Ker}(T) \subset \text{Ker}(T^2) \subset \text{Ker}(T^3) \subset \cdots$
(2) $\exists n, \text{s.t.}\ \text{Ker}(T^n) = \text{Ker}(T^{n+1})$

证明 (1). 平凡

(2). 反证，假设 $\forall n \in \mathbb{N}, \text{Ker}(T^n) \subsetneqq \text{Ker}(T^{n+1})$，由连续性可证 $\text{Ker}(T^n)$ 是 $\text{Ker}(T^{n+1})$ 的闭子空间，由 Riesz 引理，$\exists x_n \in \text{Ker}(T^{n+1}), ||x_n|| = 1, \text{s.t.}$

$$\text{dist}\,(x_n, \text{Ker}(T^n)) > \frac{1}{2}$$

对 $\forall n, m$，不妨设 $n > m$，则（$T^n A = (I - A)^n A = A(I - A)^n = AT^n$）

$$T^n(Tx_n + Ax_m) = T^{n+1}x_n + T^n(Ax_m) = 0 + AT^n x_m \overset{n \geq m}{=} 0$$

所以 $Tx_n + Ax_m \in \text{Ker}(T^n)$，故

$$||Ax_n - Ax_m|| = ||x_n - (Tx_n + Ax_m)|| \geq \text{dist}\,(x_n, \text{Ker}(T^n)) > \frac{1}{2}$$

所以 $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列，这与 A 的紧性矛盾！ □

现在回到 Fredholm 二择一律的证明

($\Longleftarrow$)：假设 T 是满射但不是单射，即 $\text{Ker}(T) \neq \{0\} \Longrightarrow \exists 0 \neq x_0 \in \text{Ker}(T)$，由 T 满知 $\exists x_1 \in X, \text{s.t.}\ x_0 = Tx_1$，再由 T 满知 $\exists x_2 \in X, \text{s.t.}\ x_1 = Tx_2$，所以

$$0 \neq x_0 = Tx_1 = T^2 x_2 = \cdots$$

所以

$$\begin{cases} T^n x_n = x_0 \neq 0 \\ T^{n+1} x_n = Tx_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x_n \in \text{Ker}(T^{n+1}) \backslash \text{Ker}(T^n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

这与引理的 (2) 矛盾！

($\Longrightarrow$)：假设 T 单但不满，令 $X_1 = T(X) = \text{Range}(T)$，由定理2.143知 X_1 是闭子空间，又因为 T 不满，所以 X_1 是 X 的真闭子空间

令 $X_2 = T(X_1)$，它也是 X_1 的闭子空间，下面证明 $X_2 \neq X_1$，否则 $T(X_1) = X_1$，取 $x_0 \notin X_1$，则 $Tx_0 \in T(X) = X_1 = T(X_1)$，故 $\exists x_0' \in X_1, \text{s.t.}\ Tx_0' = Tx_0$，由选取知 $x_0 \neq x_0'$，但这与 T 是单射矛盾！

重复上述操作，我们得到闭子空间序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}, X_n \overset{\text{def}}{=} T^n(X)$，且 X_{n+1} 是 X_n 的闭子空间，由 Riesz 引理，$\exists x_n \in X_n, ||x_n|| = 1, \text{s.t.}$

$$\text{dist}\,(x_n, X_{n+1}) > \frac{1}{2}$$

对 $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$，不妨设 $n > m$，则

$$\begin{aligned} Ax_n - Ax_m &= -(x_m - Ax_m) + (x_n - Ax_n) + x_m - x_n \\ &= x_m - (x_n - Tx_n + Tx_m) \end{aligned}$$

因为 $x_n - Tx_n + Tx_m \in T^{m+1}(X) = X_{m+1}$，所以 $||Ax_n - Ax_m|| \geq \text{dist}\,(x_m, X_{m+1}) > \frac{1}{2}$，故 $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列，这与 A 的紧性矛盾！ □

定理 2.146 设 $A \in \mathscr{C}(X), T = I - A$，则

$$\text{Range}(T) = \text{Ker}(T^*)^{\perp}$$

证明 我们直接介绍一个更强的引理

引理 2.147 设 $T \in \mathscr{L}(X)$，则

(1) $\text{Ker}(T^*) = {}^{\perp}\,\text{Range}(T)$

(2) $\text{Ker}(T^*)^{\perp} = \overline{\text{Range}(T)}$

其中对 $\forall M \subset X, \mathcal{F} \subset X^*$，定义

$$^{\perp}M \overset{\text{def}}{=} \{f \in X^* : f(x) = 0, \forall x \in M\}$$

$$\mathcal{F}^{\perp} \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in \mathcal{F}\}$$

证明 (1). 由定义直接验证

$$\begin{aligned} f \in {}^{\perp}\,\text{Range}(T) &\iff f(Tx) = 0, \forall x \in X \iff (T^*f)(x) = 0, \forall x \in X \\ &\iff T^*f = 0 \iff f \in \text{Ker}(T^*) \end{aligned}$$

(2). 由 (1) 知 $\text{Ker}(T^*)^{\perp} = ({}^{\perp}\text{Range}(T))^{\perp} \supset \text{Range}(T)$（由定义可验证这个包含关系），两边同时取闭包得

$$\overline{\text{Range}(T)} \subset \overline{\text{Ker}(T^*)^{\perp}} \overset{\text{闭}}{=} \text{Ker}(T^*)^{\perp}$$

CLaim: $\text{Ker}(T^*)^{\perp} \subset \overline{\text{Range}(T)}$

Proof Of Claim : 设 $x \in \text{Ker}(T^*)^{\perp}$，则 $x \in ({}^{\perp}\text{Range}(T))^{\perp}$，下证 $x \in \overline{\text{Range}(T)}$，因为

$$x \in \overline{\text{Range}(T)} \overset{\text{HBT}}{\iff} \forall f \in X^* \text{ with } f(\text{Range}(T)) = \{0\}, \text{必有} f(x) = 0$$

所以

$$\begin{cases} x \in ({}^{\perp}\mathrm{Range}(T))^{\perp} \\ f \in {}^{\perp}\mathrm{Range}(T) \iff f(\mathrm{Range}(T)) = \{0\} \end{cases} \implies f(x) = 0$$

因此 $x \in \overline{\mathrm{Range}(T)}$ □

进而由 T 是闭值域算子知

$$\mathrm{Range}(T) = \overline{\mathrm{Range}(T)} = \mathrm{Ker}(T^*)^{\perp}$$

□

§ 2.9 Riesz-Schauder 理论

定理 2.148 (Riesz-Schauder 理论) 设 X 是复 Banach 空间，$A \in \mathscr{C}(X)$，则

(1) 若 $\dim X = \infty$，则 $0 \in \sigma(A)$

(2) $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$，即非零谱点一定是特征值

(3) 非零特征值的特征子空间是有限维的

(4) 不同特征值的特征向量线性无关

(5) $\sigma(A)$ 如果有极限点，极限点只可能是 0

证明 (1). 假设 $0 \in \rho(A)$，则 $(0I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(A)$，故 $I = AA^{-1}$ 为紧算子和有界算子复合仍为紧算子，由例2.135知 $\dim X < \infty$，矛盾！

(2). 设 $0 \neq \lambda \notin \sigma_p(A)$，所以 $\lambda I - A$ 是单射，由二择一律知，$\lambda I - A$ 满，故 $\lambda I - A$ 是双射，由逆算子定理知 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$，故 $\lambda \in \rho(A)$，故 $\sigma(A)\backslash\{0\} \subset \sigma_p(A)\backslash\{0\}$，另一方向显然，故 $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$

(3). 对 $\forall 0 \neq \lambda \in \sigma_p(A)$，则

$$\mathrm{Ker}(\lambda I - A) = \mathrm{Ker}(I - \frac{A}{\lambda})$$

由定理2.141(1) 知 $\dim \mathrm{Ker}(\lambda I - A) < \infty$

(4). 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个不同的特征值，$x_1, \cdots, x_n$ 是对应的特征向量，假设 $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$，则

$$\begin{cases} A\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k x_k = 0 \\ A^2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \alpha_k x_k = 0 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ A^{n-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{n-1} \alpha_k x_k = 0 \end{cases}$$

写成矩阵的形式即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \alpha_2 x_2 \\ \vdots \\ \alpha_n x_n \end{pmatrix} = 0$$

由 $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$ 知，Vandemonde 行列式的值 $\prod\limits_{1\le i<j\le n}(\lambda_i - \lambda_j)$ 非零，进而 $\alpha_i x_i = 0, \forall 1 \le i \le n$，故 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$，即 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 线性无关

(5). 假设 $\sigma(A)$ 有极限点 $\lambda_0 \neq 0$，则 $\exists \lambda_n \in \sigma(A), n = 1, 2, \cdots, \text{s.t. } \lambda_n \to \lambda_0$，我们可不妨设 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 互不相同，由 $\lambda_n \to \lambda_0$ 知，$\exists N \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } \forall n > N, \lambda_n \neq 0$，故我们还可以不妨假设 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 均不为零，则 $\frac{1}{\lambda_n} \to \frac{1}{\lambda_0} \Longrightarrow \sup\limits_n \left|\frac{1}{\lambda_n}\right| < \infty$

取 $x_n \in \mathrm{Ker}(\lambda_n I - A)$，则 x_n 是 λ_n 的特征值，由 (4) 知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 线性无关，令

$$X_n = \mathrm{Span}\{x_1, \cdots, x_n\}$$

则 X_{n-1} 是 X_n 的闭子空间，由 Riesz 引理知 $\exists y_n \in X_n, ||y_n|| = 1, \text{s.t. } \mathrm{dist}\,(y_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2}$，我们可设 $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$，则

$$(\lambda_n I - A) y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\lambda_n - \lambda_k) x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (\lambda_n - \lambda_k) x_k \in X_{n-1}$$

对 $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$，不妨设 $n > m$，则

$$\left|\left|A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\right|\right| = \left|\left|y_n - \left[y_n - A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) + y_m - y_m + A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\right]\right|\right| \ge \mathrm{dist}\,(y_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2}$$

即 $\left\{A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列，而 $||y_n|| \equiv 1, \left\{\frac{1}{\lambda_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，这与 A 紧矛盾！ □

推论 2.149 $A \in \mathscr{C}(X) \Longrightarrow \sigma(A)$ 至多可数

证明 由定理2.148(2) 知 $\sigma_p(A)\backslash\{0\} = \sigma(A)\backslash\{0\}$，我们只需证明 A 的特征值至多可数，令

$$E_k \overset{\text{def}}{=} \sigma_p(A) \cap \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \frac{1}{k}\right\}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

则 $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$

Claim: $\#E_k < \infty$

Proof Of Claim : 假设 $\exists k, \text{s.t. } \#E_k = \infty$，因为 $\sigma(A) \subseteq \overline{\mathbb{D}(0, ||A||)}$，即 E_k 有界，一定有极限点 λ_0，而 $\mathrm{dist}\,(0, E_k) \ge \frac{1}{k}$，故 $\lambda_0 \neq 0$，这与定理2.148(5) 矛盾！

因此 $\sigma(A)$ 至多可数 □

推论 2.150 设 $\dim X = \infty, A \in \mathscr{C}(X)$，则 $\sigma(A)$ 只有以下三种可能情形

(1) $\sigma(A) = \{0\}$

(2) $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$

(3)（可数）$\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ with $\lambda_k \to 0$

其中 $\lambda_k \in \sigma_p(A), k = 1, 2, \cdots$

证明 令

$$F_0 \overset{\text{def}}{=} \sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \ge 1\}$$

$$F_k \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(A) \cap \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{1}{k-1} \leq |\lambda| < \frac{1}{k}\right\}$$

所以 $\sigma(A) \subset \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} F_k$，同推论2.150的证明可知 $\# F_k < \infty$，按 F_k 顺次排列 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ □

例 2.151 $A = 0 \Longrightarrow \sigma(A) = \sigma_p(A) = \{0\}$

例 2.152（Volterra 算子）在 $L^2[0,1]$ 中，定义算子

$$(Au)(t) = \int_0^t u(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 K(t,s)u(s)\mathrm{d}s$$

$$K(t,s) = \begin{cases} 1, & t \geq s \\ 0, & t < s \end{cases} \in L^2([0,1]^2)$$

由先前的作业题知 $A \in \mathscr{C}(L^2[0,1])$，因为 $\dim(L^2[0,1]) = \infty$，由定理2.148(1) 知 $0 \in \sigma(A)$；对 $\forall 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$

$$Au = \lambda u \iff \int_0^t u(s)\mathrm{d}s = \lambda u(t) \iff \begin{cases} \lambda u'(t) = u(t) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

解微分方程得 $u(t) = Ce^{\frac{t}{\lambda}}$，再由初值 $u(0) = 0$ 知 $C = 0 \Longrightarrow u \equiv 0$，故 $\lambda \notin \sigma_p(A) \Longrightarrow \lambda \in \rho(A)$，所以 $\sigma(A) = \{0\}$

例 2.153

$$A : l^2 \longrightarrow l^2$$
$$(x_1, x_2, \cdots) \longmapsto (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots)$$

可以验证 $\sigma(A) = \{0\}$（留作习题）

例 2.154 给定复数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$，定义

$$A_n : l^2 \longrightarrow l^2$$
$$(x_1, x_2, \cdots) \longmapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots, \lambda_n x_n, 0, \cdots)$$

则

$$\begin{cases} ||Ax||_2 \leq \left(\max\limits_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|\right) ||x||_2 \\ \dim(\mathrm{Range}(A)) < \infty \end{cases} \Longrightarrow A \in \mathcal{F}(l^2) \subset \mathscr{C}(l^2)$$

记 e_k 为只有第 k 元为 1 的向量，则

$$\begin{cases} A_n e_k = \lambda_k e_k, \forall 1 \leq k \leq n \\ A_n e_{n+1} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \sigma_p(A)$$

而对 $\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$

$$(\lambda I - A_n)x = 0 \iff ((\lambda - \lambda_1)x_1, \cdots, (\lambda - \lambda_n)x_n, \lambda x_{n+1}, \cdots) = 0$$

因此 $x_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}^*$，进而 $\lambda I - A_n$ 是单射，由二择一律知 $\lambda I - A$ 是双射，由逆算子定理知 $\lambda \in \rho(A)$，故

$$\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$$

例 2.155 给定 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 满足 $\lambda_k \to 0$，定义

$$A : l^2 \longrightarrow l^2$$
$$(x_1, x_2, \cdots) \longmapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots)$$

则我们有如下观察

(1) A 有界

$$||Ax||_2 \leq \left(\sup_k |\lambda_k|\right) ||x||_2 \Longrightarrow A \in \mathscr{L}(l^2)$$

(2) $A \in \mathscr{C}(l^2)$：回顾 $\mathscr{C}(l^2)$ 是 $\mathscr{L}(l^2)$ 的闭子集，如果能证明 A 是上个例子中 A_n 的极限，则 $A \in \mathscr{C}(l^2)$
由 $\lambda_k \to 0$ 知，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } \forall k \geq N, |\lambda_k| < \varepsilon$，则

$$||Ax - A_N x||_2 = \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |\lambda_k x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon ||x||_2$$

故 $||A - A_N|| \to 0, A \in \mathscr{C}(l^2)$

(3) $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$
因为 $Ae_k = \lambda e_k, \forall k \in \mathbb{N}^*$，则 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \sigma_p(A)$，且不难看出 $0 \notin \sigma_p(A)$，而 $\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$，由 $\lambda_k \to 0$ 知

$$\inf_k |\lambda - \lambda_k| > 0$$

再令

$$T : l^2 \longrightarrow l^2$$
$$(x_1, x_2, \cdots) \longmapsto \left(\frac{x_1}{\lambda - \lambda_1}, \frac{x_2}{\lambda - \lambda_2}, \cdots\right)$$

则

$$||Tx||_2 \leq \left(\sup_k \frac{1}{|\lambda - \lambda_k|}\right) ||x||_2 \Longrightarrow T \in \mathscr{L}(l^2)$$

而且 $T = (\lambda I - A)^{-1} \Longrightarrow \lambda \in \rho(A)$，因此

$$\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$$

□