结式

线性代数进阶

结式定义

设$R=\mathbb{F}[x_1,\cdots,x_k]$是域$\mathbb{F}$上$k$元多项式环, 假设零元多项式环就是$\mathbb{F}$. 设$f(x)=a_m x^m+\cdots+a_0$, $g(x)=b_n x^n+\cdots+b_0$是R上多项式，它们的结式(**Sylvester Resultant**)为:

$$\operatorname{Res}(f,g)=\det(S)=\begin{vmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & a_1 & \ddots & & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_m & & \ddots & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & a_m & & a_1 & b_n & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_m & & & b_n \end{vmatrix}_{(m+n)\times(m+n)}.$$

同时称此行列式对应的矩阵$S=S(f,g)$为$f(x)$和 $g(x)$的 **Sylvester方阵**.

定理 (根表达式)

设$u_1,\ldots,u_m$和$v_1,\ldots,v_n$分别是f和g在包含R的某个域中的根，即

$$f(x)=a_m\prod_{i=1}^{m}(x-u_i),\quad g(x)=b_n\prod_{j=1}^{n}(x-v_j).$$

则：

$$\mathrm{Res}(f,g)=a_m^n b_n^m\cdot\prod_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}(v_j-u_i)$$

推论&应用

$f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共零点当且仅当 $\mathrm{Res}(f,g)=0$

定理证明1

证法1

令 $W = V(v_1, \cdots, v_n, u_1, \cdots, u_m)$. 则

$$WS = \begin{pmatrix} f(v_1) & v_1 f(v_1) & \cdots & v_1^{n-1} f(v_1) & & & & \\ f(v_2) & v_2 f(v_2) & \cdots & v_2^{n-1} f(v_2) & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ f(v_n) & v_n f(v_n) & \cdots & v_n^{n-1} f(v_n) & & & & \\ & & & & g(u_1) & u_1 g(u_1) & \cdots & u_1^{m-1} g(u_1) \\ & & & & g(u_2) & u_2 g(u_2) & \cdots & u_2^{m-1} g(u_2) \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & g(u_m) & u_m g(u_m) & \cdots & u_m^{m-1} g(u_m) \end{pmatrix}.$$

证法1：继续

取行列式有

$$\det W \cdot \det S = f(v_1)\cdots f(v_n)g(u_1)\cdots g(u_m)\prod_{1\leqslant j<l\leqslant n}(v_l-v_j)\prod_{1\leqslant i<k\leqslant m}(u_k-u_i),$$

由范德蒙行列式的公式有

$$\det W = \prod_{1\leqslant j<l\leqslant n}(v_l-v_j)\prod_{1\leqslant i<k\leqslant m}(u_k-u_i)\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(u_i-v_j).$$

再带入

$$f(v_1)\cdots f(v_n)g(u_1)\cdots g(u_m) = a_m^n b_n^m \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(v_j-u_i)\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(u_i-v_j).$$

证法2

设 $f(x)=(x-u_1)\cdots(x-u_m)=a_mx^m+\cdots+a_0$, $g(x)=x-b$, 则

$$\operatorname{Res}(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & -b & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & -b & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ a_m & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f(b) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & -b & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ a_m & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=f(b)=\prod_{i=1}^{m}(b-u_i).$$

故只需归纳证明

$$\operatorname{Res}(f(x),(x-b)g(x))=f(b)\cdot\operatorname{Res}(f(x),g(x)).$$

证法2：继续

记 $f(x)$ 和 $(x-b)g(x)$ 的Sylvester方阵为 A, 则考虑乘积$XYAZ$, 其中

$$X=\begin{pmatrix}1 & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b\\ & & & 1\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}1 & b & b^2 & \cdots & b^{m+n}\\ & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & \ddots & \ddots & 0\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & 1\end{pmatrix}, Z=\begin{pmatrix}1 & -b & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & -b & \\ & & & 1 & 0\\ & & & & I_m\end{pmatrix}.$$

由于

$$X\big((YA)Z\big)=\begin{pmatrix}f(b) & \mathbf{0}\\ * & S(f,g)\end{pmatrix},$$

立即有

$$\operatorname{Res}(f(x),(x-b)g(x))=\det A=\det(XYAZ)=f(b)\operatorname{Res}(f(x),g(x)).$$

唯一性

结式是满足以下性质的唯一函数：

1. 若 $m=0$，$\mathrm{Res}(f,g)=a_0^n$；若 $n=0$，$\mathrm{Res}(f,g)=b_0^m$
2. $\mathrm{Res}(x-a_1,x-b_1)=b_1-a_1$
3. $\mathrm{Res}(g,f)=(-1)^{mn}\mathrm{Res}(f,g)$
4. $\mathrm{Res}(fg,h)=\mathrm{Res}(f,h)\mathrm{Res}(g,h)$

几何应用：Bezout定理

命题 2.5.9.

设 $f(x), g(x) \in R[x]$分别是m和n次的多项式. 则存在次数$< n$的多项式$P(x)$和次数$< m$的多项式 $Q(x)$, 使得

$$f(x)P(x) + g(x)Q(x) = \operatorname{Res}(f, g).$$

并且总可假设 $P(x)$和$Q(x)$的系数是$f(x)$和$g(x)$系数的整系数多项式.

定理 (Bezout)

设 $f(x, y), g(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ 是不可约多项式且 $g \neq cf$ $(c \in \mathbb{C})$。则曲线 $f(x, y) = 0$ 与 $g(x, y) = 0$ 只有有限个交点。

Bezout定理证明

将f与g均当作$\mathbb{C}[x][y]$中元素, 考虑关于y的结式 $\mathrm{Res}_y(f,g)\in\mathbb{C}[x]$. 由上述命题, 存在多项式 $P(x,y)$和$Q(x,y)$使得

$$f(x,y)P(x,y)+g(x,y)Q(x,y)=\mathrm{Res}_y(f,g).$$

由于f,g均不可约, 且$g\neq cf$, 故 $\mathrm{Res}_y(f,g)\in\mathbb{C}[x]$不是零多项式. 否则, 考虑$f(x,y),g(x,y)$在$\mathbb{C}(x)[y]$中最大公因式$\dfrac{h(x,y)}{\alpha(x)}$, 由于任意$x$均有公共根, 从而$h(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]\setminus\mathbb{C}[x]$. 对任意$h(x,y)$含$y$的不可约因式$p(x,y)$都是$f(x,y)$与$g(x,y)$的公因式, 由于$f(x,y),g(x,y)$均不可约, 从而

$$p(x,y)=c_1g(x,y)=c_2f(x,y),$$

矛盾. 从而$\mathrm{Res}_y(f,g)$只有有限个零点, 立即有$f(x,y)=0$与$g(x,y)=0$交点的x只有有限可能. 类似地, y也只有有限可能.