

# 第四次习题课讲义

涂嘉乐

2025 年 11 月 16 日

## 1 作业选讲

**习题 1 (P204,T12)** 设  $\mathcal{A} : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}$  是线性映射, 而且对任意  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{A}(AB) = \mathcal{A}(BA)$ , 证明  $\mathcal{A} = \lambda \text{tr}$ , 其中  $\lambda \in \mathbb{F}$

**证明 思路:** 我们先分析  $\mathcal{A}$  在  $\mathbb{F}^{n \times n}$  的基  $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$  下的像, 其中  $E_{ij}$  表示只有第  $ij$  元为 1, 其余元素均为 0 的矩阵

Lemma:  $E_{ij}E_{kl} = E_{il}\delta_{jk}$

Proof of Lemma: 因为  $E_{ij}E_{kl}$  的第  $ab$  元表示  $E_{ij}$  的第  $a$  行和  $E_{kl}$  的第  $b$  列的内积, 因此只有第  $il$  元可能非零, 且非零时, 做内积的行向量和列向量中, 1 的位置应该相同, 即  $j = k$ , 所以  $E_{ij}E_{kl} = E_{il}\delta_{jk}$  回到本题, 因为

$$\begin{cases} \mathcal{A}(E_{ij}E_{kl}) = \mathcal{A}(E_{il}\delta_{jk}) = \delta_{jk}\mathcal{A}(E_{il}) \\ \mathcal{A}(E_{kl}E_{ij}) = \mathcal{A}(E_{kj}\delta_{li}) = \delta_{li}\mathcal{A}(E_{kj}) \end{cases} \implies \delta_{jk}\mathcal{A}(E_{il}) = \delta_{li}\mathcal{A}(E_{kj})$$

令  $k = j$ , 则  $\mathcal{A}(E_{il}) = \delta_{li}\mathcal{A}(E_{kj})$ , 若  $l \neq i$ , 则  $\mathcal{A}(E_{li}) = 0, \forall 1 \leq i \neq l \leq n$

另一方面, 取  $i = l = i_1, j = k = i_2$ , 则

$$\mathcal{A}(E_{i_1 i_1}) = \mathcal{A}(E_{i_2 i_2}), \quad \forall 1 \leq i_1 \neq i_2 \leq n$$

即  $\exists \lambda \in \mathbb{F}, \text{s.t. } \mathcal{A}(E_{ii}) = \lambda, \forall 1 \leq i \leq n$ , 因此对  $\forall A = (a_{ij}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}E_{ij}$ , 我们有

$$\mathcal{A}(A) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\mathcal{A}(E_{ij}) = \sum_{k=1}^n a_{kk}\mathcal{A}(E_{kk}) = \lambda \sum_{k=1}^n a_{kk} = \lambda \text{tr}(A)$$

所以  $\mathcal{A} = \lambda \text{tr}$

□

**习题 2 (P211,T4)** 设  $U, V$  分别是数域  $\mathbb{F}$  上的  $m, n$  维线性空间, 取定  $\alpha \in U$ , 所有满足  $\mathcal{A}(\alpha) = 0$  的线性映射  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$  的集合记为  $K$ , 证明:  $K$  在线性映射的加法、纯量与线性映射的乘法下成为数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间, 并求  $\dim K$

**证明** 对  $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in K \subseteq \mathcal{L}(U, V)$ , 对  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$ , 有

$$(\lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{B})(\alpha) = \lambda\mathcal{A}(\alpha) + \mu\mathcal{B}(\alpha) = 0$$

所以  $\lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{B} \in K$ , 因此  $K$  是  $\mathcal{L}(U, V)$  的子空间, 故  $K$  是  $\mathbb{F}$  上的线性空间, 下求  $\dim K$



若  $\alpha = 0$ , 则  $\forall \mathcal{A} \in L(U, V), \mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(0) = 0$ , 故  $K = L(U, V), \dim K = \dim(L(U, V)) = mn$

若  $\alpha \neq 0$ , 我们可以将  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1$  扩充为  $U$  的一组基  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ , 再取  $V$  的一组基  $\beta_1, \dots, \beta_n$ , 考虑

$$\mathcal{A}_{ij} : U \rightarrow V$$

$$\alpha_k \mapsto \delta_{ik} \beta_j = \begin{cases} \beta_j, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

容易验证  $\mathcal{A}_{ij} \in L(U, V)$ , 下面我们证明  $\{\mathcal{A}_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  为  $\mathcal{L}(U, V)$  的一组基, 由于  $\mathcal{L}(U, V) = mn$ , 因此我们只需证明它们线性无关, 假设

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \mathcal{A}_{ij} = 0$$

则对  $\forall 1 \leq k \leq m$  有

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \mathcal{A}_{ij}(\alpha_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \delta_{ik} \beta_j = \sum_{j=1}^n \lambda_{kj} \beta_j = 0$$

由  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  线性无关知,  $\lambda_{k1} = \dots = \lambda_{kn} = 0$ , 遍历  $1 \leq k \leq m$  知  $\lambda_{ij} = 0, \forall i, j$ , 所以它们线性无关, 故为  $\mathcal{L}(U, V)$  的一组基

注意到  $\mathcal{A}_{ij}(\alpha_1) = 0, \forall 2 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ , 所以  $\text{Span}\{\mathcal{A}_{ij}\}_{\substack{2 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \subseteq K$ , 另一方面假设  $\mathcal{A} \in K$ , 我

们设  $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathcal{A}_{ij}$ , 所以

$$0 = \mathcal{A}(\alpha_1) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathcal{A}_{ij}(\alpha_1) = \sum_{j=1}^n a_{1j} \beta_j$$

由  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  线性无关知,  $a_{1j} = 0, \forall 1 \leq j \leq n$ , 因此  $\mathcal{A} = \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathcal{A}_{ij} \in \text{Span}\{\mathcal{A}_{ij}\}_{\substack{2 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ , 即  $K \subseteq \text{Span}\{\mathcal{A}_{ij}\}_{\substack{2 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ , 故

$$K = \text{Span}\{\mathcal{A}_{ij}\}_{\substack{2 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \implies \dim K = (m-1)n$$

□

## 2 补充习题

**习题 3** 设  $n$  阶矩阵  $A$  的全体特征值为  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , 求证:  $A^*$  的全体特征值为  $\prod_{i \neq 1} \lambda_i, \prod_{i \neq 2} \lambda_i, \dots, \prod_{i \neq n} \lambda_i$

**证明** 由于任意  $n$  阶矩阵均复相似于上三角阵, 我们可设

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} P \Lambda P^{-1}$$

则

$$P^{-1} A^* P = P^{-1} [(P^{-1})^* \Lambda^* P^*] P = [\det(P^{-1}) I_n] \Lambda^* [\det(P) I_n] = \Lambda^*$$



由于上三角阵的伴随仍为上三角阵, 且对角元  $(\Lambda^*)_{ii}$  为  $\Lambda$  的第  $ii$  个代数余子式, 即为  $\prod_{j \neq i} \lambda_j$ , 所以

$$P^{-1}A^*P = \begin{pmatrix} \prod_{i \neq 1} \lambda_i & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \prod_{i \neq n} \lambda_i \end{pmatrix}$$

因此

$$\det(\lambda I_n - A^*) = \det[P^{-1}(\lambda I_n - A^*)P] = \prod_{i=1}^n (\lambda - \prod_{j \neq i} \lambda_j)$$

所以  $A^*$  的全体特征值为  $\prod_{i \neq 1} \lambda_i, \prod_{i \neq 2} \lambda_i, \dots, \prod_{i \neq n} \lambda_i$  □

**习题 4** 设  $U, W$  是  $n$  维线性空间  $V$  的子空间, 且  $\dim U + \dim W = \dim V$ , 求证: 存在  $V$  上的线性变换  $\varphi$ , 使得  $\text{Ker} \varphi = U, \text{Im} \varphi = W$

**证明** 取  $U$  的一组基  $e_1, \dots, e_m$  (这里我们设  $\dim U = m$ ), 并将其扩充为  $V$  的一组基  $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ , 再取  $W$  的一组基  $f_{m+1}, \dots, f_n$  (题目条件  $\dim W = \dim V - \dim U$ ), 定义

$$\begin{aligned} \varphi: V &\longrightarrow V \\ e_i &\longmapsto 0, \quad 1 \leq i \leq m \\ e_j &\longmapsto f_j, \quad m+1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

大家可以自行验证一下  $\text{Ker} \varphi = U, \text{Im} \varphi = W$  □

**习题 5** 设  $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , 求证: 方程组  $Ax = 0, Bx = 0$  同解  $\iff$  存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $B = PA$

**证明** ( $\Leftarrow$ ): 若  $B = PA$ , 则

$$Bx = 0 \iff PAx = 0 \iff Ax = 0$$

( $\Rightarrow$ ): 我们用线性空间的语言重新描述一下本题: 设

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \mathbb{F}^n &\longrightarrow \mathbb{F}^m & \mathcal{B}: \mathbb{F}^n &\longrightarrow \mathbb{F}^m \\ x &\longmapsto Ax & x &\longmapsto Bx \end{aligned}$$

则  $\text{Ker} \mathcal{A} = \text{Ker} \mathcal{B}$ , 我们只需找到一个  $\mathbb{F}^n$  上的一个可逆线性变换  $\varphi: \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^m$ , 使得  $\mathcal{B} = \varphi \circ \mathcal{A}$ , 设  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = r$ , 则  $\dim \text{Ker}(\mathcal{A}) = \dim \text{Ker}(\mathcal{B}) = n - r$ , 我们取  $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\mathcal{B})$  的一组基  $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ , 并将它们扩充为  $\mathbb{F}^n$  上的一组基  $\{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\}$

**Claim:**  $\{\mathcal{A}(e_1), \dots, \mathcal{A}(e_r)\}$  是  $\text{Im}(\mathcal{A})$  的一组基

Proof Of Claim: 因为  $\dim(\text{Im}(\mathcal{A})) = \text{rank}(A) = r$ , 所以我们只需证明它们线性无关, 设

$$\lambda_1 \mathcal{A}(e_1) + \dots + \lambda_r \mathcal{A}(e_r) = 0 \implies \mathcal{A}(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r) = 0$$

即  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r \in \text{Ker}(\mathcal{A})$ , 可设  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r = \lambda_{r+1} e_{r+1} + \dots + \lambda_n e_n$ , 再由  $\{e_1, \dots, e_n\}$  的线性无关性知  $\lambda_i = 0, \forall i$

因此我们可以将  $\{\mathcal{A}(e_1), \dots, \mathcal{A}(e_r)\}$  扩张为  $\mathbb{F}^m$  的一组基  $\{\mathcal{A}(e_1), \dots, \mathcal{A}(e_r), f_{r+1}, \dots, f_m\}$ ; 对  $\mathcal{B}$  我们做与  $\mathcal{A}$  平行的操作:  $\{\mathcal{B}(e_1), \dots, \mathcal{B}(e_r)\}$  是  $\text{Im}(\mathcal{B})$  的一组基, 我们将它扩张为  $\mathbb{F}^m$  的一组基



$\{\mathcal{B}(e_1), \dots, \mathcal{B}(e_r), g_{r+1}, \dots, g_m\}$ , 接下来我们定义  $\mathbb{F}^m$  上的线性变换

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{F}^m &\longrightarrow \mathbb{F}^m \\ \mathcal{A}(e_i) &\longmapsto \mathcal{B}(e_i), \quad 1 \leq i \leq r \\ f_i &\longmapsto g_i, \quad r+1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

由于  $\varphi$  将  $\mathbb{F}^m$  的一组基映为另一组基, 所以  $\varphi$  是线性同构, 且  $\mathcal{B} = \varphi \circ \mathcal{A}$  (我们只需验证两边作用在  $\mathbb{F}^n$  的基  $\{e_1, \dots, e_n\}$  上效果相同即可), 取  $P$  为  $\varphi$  在标准正交基下的矩阵, 则  $B = PA$  □

评价 运用线性空间进行解题的常用技巧: 设  $\text{Ker}(\mathcal{A})$  的一组基为  $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ , 将它扩充为  $\mathbb{F}^n$  上的一组基  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , 则我们有  $\{\mathcal{A}(e_1), \dots, \mathcal{A}(e_r)\}$  是  $\text{Im}(\mathcal{A})$  的一组基

**习题 6** 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ , 且  $\text{gcd}(f, g) = 1$ , 证明

$$\text{rank} f(A) + \text{rank}(g(A)) = n + \text{rank} f(A)g(A)$$

**证明 解法 1 (打洞):** 由 Bezout 定理知,  $\exists u(x), v(x) \in \mathbb{C}[x], \text{s.t. } fu + gv = 1$ , 进而

$$f(A)u(A) + g(A)v(A) = I_n$$

所以

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \rightarrow r_1 + r_2} \begin{pmatrix} f(A) & g(A)v(A) \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \rightarrow c_1 + c_2} \begin{pmatrix} f(A) & f(A)u(A) + g(A)v(A) \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(A) & I_n \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_1} \begin{pmatrix} f(A) & I_n \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 - g(A)r_1} \begin{pmatrix} I_n & f(A) \\ 0 & -f(A)g(A) \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \rightarrow -c_1 f(A)} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -f(A)g(A) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以  $\text{rank} f(A) + \text{rank} g(A) = n + \text{rank}(-f(A)g(A)) = n + \text{rank} f(A)g(A)$

解法 2: 设  $\{e_1, \dots, e_n\}$  是  $\mathbb{F}^n$  的一组基, 定义线性变换

$$\mathcal{A}(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n)A$$

则我们有

$$\begin{cases} f(\mathcal{A})(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n)f(A) \\ g(\mathcal{A})(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n)g(A) \end{cases}$$

所以  $\text{rank} f(A) = \dim \text{Im}(f(\mathcal{A})), \text{rank} g(A) = \dim \text{Im}(g(\mathcal{A}))$ , 由于  $f(\mathcal{A})u(\mathcal{A}) + g(\mathcal{A})v(\mathcal{A}) = \text{Id}$ , 所以  $\forall \alpha \in \mathbb{F}^n$

$$\alpha = \text{Id}(\alpha) = f(\mathcal{A})(u(\mathcal{A})(\alpha)) + g(\mathcal{A})(v(\mathcal{A})(\alpha)) \in \text{Im}(f(\mathcal{A})) + \text{Im}(g(\mathcal{A}))$$

所以  $\mathbb{F}^n = \text{Im}(f(\mathcal{A})) + \text{Im}(g(\mathcal{A}))$ , 由维数公式

$$\begin{aligned} n &= \dim(\mathbb{F}^n) = \dim(\text{Im}(f(\mathcal{A})) + \text{Im}(g(\mathcal{A}))) \\ &= \dim(\text{Im} f(\mathcal{A})) + \dim(\text{Im} g(\mathcal{A})) - \dim(\text{Im}(f(\mathcal{A})) \cap \text{Im}(g(\mathcal{A}))) \\ &= \text{rank} f(A) + \text{rank} g(A) - \dim(\text{Im}(f(\mathcal{A})) \cap \text{Im}(g(\mathcal{A}))) \end{aligned}$$

下面证明  $\dim(\text{Im}(f(\mathcal{A})) \cap \text{Im}(g(\mathcal{A}))) = \text{rank} f(A)g(A)$



**Claim:**  $\text{Im}(f(\mathcal{A})) \cap \text{Im}(g(\mathcal{A})) = \text{Im}(f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}))$

Proof Of Claim : 一方面

$$\begin{cases} (f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}))(\alpha) = f(\mathcal{A})(g(\mathcal{A})(\alpha)) \in \text{Im}(f(\mathcal{A})) \implies \text{Im}(f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})) \subseteq \text{Im}(f(\mathcal{A})) \\ (f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}))(\alpha) = (g(\mathcal{A})f(\mathcal{A}))(\alpha) = g(\mathcal{A})(f(\mathcal{A})(\alpha)) \in \text{Im}(g(\mathcal{A})) \implies \text{Im}(f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})) \subseteq \text{Im}(g(\mathcal{A})) \end{cases}$$

所以  $\text{Im}(f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})) \subseteq \text{Im}(f(\mathcal{A})) \cap \text{Im}(g(\mathcal{A}))$

另一方面, 若  $\alpha \in \text{Im}(f(\mathcal{A})) \cap \text{Im}(g(\mathcal{A}))$ , 则  $\exists \beta, \gamma \in \mathbb{F}^n$ , s.t.  $\alpha = f(\mathcal{A})(\beta) = g(\mathcal{A})(\gamma)$ , 所以

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{Id}(\alpha) = f(\mathcal{A})u(\mathcal{A})(\alpha) + g(\mathcal{A})v(\mathcal{A})(\alpha) \\ &= f(\mathcal{A})u(\mathcal{A})g(\mathcal{A})(\gamma) + g(\mathcal{A})v(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\beta) \\ &= f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})[u(\mathcal{A})(\gamma) + v(\mathcal{A})(\beta)] \in \text{Im}(f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})) \end{aligned}$$

即  $\text{Im}(f(\mathcal{A})) \cap \text{Im}(g(\mathcal{A})) \subseteq \text{Im}(f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}))$ , 故二者相等

两边同时取维数即得  $\dim(\text{Im}(f(\mathcal{A})) \cap \text{Im}(g(\mathcal{A}))) = \dim(\text{Im}(f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}))) = \text{rank} f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})$  □

**习题 7** 设  $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , 证明:  $\text{rank}(A+B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \iff \exists P \in \mathbb{F}^{m \times m}$  可逆,  $Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$  可逆, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$$

其中  $\text{rank}(A) = r, \text{rank}(B) = s$ , 且  $r + s \leq \min\{m, n\}$

**证明** ( $\Leftarrow$ ): 由条件有

$$P(A+B)Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{pmatrix}$$

进而  $\text{rank}(A+B) = r + s = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

( $\Rightarrow$ ): 设  $\{e_1, \dots, e_n\}$  是  $\mathbb{F}^n$  的一组基,  $\{f_1, \dots, f_m\}$  是  $\mathbb{F}^m$  的一组基, 定义线性映射

$$\mathcal{A}(e_1, \dots, e_n) = (f_1, \dots, f_m)A, \quad \mathcal{B}(e_1, \dots, e_n) = (f_1, \dots, f_m)B$$

**Claim1:**  $\text{rank}(A+B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \iff \text{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \text{Im}(\mathcal{A}) \oplus \text{Im}(\mathcal{B})$

Proof Of Claim ( $\Leftarrow$ ): 若  $\text{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \text{Im}(\mathcal{A}) \oplus \text{Im}(\mathcal{B})$ , 则

$$\text{rank}(A+B) = \dim(\text{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B})) = \dim(\text{Im}(\mathcal{A}) \oplus \text{Im}(\mathcal{B})) = \dim(\text{Im}(\mathcal{A})) + \dim(\text{Im}(\mathcal{B})) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

( $\Rightarrow$ ): 因为  $\text{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \subseteq \text{Im}(\mathcal{A}) + \text{Im}(\mathcal{B})$ , 所以

$$\text{rank}(A+B) = \dim(\text{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B})) \leq \dim(\text{Im}(\mathcal{A}) + \text{Im}(\mathcal{B})) \leq \dim(\text{Im}(\mathcal{A})) + \dim(\text{Im}(\mathcal{B})) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

由  $\text{rank}(A+B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$  知, 上面全为等号, 所以  $\dim(\text{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B})) = \dim(\text{Im}(\mathcal{A})) + \dim(\text{Im}(\mathcal{B}))$ , 由维数定理知  $\text{Im}(\mathcal{A}) + \text{Im}(\mathcal{B})$  为直和

**Claim2:**  $\text{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \text{Im}(\mathcal{A}) \oplus \text{Im}(\mathcal{B}) \iff \begin{cases} \text{Ker}(\mathcal{A}) \cap \text{Ker}(\mathcal{B}) = \text{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \\ \text{Ker}(\mathcal{A}) + \text{Ker}(\mathcal{B}) = \mathbb{F}^n \end{cases}$



Proof Of Claim ( $\Rightarrow$ ): 若  $\text{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \text{Im}(\mathcal{A}) \oplus \text{Im}(\mathcal{B})$ , 则

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{B})) &= n - \dim(\text{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B})) = n - \dim(\text{Im}(\mathcal{A}) \oplus \text{Im}(\mathcal{B})) \\ &= n - \dim(\text{Im}(\mathcal{A})) - \dim(\text{Im}(\mathcal{B})) = n - (n - \dim(\text{Ker}(\mathcal{A}))) - (n - \dim(\text{Ker}(\mathcal{B}))) \\ &= \dim(\text{Ker}(\mathcal{A})) + \dim(\text{Ker}(\mathcal{B})) - n \\ &= \dim(\text{Ker}(\mathcal{A}) + \text{Ker}(\mathcal{B})) - \dim(\text{Ker}(\mathcal{A}) \cap \text{Ker}(\mathcal{B})) - n \\ &\leq \dim(\text{Ker}(\mathcal{A}) \cap \text{Ker}(\mathcal{B})) \end{aligned}$$

第四行到第五行我们将  $\dim(\text{Ker}(\mathcal{A}) + \text{Ker}(\mathcal{B})) - n$  放为零, 此外我们有  $\text{Ker}(\mathcal{A}) \cap \text{Ker}(\mathcal{B}) \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ , 所以  $\dim(\text{Ker}(\mathcal{A}) \cap \text{Ker}(\mathcal{B})) \leq \dim(\text{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{B}))$ , 所以  $\text{Ker}(\mathcal{A}) \cap \text{Ker}(\mathcal{B}) = \text{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ , 且上面第四行到第五行的放缩为等号, 即  $\dim(\text{Ker}(\mathcal{A}) + \text{Ker}(\mathcal{B})) = n$ , 即  $\text{Ker}(\mathcal{A}) + \text{Ker}(\mathcal{B}) = \mathbb{F}^n$

( $\Leftarrow$ ): 将上面的过程倒过来即可

由断言我们知

$$\text{rank}(A + B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \implies \begin{cases} \text{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \text{Im}(\mathcal{A}) \oplus \text{Im}(\mathcal{B}) \\ \text{Ker}(\mathcal{A}) \cap \text{Ker}(\mathcal{B}) = \text{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \\ \text{Ker}(\mathcal{A}) + \text{Ker}(\mathcal{B}) = \mathbb{F}^n \end{cases}$$

所以  $\dim(\text{Ker}(\mathcal{A}) \cap \text{Ker}(\mathcal{B})) = \dim(\text{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{B})) = n - \dim(\text{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B})) = n - (r + s)$ , 我们设  $\{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{n-s}\}$  为  $\text{Ker}(\mathcal{A}) \cap \text{Ker}(\mathcal{B})$  的一组基, 我们将其扩充为  $\text{Ker}(\mathcal{B})$  的一组基  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{n-s}\}$  ( $\dim(\text{Ker}(\mathcal{B})) = n - \dim(\text{Im}(\mathcal{B})) = n - s$ ), 再将其扩充为  $\text{Ker}(\mathcal{A})$  的一组基  $\{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{n-s}, \alpha_{n-s+1}, \dots, \alpha_n\}$  ( $\dim(\text{Ker}(\mathcal{A})) = n - \dim(\text{Im}(\mathcal{A})) = n - r$ )

**Claim 3:**  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  是  $\mathbb{F}^n$  的一组基

Proof Of Claim: 由于  $\text{Ker}(\mathcal{A}) + \text{Ker}(\mathcal{B}) = \mathbb{F}^n$ , 所以  $\forall x \in \mathbb{F}^n$  均可被  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  表示, 若它们线性相关, 则  $\dim(\mathbb{F}^n) < n$ , 这显然矛盾!

同上一题可知  $\{\mathcal{A}(\alpha_1), \dots, \mathcal{A}(\alpha_r)\}$  是  $\text{Im}(\mathcal{A})$  的一组基,  $\{\mathcal{B}(\alpha_{n-s+1}), \dots, \mathcal{B}(\alpha_n)\}$  是  $\text{Im}(\mathcal{B})$  的一组基, 由于  $\text{Im}(\mathcal{A}) \oplus \text{Im}(\mathcal{B})$  是直和, 所以  $\{\mathcal{A}(\alpha_1), \dots, \mathcal{A}(\alpha_r), \mathcal{B}(\alpha_{n-s+1}), \dots, \mathcal{B}(\alpha_n)\}$  线性无关 (假设线性相关会与  $\text{Im}(\mathcal{A}) \cap \text{Im}(\mathcal{B}) = \emptyset$  矛盾!), 为表达方便, 我们重新记  $\{\mathcal{A}(\alpha_1), \dots, \mathcal{A}(\alpha_r)\} = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ , 重新记  $\{\mathcal{B}(\alpha_{n-s+1}), \dots, \mathcal{B}(\alpha_n)\} = \{\beta_{m-s+1}, \dots, \beta_m\}$ , 我们将  $\{\beta_1, \dots, \beta_r, \beta_{m-s+1}, \dots, \beta_m\}$  扩充为  $\mathbb{F}^m$  的一组基  $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ , 则我们有

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_m) \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_m) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{pmatrix}$$

考虑  $\mathbb{R}^n$  的基  $\{e_1, \dots, e_n\}$  到基  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  的过渡矩阵  $Q$ ,  $\mathbb{F}^m$  的基  $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  到基  $\{f_1, \dots, f_m\}$  的过渡矩阵  $P$ , 即

$$\begin{cases} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (e_1, \dots, e_n)Q \\ (f_1, \dots, f_m) = (\beta_1, \dots, \beta_m)P \end{cases}$$



则

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathcal{A}(e_1, \dots, e_n)Q = (f_1, \dots, f_m)AQ = (\beta_1, \dots, \beta_m)PAQ \\ \mathcal{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)Q = (f_1, \dots, f_m)BQ = (\beta_1, \dots, \beta_m)PBQ \end{cases}$$

所以

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{pmatrix}$$

□

**习题 8** 设  $V_1, \dots, V_m$  是数域  $\mathbb{F}$  上向量空间  $V$  的  $m$  个真子空间, 证明: 在  $V$  中必存在一个向量  $\alpha$ , 它不属于任何一个  $V_i$ , 即  $V$  的有限个真子空间不能覆盖  $V$

**证明** 对真子空间的个数  $m$  进行归纳,  $m=1$  时, 由于  $V_1$  是  $V$  的真子空间, 则结论显然成立, 假设  $m=k$  时结论成立, 下面证明  $m=k+1$  时结论也成立

由归纳假设,  $\exists \alpha \in V, \text{s.t. } \forall V_i, \alpha \notin V_i, 1 \leq i \leq k$ , 若  $\alpha \notin V_{k+1}$ , 则命题得证; 若  $\alpha \in V_{k+1}$ , 我们取  $\beta \notin V_{k+1}$ , 考虑

$$M = \{t\alpha + \beta | t \in \mathbb{F}\}$$

**Claim:**  $M$  和每个  $V_i, 1 \leq i \leq k+1$  至多只有一个交点

首先  $M \cap V_{k+1} = \emptyset$ , 否则  $\exists t_0\alpha + \beta \in V_{k+1} \implies \beta \in V_{k+1}$ , 与  $\beta$  的选取矛盾! 接下来考虑  $1 \leq i \leq k$ , 若  $\exists t_1 \neq t_2, \text{s.t. } t_1\alpha + \beta, t_2\alpha + \beta \in V_i$ , 则  $(t_1 - t_2)\alpha \in V_i \implies \alpha \in V_i$ , 矛盾! 因此  $\#(M \cap V_i) \leq 1$

而  $M$  中有无数个点, 排除  $M$  中有限个  $V_i$  中的点, 故结论得证

□

**习题 9** 设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间,  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  是  $V$  上的非零线性变换, 求证:

- (1)  $\exists \alpha \in V, \text{s.t. } \varphi_i(\alpha) \neq 0, (1 \leq i \leq k)$
- (2)  $\exists \alpha \in V, \text{s.t. } \varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_k(\alpha)$  互不相同

**证明** (1). 由于  $\varphi_i \neq 0$ , 所以  $\text{Ker}\varphi_i$  是  $V$  的真子空间, 由上一题知, 有限个真子空间不能覆盖全空间, 进而  $\exists \alpha \in V, \text{s.t. } \alpha \notin \text{Ker}\varphi_i, \forall i$

(2). 考虑  $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j, 1 \leq i < j \leq k$ , 应用 (1) 的结论即可

□

**习题 10** 设  $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 满足  $\varphi^2 = \varphi$ , 且  $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_m$ , 求证  $r(\varphi) = r(\varphi_1) + \dots + r(\varphi_m)$  成立的充要条件是  $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0, \forall i \neq j$

**证明** 令  $V_0 = \text{Im}\varphi, V_i = \text{Im}\varphi_i$ , 则由  $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_m$  可得  $V_0 \subseteq V_1 + \dots + V_m$

( $\Leftarrow$ ): 若  $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0$ , 则

$$\varphi_i = (\varphi_1 + \dots + \varphi_m)\varphi_i = \varphi\varphi_i \implies V_i \subseteq V_0 \implies V_1 + \dots + V_m \subseteq V_0$$

进而  $V_0 = V_1 + \dots + V_m$ , 两边同时取维数得  $r(\varphi) = r(\varphi_1) + \dots + r(\varphi_m)$

( $\Rightarrow$ ): 首先有  $\dim V_0 \leq \dim(V_1 + \dots + V_m) \leq \dim V_1 + \dots + \dim V_m$ , 由  $r(\varphi) = r(\varphi_1) + \dots + r(\varphi_m)$  知  $\dim V_0 = \dim V_1 + \dots + \dim V_m$ , 即上述不等号为等号, 由直和的充要条件知  $V_1 + \dots + V_m$  是直和, 且

$$V_0 = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$$



因为  $\text{Im}\varphi_1 = V_i \subseteq V_0 = \text{Im}\varphi$ , 故对  $V$  中任意向量  $\alpha, \exists\beta \in V, \text{s.t. } \varphi_i(\alpha) = \varphi(\beta)$ , 所以

$$\begin{aligned}\varphi_i(\alpha) &= \varphi(\beta) = \varphi^2(\beta) = (\varphi_1 + \cdots + \varphi_m)\varphi(\beta) \\ &= (\varphi_1 + \cdots + \varphi_m)\varphi_i(\alpha) = \varphi_1\varphi_i(\alpha) + \cdots + \varphi_m\varphi_i(\alpha)\end{aligned}$$

由直和表示的唯一性知  $\varphi_i^2(\alpha) = \varphi_i(\alpha), \varphi_j\varphi_i(\alpha) = 0, \forall j \neq i$ , 于是  $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0$

□