

第十周作业答案

涂嘉乐

2026 年 5 月 25 日

习题 1 (Stein, Ch2, T21) Suppose that f and g are measurable functions on \mathbb{R}^d

- (1) Prove that $f(x-y)g(y)$ is measurable on \mathbb{R}^{2d}
- (2) Show that if f and g are integrable on \mathbb{R}^d , then $f(x-y)g(y)$ is integrable on \mathbb{R}^{2d}
- (3) Recall the definition of the convolution of f and g given by

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy$$

Show that $f * g$ is well defined for a.e. x ; that is, $f(x-y)g(y)$ is integrable on \mathbb{R}^d for a.e. x

- (4) Show that $f * g$ is integrable whenever f and g are integrable, and that

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

with equality if f and g are non-negative

- (5) The Fourier transform of an integrable function f is defined by

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

Check that \widehat{f} is bounded and is a continuous function of ξ . Prove that for each ξ one has

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$

本题我们需要使用讲义 18 中的两个结论，这里统一列出

引理 1 设 f 在 \mathbb{R}^n 上可测， $\tilde{f}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x), (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ，则 \tilde{f} 在 \mathbb{R}^{n+1} 上可测（进而通过归纳法，对 $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ，若 $g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x), (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ ，即 $y \in \mathbb{R}^m$ ，同理可证 $g(x, y)$ 在 \mathbb{R}^{n+m} 中可测）

引理 2 若 f 在 \mathbb{R}^n 上可测，则

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x-y) \end{aligned}$$

在 \mathbb{R}^{2n} 上可测

证明 (1). 由引理 1，将 $g(y)$ 视为 \mathbb{R}^{2d} 中的函数时它仍然可测；由引理 2 知 $f(x-y)$ 在 \mathbb{R}^{2d} 上可测，所以 $f(x-y)g(y)$ 为 \mathbb{R}^{2d} 中的可测函数



(2). 由 Tonelli 定理以及 Lebesgue 积分的平移不变性

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x-y)g(y)| dx dy &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| dx \right) |g(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx \right) |g(y)| dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| dy \right) < +\infty \end{aligned}$$

因此 $f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$

(3). 因为 $f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$, 由 Fubini 定理 (F2) 知 $x \mapsto \int [f(x-y)g(y)]_x dy \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 即

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} [f(x-y)g(y)]_x dy \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

(4). 因为 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 所以 $\int_{\mathbb{R}^d} |f| dx, \int_{\mathbb{R}^d} |g| dx < +\infty$, 由 (2) 知

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |(f * g)(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| dy \right) dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| dx \right) < +\infty \end{aligned}$$

故 $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 且上式即 $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$, 若 f, g 非负, 则上面过程中的不等号变为等号

(5). \hat{f} is bounded: 由 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 知

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < +\infty$$

故 $|\hat{f}(\xi)|$ 关于 ξ 一致有界

\hat{f} is continuous: 我们给出两种证明 \hat{f} 连续性的方法, 一种是严格的 ε - δ 语言, 另一种是使用控制收敛定理

方法一: 因为

$$\begin{aligned} |e^{-2\pi i x \cdot \xi_1} - e^{-2\pi i x \cdot \xi_2}| &= |\cos(2\pi i x \cdot \xi_1) - \cos(2\pi i x \cdot \xi_2) - i[\sin(2\pi i x \cdot \xi_1) - \sin(2\pi i x \cdot \xi_2)]| \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos(2\pi x \cdot \xi_1) \cos(2\pi x \cdot \xi_2) - 2 \sin(2\pi x \cdot \xi_1) \sin(2\pi x \cdot \xi_2)} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos(2\pi x \cdot (\xi_1 - \xi_2))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi_1) - \hat{f}(\xi_2)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi_1} - f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi_2} dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (e^{-2\pi i x \cdot \xi_1} - e^{-2\pi i x \cdot \xi_2}) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \cdot \sqrt{2 - 2 \cos[2\pi x \cdot (\xi_1 - \xi_2)]} dx \end{aligned}$$

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \gg 1, \text{s.t. } \int_{B(0,N)^c} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}$, 因为 $x \in \overline{B(0,N)}$ 时, 我们取 $|\xi_1 - \xi_2|$ 足够小使得 $2\pi N|\xi_1 - \xi_2| < \frac{\pi}{2}$, 因为 $|x \cdot (\xi_1 - \xi_2)| \leq |x| \cdot |\xi_1 - \xi_2| \leq N|\xi_1 - \xi_2|$, 所以

$$\sqrt{2 - 2 \cos[2\pi x \cdot (\xi_1 - \xi_2)]} \leq \sqrt{2 - 2 \cos(2\pi N|\xi_1 - \xi_2|)} \rightarrow 0, \text{ as } |\xi_1 - \xi_2| \rightarrow 0$$



取 δ 满足 $\forall |\xi_1 - \xi_2| < \delta, \sqrt{2 - 2\cos(2\pi N|\xi_1 - \xi_2|)} < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}$, 因此当 $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi_1) - \hat{f}(\xi_2)| &\leq 2 \int_{B(0,N)^c} |f(x)| dx + \int_{B(0,N)} |f(x)| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}} dx \\ &\leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

所以 $\hat{f}(\xi)$ 是连续的

方法二: 对 $\forall \xi_0 \in \mathbb{R}^d$, 由数分知识我们知道, 要证明 \hat{f} 在 $\xi = \xi_0$ 处连续, 我们只需证明对 $\forall \xi_n \rightarrow \xi_0$, 有 $\hat{f}(\xi_n) \rightarrow \hat{f}(\xi_0)$, 注意到 $|f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi_n}| = |f(x)|$, 且 $|f|$ 可积可作为控制函数, 所以

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi_0) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi_0} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi_n} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi_n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi_n) \end{aligned}$$

其中第一行到第二行使用了控制收敛定理, 进而由 ξ_0 的任意性知 \hat{f} 是连续的

最后我们证明恒等式, 由积分的平移不变性

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy \right) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} \cdot e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \right) \\ &= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

□

习题 2 (Stein, Ch2, T22) Prove that if $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ and

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

then $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ as $|\xi| \rightarrow \infty$. (This is the Riemann-Lebesgue lemma.)

[Hint:] Write

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} [f(x) - f(x - \xi')] e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

where

$$\xi' = \frac{1}{2} \frac{\xi}{|\xi|^2}$$

and use Proposition 2.5.

注 因为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cos(2\pi i x \cdot \xi) dx - i \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \sin(2\pi i x \cdot \xi) dx$$



由本题结论我们知道 $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ as $|\xi| \rightarrow \infty$, 此时实部虚部都分别趋于零, 即

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cos(2\pi i x \cdot \xi) dx \rightarrow 0 \text{ as } |\xi| \rightarrow \infty \\ \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \sin(2\pi i x \cdot \xi) dx \rightarrow 0 \text{ as } |\xi| \rightarrow \infty \end{cases}$$

这个就是数分里面的 Riemann-Lebesgue 引理

证明 设 $\xi' = \frac{\xi}{2|\xi|^2}$, 则由平移不变性

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - \xi') e^{-2\pi i (x - \xi') \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x - \xi') e^{-2\pi i x \cdot \xi + \pi i} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} f(x - \xi') e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx - \int_{\mathbb{R}^d} f(x - \xi') e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} [f(x) - f(x - \xi')] e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \end{aligned}$$

由平移变换的连续性

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x - \xi')| dx \rightarrow 0 \text{ as } |\xi'| \rightarrow 0 \iff |\xi| \rightarrow \infty$$

□

习题 3 (Stein, Ch2, T24) Consider the convolution

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy$$

- (1) Show that $f * g$ is uniformly continuous when f is integrable and g bounded.
- (2) If in addition g is integrable, prove that $(f * g)(x) \rightarrow 0$ as $|x| \rightarrow \infty$.

证明 (1). 设 $|g| \leq M$, 则

$$\begin{aligned} |(f * g)(x_1) - (f * g)(x_2)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1 - y)g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x_2 - y)g(y) dy \right| \\ &\leq M \int_{\mathbb{R}^d} |f(x_1 - y) - f(x_2 - y)| dy \\ &\leq M \|f(x_1 - y) - f(x_2 - y)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

由平移变换的连续性, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t. } \forall |x_1 - y) - (x_2 - y)| = |x_1 - x_2| < \delta$ 时, 就有 $\|f(x_1 - y) - f(x_2 - y)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{M}$, 因此当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|(f * g)(x_1) - (f * g)(x_2)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

故 $f * g$ 一致连续

(2). 由 Stein, Ch2, T21(4) (本次作业第一题) 知, 当 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 时, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 由第一问知 $f * g$ 一致连续, 进而由 Stein, Ch2, T6(2) 知 (见下一题), $(f * g)(x) \rightarrow 0$ as $|x| \rightarrow \infty$ □



习题 4 (Stein, Ch2, T6(2)) 设 f 可积且在 \mathbb{R}^d 上一致连续, 则

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

证明 反证, 假设 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, s.t. $\forall M > 0, \exists |x| > M$, s.t. $|f(x)| \geq \varepsilon_0$, 所以我们可以构造一个数列 $\{x_n\}$ 满足: $|x_{n+1}| > |x_n| + 1$, 且 $\forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x_n)| \geq \varepsilon_0$, 具体如下:

取 $M = 1$, 则 $\exists |x_1| > 1$, s.t. $|f(x_1)| \geq \varepsilon_0$, 取 $M_2 = |x_1| + 1$, 则 $\exists |x_2| > M_2$, s.t. $|f(x_2)| \geq \varepsilon_0$, 类似地我们可以归纳定义得到 $\{x_n\}$

由 f 一致连续知, 对 $\frac{\varepsilon_0}{2} > 0, \exists \delta' > 0$, s.t. $\forall |x_1 - x_2| < \delta', |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, 取 $\delta = \min\{\delta', \frac{1}{2}\}$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 在 $(x_n - \delta, x_n + \delta)$ 上, 均有 $|f(x)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$, 因此我们得到了无穷多个半径为 δ , 且两两不交的球, 且球内的点取值均大于 $\frac{\varepsilon_0}{2}$, 故 $m(\{x : |f(x)| > \frac{\varepsilon_0}{2}\}) = \infty$, 由切比雪夫不等式

$$\int_{\mathbb{R}} |f| dx \geq \frac{\varepsilon_0}{2} m\left(\left\{x : |f(x)| > \frac{\varepsilon_0}{2}\right\}\right) = \infty$$

故 f 不可积, 矛盾! 因此 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ □

习题 5 对 $f \in L^1_{loc}$, 定义

$$f^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f| dm$$

$$(Mf)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{r > 0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f| dm$$

分别称为 f 的非中心 Hardy-Littlewood 极大函数和中心 Hardy-Littlewood 极大函数, 证明

$$(Mf)(x) \leq f^*(x) \leq 2^n (Mf)(x)$$

证明 一方面, 作为集合有 $\{B_r(x) : r > 0\} \subseteq \{B : B \ni x\}$, 因此在两边关于 $\frac{1}{m(B)} \int_B |f| dm$ 取上确界即得

$$(Mf)(x) \leq f^*(x)$$

另一方面, 对任意 $B \ni x$, 设 B 的半径为 r , 则 $B \subseteq B_{2r}(x)$, 由 Mf 的定义得

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f| dm = 2^n \frac{1}{m(B_{2r}(x))} \int_B |f| dm \leq 2^n \frac{1}{m(B_{2r}(x))} \int_{B_{2r}(x)} |f| dm \stackrel{\text{def}}{\leq} 2^n (Mf)(x)$$

再对 LHS 在 $\{B : B \ni x\}$ 上取上确界得 $f^*(x) \leq 2^n (Mf)(x)$ □

习题 6 证明: 若 $f \in L^1_{loc}$, 则 f^* 可测

证明 我们证明对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}, E_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{x : f^*(x) > \alpha\}$ 是开集, 由开集可测以及 α 的任意性知 f^* 可测. 由 f^* 的定义知 $\exists B_x \ni x$, s.t.

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f| dm > \alpha$$

事实上对于这个 B_x , 我们有 $B_x \subseteq E_\alpha$, 这是因为 $\forall x' \in B_x$

$$f^*(x') = \sup_{B \ni x'} \frac{1}{m(B)} \int_B |f| dm \geq \frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f| dm > \alpha$$



即 $x' \in E_\alpha \implies B_x \subseteq E_\alpha$, 故 E_α 是开集

□