第十三周作业答案

涂嘉乐

2026 年 6 月 1 日

习题 1 (Stein,Ch3,T16) Show that if F is of bounded variation in $[a,b]$, then:

(a) $\int_a^b |F'(x)|\,\mathrm{d}x \le T_F(a,b)$.

(b) $\int_a^b |F'(x)|\,\mathrm{d}x = T_F(a,b)$ if and only if F is absolutely continuous.

As a result of (b), the formula $L = \int_a^b |z'(t)|\,\mathrm{d}t$ for the length of a rectifiable curve parametrized by z holds if and only if z is absolutely continuous.

注 书上对 $T_F(a,b)$ 的定义为

$$T_F(a,b) = \sup_{P:a=t_0<\cdots<t_n=b} \sum_{j=1}^{n} |F(t_j) - F(t_{j-1})|$$

实际上是老师讲义中的 $V_a^b(F)$，以下我们统一用老师讲义中的记号

证明 (a). 记 $G(x) = V_a^x(F)$，则 G 单调增，由单调函数微分定理 G' 几乎处处存在且

$$\int_a^b G'(x)\mathrm{d}x \le G(b) - G(a) = G(b)$$

由 $F \in BV[a,b]$ 知 F' 在 $[a,b]$ 上 a.e 存在，令 $E = \{x \in (a,b) : G'(x), F'(x)\text{均存在}\}$，则由前分析知 E 在 $[a,b]$ 中满测，进而对 $\forall x \in E$ 有

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{V_a^{x+h}(F) - V_a^x(F)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{V_x^{x+h}(F)}{h} \ge \lim_{h\to 0^+} \frac{|F(x+h) - F(x)|}{h} \\ &= |F'(x)| \end{aligned}$$

因此 $G'(x) \ge |F'(x)|$ a.e $x \in [a,b]$，所以

$$V_a^b(F) = G(b) \ge \int_a^b G'(x)\mathrm{d}x \ge \int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x$$

(b). $(\Longleftarrow)$: 此时 F 是绝对连续函数，进而是有界变差函数，由 (a) 已证一边的不等式，下面证明另

一边的不等式，对任意 $[a,b]$ 的划分 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，我们有

$$\begin{aligned}V(F,P)&=\sum_{j=1}^{n}|F(t_j)-F(t_{j-1})|\xlongequal{F\in AC[a,b]}\sum_{j=1}^{n}\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j}F'(x)\mathrm{d}x\right|\\&\le\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}|F'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b|F'(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对 LHS 关于所有划分 P 取上确界得 $V_a^b(F)\le\int_a^b|F'(x)|\mathrm{d}x$，所以

$$V_a^b(F)=\int_a^b|F'(x)|\mathrm{d}x$$

$(\Longrightarrow)$：由 $F\in BV[a,b]$ 以及单调函数微分定理的推论知 $F'\in L^1([a,b])$，进而由积分的连续性知

$$H(x)\overset{\text{def}}{=}\int_a^x|F'(t)|\mathrm{d}t\in AC[a,b]$$

我们先证明对 $\forall x\in(a,b),\int_a^x|F'(t)|\mathrm{d}t=V_a^x(F)$，即 $G(x)=H(x),\forall x\in(a,b)$，这是因为

$$V_a^b(F)=V_a^x(F)+V_x^b(F)\overset{(a)}{\ge}\int_a^x|F'(t)|\mathrm{d}t+\int_x^b|F'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b F'(t)\mathrm{d}t$$

由题设知上式全为等号,故 $\int_a^x|F'(t)|\mathrm{d}t=V_a^x(F)$;由 $H(x)$ 的绝对连续性,对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t.}\ \forall\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^N\subset[a,b]$ 两两不交，若 $\sum\limits_{i=1}^N(b_i-a_i)<\delta$，就有 $\sum\limits_{i=1}^N|H(b_i)-H(a_i)|<\varepsilon$，注意到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N|F(b_i)-F(a_i)|&\le\sum_{i=1}^N V_{a_i}^{b_i}(F)=\sum_{i=1}^N|V_a^{b_i}(F)-V_a^{a_i}(F)|\\&=\sum_{i=1}^N|G(b_i)-G(a_i)|=\sum_{i=1}^N|H(b_i)-H(a_i)|\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

所以 $F\in AC[a,b]$ □

习题 2 (Stein,Ch3,T19) Show that if $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is absolutely continuous, then

(a) f maps sets of measure zero to sets of measure zero.

(b) f maps measurable sets to measurable sets.

提示：对于 (a)，考虑先证明：对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t.}\ \forall\sum\limits_{n=1}^\infty|b_n-a_n|<\delta$，有 $\sum\limits_{n=1}^\infty|f(b_n)-f(a_n)|<\varepsilon$，其中 $I_n=(a_n,b_n)$ 是一族两两不交的区间；再使用开集结构定理

对于 (b)，先证明 f 把 F_σ 集打到 F_σ 集，再将可测集写为 F_σ 集与零测集的并集

证明 (a). 首先证明一个引理：对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t.}$ 对任意两两不交的开区间 $I_n=(a_n,b_n),n\in\mathbb{N}^*$，只要 $\sum\limits_{n=1}^\infty|b_n-a_n|<\delta$，就有 $\sum\limits_{n=1}^\infty|f(b_n)-f(a_n)|<\varepsilon$

Proof of Lemma：假设不然，则 $\exists\varepsilon_0>0,\text{s.t.}\ \forall\delta>0,\exists$ 两两不交的开区间 $I_n^{(\delta)}=(a_n^{(\delta)},b_n^{(\delta)}),n\in\mathbb{N}^*,\text{s.t.}\ \sum\limits_{n=1}^\infty|b_n^{(\delta)}-a_n^{(\delta)}|<\delta$，但 $\sum\limits_{n=1}^\infty|f(b_n^{(\delta)})-f(a_n^{(\delta)})|\ge\varepsilon_0$ $(*)$

考虑 $\frac{\varepsilon_0}{2}>0$，由绝对连续性知 $\exists\delta_1>0,\text{s.t.}$ 对任意有限两两不交的开区间 $I_n=(a_n,b_n),n=1,\cdots,N$，只要 $\sum\limits_{n=1}^N|b_n-a_n|<\delta_1$，就有 $\sum\limits_{n=1}^N|f(b_n)-f(a_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$；

对这个 δ_1 使用反证假设 $(*)$，得到对应 $I_n^{(\delta_1)}=(a_n^{(\delta_1)},b_n^{(\delta_1)})$，满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(b_n^{(\delta_1)})-f(a_n^{(\delta_1)})|\geq\varepsilon_0$，而对 $\forall k\in\mathbb{N}^*$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{k}|b_n^{(\delta_1)}-a_n^{(\delta_1)}|<\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n^{(\delta_1)}-a_n^{(\delta_1)}|<\delta_1$，由绝对连续性知对 $\forall k\in\mathbb{N}^*$ 有

$$\sum_{n=1}^{k}|f(b_n^{(\delta_1)})-f(a_n^{(\delta_1)})|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

令 $k\to\infty$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(b_n^{(\delta_1)})-f(a_n^{(\delta_1)})|\leq\frac{\varepsilon_0}{2}$，这与反证假设 $(*)$ 矛盾！

回到本题，设 N 是零测集，对 $\forall\varepsilon>0$，取引理中对应的 δ，则 $\exists O\overset{\text{open}}{\supset}N,\text{s.t. }m(O)<\delta$，由开集结构定理，$\exists\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 两两不交，使得 $O=\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n$，对每个 I_n，设

$$m_n=\inf\{f(x):x\in I_n\},\quad M_n=\max\{f(x):x\in I_n\}$$

由 f 在 $\overline{I}_n$ 上连续知，m_n,M_n 可在 $\overline{I}_n$ 上取得，即 $\exists x_n,y_n\in\overline{I}_n,\text{s.t. }f(x_n)=m_n,f(y_n)=M_n$（$O$ 的测度有限，不会出现某个 I_n 的端点是无穷的情形），设 $J_n=(x_n,y_n)$ 或 (y_n,x_n)，则 $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ 两两不交，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|J_n|\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n|<\delta$，由引理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(y_n)-f(x_n)|<\varepsilon$，所以

$$m_*(f(N))\leq m(f(O))=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}f(I_n)\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}m(f(I_n))\leq\sum_{n=1}^{\infty}|f(y_n)-f(x_n)|<\varepsilon$$

由 ε 的任意性知 $m_*(f(N))=0$，即 $f(N)$ 也是零测集

(b). 首先证明 f 把 F_σ 集打到 F_σ 集：对 F_σ 集 $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，因为 $F_n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_n\cap[-k,k]\overset{\text{def}}{=}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_n^{(k)}$ 为一列紧集的可数并，而紧集在连续函数下的像仍为紧集，故为闭集，所以

$$f(F)=f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}F_n^{(k)}\right)=\bigcup_{n,k=1}^{\infty}f(F_n^{(k)})$$

仍为 F_σ 集，故可测

对任意可测集 $E,\exists F_\sigma$ 集 F 以及零测集 $N,\text{s.t. }E=F\cup N$，所以

$$f(E)=f(F)\cup f(N)$$

仍可测 □

习题 3 (Stein,Ch3,T20) This exercise deals with functions F that are absolutely continuous on $[a,b]$ and are increasing. Let $A=F(a)$ and $B=F(b)$.

(a) There exists such an F that is in addition strictly increasing, but such that $F'(x)=0$ on a set of positive measure.

(b) The F in (a) can be chosen so that there is a measurable subset $E\subset[A,B]$, $m(E)=0$, so that $F^{-1}(E)$ is not measurable.

(c) Prove, however, that for any increasing absolutely continuous F, and E a measurable subset of $[A,B]$, the set $F^{-1}(E)\cap\{F'(x)>0\}$ is measurable.

Hint: (a) Let $F(x)=\int_a^x\chi_K(t)\,dt$, where K is the complement of a Cantor-like set C of positive measure. For (b), note that $F(C)$ is a set of measure zero. Finally, for (c) prove first that $m(O)=\int_{F^{-1}(O)}F'(x)\,dx$ for any open set O.

证明 (a). 通过平移与伸缩（考虑 $t=\frac{x-a}{b-a}$），不妨设 $[a,b]=[0,1]$，记 $\mathcal{C}$ 是有正测度的类 Cantor 集（见 Stein,Ch1,T4，第一次习题课讲义中有），记 $K=[0,1]\backslash\mathcal{C}$ 考虑

$$F(x)=\int_0^x \chi_K(t)\mathrm{d}t$$

则

- F 严格增：对 $0\le x<y\le 1$，由构造知

$$K=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$$

其中 G_n 是 2^{n-1} 个两两不交、长度趋于零的开区间之并。由 $\mathcal{C}$ 是无处稠密集知我们可以找到 $(x',y')\subset K$, s.t. $(x',y')\subset(x,y)$，故

$$F(y)-F(x)=\int_x^y \chi_K(t)\mathrm{d}t\ge\int_{x'}^{y'}\chi_K(t)\mathrm{d}t=y'-x'>0$$

- $F'=0$ a.e $x\in\mathcal{C}$：
方法一：由 $\chi_K\in L^1([a,b])$ 知，$F'(x)=\chi_K(x)$ a.e $x\in(a,b)$，所以对 a.e $x\in\mathcal{C}$ 有 $F'(x)=0$
方法二：由 Lebesgue 密度定理（见 Lec20）知对 a.e $x\in\mathcal{C}\subset K^c$，有

$$\lim_{h\to0^+}\frac{m(K\cap B(x,h))}{m(B(x,h))}=0$$

即

$$\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\chi_K(x)\mathrm{d}x=0$$

下证对这样的 $x, F'(x)=0$，因为

$$0\le\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\chi_K(t)\mathrm{d}t\le\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\chi_K(t)\mathrm{d}t\to0$$

$$0\le\frac{F(x)-F(x-h)}{h}=\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}\chi_K(t)\mathrm{d}t\le\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\chi_K(t)\mathrm{d}t\to0$$

进而 F 在 x 处的左右导数都为零，即 $F'(x)=0$，而这样的 x 在 $\mathcal{C}$ 中 a.e 存在，由 $\mathcal{C}$ 具有正测度即证

(b). 因为 K 是可数个开区间之并，我们记 $K=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$，由 F 严格增知 $F(K)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(F(a_n),F(b_n))$；另一方面由 F 严格增和 $K\cap\mathcal{C}=\varnothing$ 知 $F(K)\cap F(\mathcal{C})=\varnothing$，且 $F(K)\cup F(\mathcal{C})=F(K\cup\mathcal{C})$（很容易验证，大家自己验证一下），所以

$$m(F(K))+m(F(\mathcal{C}))=m(F(K)\cup F(\mathcal{C}))=m(F(K\cup\mathcal{C}))=m(F[0,1])=F(1)-F(0)=B-A$$

另一方面，回忆 $F(K)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(F(a_n),F(b_n))$，则

$$\begin{aligned}B-A=F(1)-F(0)&=\int_0^1\chi_K(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\chi_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)}(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n}\chi_K\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}[F(b_n)-F(a_n)]\\&=m(F(K))\end{aligned}$$

联立二式得 $m(F(\mathcal{C}))=0$，由 F 严格增知 F 是单射，进而 $F^{-1}(F(\mathcal{C}))=\mathcal{C}$，由正测集一定有不可测子集知（这个命题的证明可以看群文件中 25mid 的第二题），我们取 $\mathcal{N}\subset\mathcal{C}$ 是不可测集，取 $E=F(\mathcal{N})$，则

$$\begin{cases}m(E)=m(F(\mathcal{N}))\le m(F(\mathcal{C}))=0\Longrightarrow m(E)=0\\F^{-1}(E)=F^{-1}(F(\mathcal{N}))=\mathcal{N}\text{不可测}\end{cases}$$

(c). Case 1. $E=O$ 为开集，由 F 连续知 $F^{-1}(O)$ 也是开集，再由 F 绝对连续知 $F'\in L^1([a,b])$，进而 F' 可测，$\{x:F'(x)>0\}$ 可测，故可测集的交仍为可测集

Case 2. $E=N$ 为零测集，令

$$A_n=F^{-1}(E)\cap\left\{F'(x)>\frac{1}{n}\right\}$$

则 $F^{-1}(E)\cap\{F'(x)>0\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，因此我们只需证明 $\forall n\in\mathbb{N}^*,A_n$ 可测

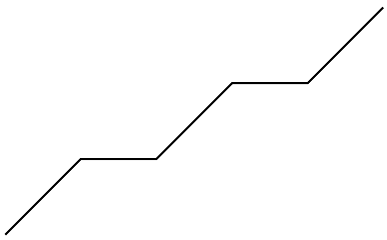
Claim：对开集 $O\subset[A,B]$ 有

$$m(O)=\int_{F^{-1}(O)}F'(x)dx$$

Proof of Claim：由开集结构定理，O 可写为可数个两两不交的开区间之并 $O=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$，对每个 (a_n,b_n)，由 N-L 公式知

$$\int_{F^{-1}(a_n,b_n)}F'(x)\mathrm{d}x=b_n-a_n$$

Remark：这里我们需要注意 F 只是递增不是严格增，记 $\sup\{x\in(a,b):F(x)=a_n\}=u_n,\inf\{x\in(a,b):F(x)=b_n\}=v_n$，则 $F^{-1}(a_n,b_n)=(u_n,v_n)$，大家可以看下面这个函数感受一下



由于 $O=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n),\{(a_n,b_n)\}$ 两两不交，且 F 递增，所以 $\{F^{-1}(a_n,b_n)\}$ 也两两不交，故原像 $F^{-1}(O)=$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F^{-1}(a_n,b_n)$，此外由 F 单增知 F' 非负可测，进而由逐项积分定理

$$\begin{aligned} m(O) &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{F^{-1}((a_n,b_n))} F'(x)\mathrm{d}x = \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F^{-1}((a_n,b_n))} F'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{F^{-1}(O)} F'(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

故断言得证

回到 $E=N$ 为零测集的情形，对 $\forall \varepsilon>0, \exists O \overset{\text{open}}{\supset} N, \text{s.t. } m(O)<\varepsilon$，从而由外测度的单调性

$$\begin{aligned} \varepsilon > m(O) &= \int_{F^{-1}(O)} F'(x)\mathrm{d}x \geq \int_{F^{-1}(O)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\}} F'(x)\mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{n} m\left(F^{-1}(O)\cap\left\{F'(x)>\frac{1}{n}\right\}\right) \\ &\geq \frac{1}{n} m_*\left(F^{-1}(N)\cap\left\{F'(x)>\frac{1}{n}\right\}\right) \end{aligned}$$

由 n 是固定的知,令 $\varepsilon\to 0$ 有 $A_n = F^{-1}(N)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\}$ 是零测集,进而 $F^{-1}(N)\cap\{F'(x)>0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 也是零测集

Case 3. E 为一般可测集，则 $\exists G_\delta$ 集 $G=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} O_i$ 以及零测集 N，使得 $E=G\backslash N$

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\left(F^{-1}(O_i)\cap\left\{F'(x)>\frac{1}{n}\right\}\right)\backslash\left(F^{-1}(N)\cap\left\{F'(x)>\frac{1}{n}\right\}\right)\right)$$

为可测集，进而 $F^{-1}(E)\cap\{F'(x)>0\}$ 可测 □

注 对于原像集我们有

$$F^{-1}(G\backslash N) = F^{-1}(G)\backslash F^{-1}(N), \quad F^{-1}(\bigcap_i O_i) = \bigcap_i F^{-1}(O_i)$$

但是对于像集我们不一定有这些集合关系，因为不同的点可能映到同一个值，大家可以自己举反例试一试

习题 4 (Stein,Ch3,T32) Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Prove that f satisfies the Lipschitz condition

$$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$$

for some M and all $x,y\in\mathbb{R}$, if and only if f satisfies the following two properties:

(i) f is absolutely continuous.

(ii) $|f'(x)|\leq M$ for a.e. x.

证明 不妨设 $M>0$，$M=0$ 时 f 为常值函数，平凡成立

$(\Longleftarrow)$: 由 f 绝对连续知可对 f 使用微积分基本定理

$$|f(x)-f(y)| = \left|\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y |f'(t)|\mathrm{d}t \leq M|x-y|$$

$(\Longrightarrow)$：对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，则对 $\forall\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^N$，只要 $\sum\limits_{i=1}^N(b_i-a_i)<\delta$，就有

$$\sum_{i=1}^N|f(b_i)-f(a_i)|\leq M\sum_{i=1}^N|b_i-a_i|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

所以 f 绝对连续，进而 f a.e 可微，设 x 为一个可微点，则我们有

$$|f(x+h)-f(x)|\leq M|h|\Longrightarrow\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leq M$$

令 $h\to0$ 即得 $|f'(x)|\leq M$ $\square$