第十一周作业答案

涂嘉乐

2026 年 5 月 25 日

习题 1 (Stein,Ch3,T4) Prove that if f is integrable on $\mathbb{R}^d$, and f is not identically zero, then

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|^d},$$

for some $c > 0$ and all $|x| \geq 1$.

Conclude that f^* is not integrable on $\mathbb{R}^d$. Then, show that the weak type estimate

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leq c/\alpha$$

for all $\alpha > 0$ whenever $\int |f| = 1$, is best possible in the following sense: if f is supported in the unit ball with $\int |f| = 1$, then

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \geq c'/\alpha$$

for some $c' > 0$ and all sufficiently small α.

[Hint: For the first part, use the fact that $\int_B |f| > 0$ for some ball B.]

注

(1) 这里我们将 f is not identically zero 理解为 f 不 a.e 为零

(2) 同学们做这题时可能会卡的一个点在于：在 H-L 极大函数的定义

$$f^*(x) \overset{\text{def}}{=} \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f| \mathrm{d}m$$

中 B 是开球，因此 $x \notin B_{|x|}(0)$，但是实际上 $m(B_{|x|}(0)) = m(\overline{B_{|x|}(0)})$，零测集不影响积分大小，所以我们可以将 H-L 极大函数中取上确界的 B 的范围改为闭球，换句话说，B 只要是个包含 x 的球（无论开闭）就行

证明 • 证明 $\exists c > 0, f^*(x) \geq \frac{c}{|x|^d}, \forall |x| \geq 1$

由 f 不 a.e 为零知 $\int_{\mathbb{R}^d} |f| \mathrm{d}m > 0$，因此 $\exists r_0 > 1,$ s.t.

$$\int_{B_{r_0}(0)} |f| \mathrm{d}m = c_0 > 0$$

当 $1 \leq |x| < r_0$ 时，

$$f^*(x) \geq \frac{1}{m(B_{r_0}(0))} \int_{B_{r_0(0)}} |f| \mathrm{d}m = \frac{c_0}{m(B_{r_0(0)})} \overset{\text{def}}{=} c_1 \geq \frac{c_1}{|x|^d}$$

当 $|x| \geq r_0$ 时，

$$f^*(x) \geq \frac{1}{m(B_{|x|}(0))}\int_{B_{|x|}(0)} |f|\mathrm{d}m \geq \frac{1}{m(B_1(0))|x|^d}\int_{B_{r_0}(0)} |f|\mathrm{d}m = \frac{c_0}{m(B_1(0))|x|^d} \overset{\text{def}}{=} \frac{c_2}{|x|^d}$$

我们取 $c = \min\{c_1, c_2\} > 0$ 即可，从而由 $\int_{\mathbb{R}^d} f^*\mathrm{d}m \geq \int_{|x|\geq 1} \frac{c}{|x|^d}\mathrm{d}m = +\infty$ 知 f^* 不可积

• 证明弱型估计 $m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{c}{\alpha}$ 是“最优”估计，即证明对足够小的 α，$\exists c' > 0, \text{s.t. } m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \geq \frac{c'}{\alpha}$

首先由 Hardy-Littlewood 极大不等式知如下弱型估计成立

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{3^d}{\alpha}||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \frac{3^d}{\alpha}$$

前面我们证明了 $f^*(x) \geq \frac{c}{|x|^d}, \forall |x| \geq 1$，其中 c 是某个常数；对充分小的 $\alpha \ll 1$（这里我们不妨要求 $\frac{c}{2\alpha} \geq 1$），则当 $\frac{c}{|x|^d} > \alpha$ ($\iff$ $|x|^d < \frac{c}{\alpha}$) 时，我们有

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|^d} > \alpha$$

所以

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \geq m\left(\left\{x : 1 \leq |x|^d < \frac{c}{\alpha}\right\}\right) \geq m\left(\left\{x : \frac{c}{2\alpha} \leq |x|^d < \frac{c}{\alpha}\right\}\right) = \frac{cm(B_1(0))}{2\alpha}$$

我们取 $c' = \frac{cm(B_1(0))}{2}$ 即证 □