第八次习题课讲义

涂嘉乐

2026 年 1 月 7 日

1 第十七周作业答案

习题 1 (P347,T8) 设 n 阶正交方阵 O 的特征值不等于 -1，证明：方阵 I_n+O 可逆，方阵 $K=(I_n-O)(I_n+O)^{-1}$ 是斜对称方阵，且 $O=(I_n-K)(I_n+K)^{-1}$

证明 设 O 的特征值是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则 I_n+O 的特征值是 $\lambda_1+1,\cdots,\lambda_n+1$，由于 $\lambda_i\neq -1$，所以

$$\det(I_n+O)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)\neq 0$$

即 I_n+O 可逆；因为

$$\begin{aligned}K^T&=[(I_n-O)(I_n+O)^{-1}]^T=[(I_n+O)^T]^{-1}(I_n-O)^T\\&=(I_n+O^T)^{-1}(I_n-O^T)=[O^T(I_n+O)]^{-1}[O^T(O-I_n)]\\&=(I_n+O)^{-1}OO^T(O-I_n)=(I_n+O)^{-1}(O-I_n)\\&=(O-I_n)(I_n+O)^{-1}=-K\end{aligned}$$

其中第三行到第四行 $(I_n+O)^{-1}$ 和 $O-I_n$ 可交换是因为

$$\begin{aligned}(I_n+O)^{-1}\text{和}O-I_n\text{可交换}&\iff (I_n+O)^{-1}(O-I_n)=(O-I_n)(I_n+O)^{-1}\\&\iff (O-I_n)(I_n+O)=(I_n+O)(O-I_n)\\&\iff O^2-I_n=O^2-I_n\end{aligned}$$

所以 K 是斜对称方阵,下面验证 $O=(I_n-K)(I_n+K)^{-1}$,即 $O(I_n+K)=I_n-K$,即验证 $OK+K=I_n-O$,再次利用 $(I_n+O)^{-1}$ 和 $O-I_n$ 可交换得

$$\begin{aligned}OK+K&=(O+I_n)K=(O+I_n)(I_n-O)(I_n+O)^{-1}\\&=(O+I_n)(I_n+O)^{-1}(I_n-O)=I_n-O\end{aligned}$$

故得证 □

评价 本题也可以通过对课本 7.5 节定理 5 中所给的矩阵进行操作来证明

习题 2 (P353,T5) 设 n 维 Euclid 空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$，且对任意 $\alpha\in V,||\mathscr{A}(\alpha)||\leq||\alpha||$，证明：$\mathscr{A}$ 是自伴的

证明 由 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$ 知，$\mathscr{A}$ 是投影变换（此事在第十周作业第一题有记载），因此存在 V 的子空间 $U,W,\text{s.t.}\ V=U\oplus W$，对 $\forall v\in V$，它有直和分解 $v=u+w$，满足 $\mathscr{A}(v)=u$

Claim: $U^{\perp}=W$

Proof Of Claim : 注意到 $\dim U^{\perp}=\dim W=n-\dim U$，因此我们只需证明 $W\subseteq U^{\perp}$，假设不然，则 $\exists w\in W,\text{s.t.}\ U$ 上的函数 $f_w(u)\overset{\text{def}}{=}\langle u,w\rangle$ 不恒为零，则它的值域是 $\mathbb{R}$，因为只要有一点 $\langle u,w\rangle\neq 0$，将 u 替换为 tu，可以由 $f_w(tu)=\langle tu,w\rangle=t\langle u,w\rangle$ 得到任意实数，所以 $\exists u_0,\text{s.t.}\ f_w(u_0)=-||w||^2$，即

$$\langle u_0,w\rangle=-\langle w,w\rangle\leq 0$$

考虑 $\alpha=u_0+w$，则 $\mathscr{A}(\alpha)=u_0$，依题意有

$$||u_0||^2\leq ||u_0+w||^2=||u_0||^2+2\langle u_0,w\rangle+\langle w,w\rangle\Longrightarrow\langle u_0,w\rangle\geq 0$$

结合上面两式可得 $-\langle w,w\rangle=\langle u_0,w\rangle=0$，即 $w=0$，但是此时 $f_w(u)=\langle u,w\rangle\equiv 0$，这与 f_w 不恒为零的假设矛盾！

我们选取 U 的一组标准正交基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$，$W$ 的一组标准正交基 $\{\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n\}$，由直和知 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 V 的一组标准正交基，且由投影变换的定义知

$$\begin{cases}\mathscr{A}(\alpha_i)=\alpha_i, & 1\leq i\leq k\\ \mathscr{A}(\alpha_j)=0, & k+1\leq j\leq n\end{cases}$$

所以

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}I_k & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

即 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下的方阵为对称阵，即 $\mathscr{A}$ 是自伴的 □

习题 3 (P353,T7) 设 $\mathscr{A}$ 是 2 维 Euclid 空间 V 的斜自伴变换，证明：对 $\forall\alpha,\beta\in V$，均有 $\langle\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta)\rangle=(\det\mathscr{A})\langle\alpha,\beta\rangle$

证明 若 $\mathscr{A}$ 的特征值全为零，则 $\mathscr{A}$ 是零变换，结论平凡成立；否则 $\mathscr{A}$ 的特征值为 $\pm ib,b\neq 0$，由课本 P352 定理 9 知，存在 V 的标准正交基 $\{\alpha_1,\alpha_2\},\text{s.t.}$

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}$$

设 $\alpha=\lambda_1\alpha_1+\mu_1\alpha_2,\beta=\lambda_2\alpha_1+\mu_2\alpha_2$，则

$$\begin{aligned}\langle\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta)\rangle&=\langle\mathscr{A}(\lambda_1\alpha_1+\mu_1\alpha_2),\mathscr{A}(\lambda_2\alpha_1+\mu_2\alpha_2)\rangle\\&=\langle -b\lambda_1\alpha_2+b\mu_1\alpha_1,-b\lambda_2\alpha_2+b\mu_2\alpha_1\rangle\\&=b^2\lambda_1\lambda_2+b^2\mu_1\mu_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\det\mathscr{A})\langle\alpha,\beta\rangle&=b^2\langle\lambda_1\alpha_1+\mu_1\alpha_2,\lambda_2\alpha_1+\mu_2\alpha_2\rangle\\&=b^2(\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2)\end{aligned}$$

故二者相等 □

为了解答 P365,T8，我们需要 P365,T7 的结论，此处我们一并证明

习题 4 (P365,T7) 设 $A \geq 0, B \geq 0$，证明：$\det(A+B) \geq \det A + \det B$

证明 Case 1.A, B 均不可逆

此时 $RHS = 0$，而对 $\forall x \in \mathbb{R}^n, x(A+B)x^T = xAx^T + xBx^T \geq 0$，即 $A+B \geq 0 \Longrightarrow \det(A+B) \geq 0 = \det A + \det B$

Case 2.A, B 至少有一者可逆

不妨设 B 可逆，则 $B > 0$，此时 $C \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{B}$ 存在（$B = C^2$），且 $C > 0$，因为

$$\det(A+B) = \det(BB^{-1}A + B) = \det(B)\det(B^{-1}A + I_n)$$

因此我们只需证明

$$\det(I_n + B^{-1}A) \geq 1 + \det(B)^{-1}\det(A)$$

两边再同时乘以 $\det B$ 即可，利用 $\det(I_n + XY) = \det(I_n + YX)$ 得

$$\det(I_n + B^{-1}A) = \det(I_n + C^{-1}C^{-1}A) = \det(I_n + C^{-1}AC^{-1})$$

因为 C^{-1} 正定（见下面的注记），且 C 也是对称方阵，则对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$x(C^{-1}AC^{-1})x^T = (xC^{-1})A(xC^{-1})^T \geq 0$$

所以 $C^{-1}AC^{-1} \geq 0$，设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 $C^{-1}AC^{-1}$ 的所有特征值，则它们均非负，且 $1+\lambda_1, \cdots, 1+\lambda_n$ 是 $I_n + C^{-1}AC^{-1}$ 的所有特征值，故

$$\begin{aligned}\det(I_n + B^{-1}A) = \det(I_n + C^{-1}AC^{-1}) &= \prod_{i=1}^n (1+\lambda_i) \\ &\geq 1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i = 1 + \det(C^{-1}AC^{-1}) = 1 + \det(B^{-1}A)\end{aligned}$$

两边同乘 $\det(B)$ 即得证 □

评价 S 正定 $\Longrightarrow \exists P$ 可逆 ,s.t. $S = P^TP \Longrightarrow S^{-1} = P^{-1}(P^T)^{-1}$，取 $Q = (P^T)^{-1}$，则 $S^{-1} = Q^TQ$，故 S^{-1} 正定

习题 5 (P365,T8) 设 $S \geq 0$，证明：

$$\det S \leq S\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} S\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & n \\ k+1 & k+2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

其中 $k = 1, 2, \cdots, n$

证明 Case 1. 若 $\operatorname{rank}(S) < n$

即 S 不可逆，所以 $\det S = 0$，由 S 半正定知，它的所有主子式都是非负的，即 $RHS \geq 0 = LHS$

Case 2. 若 $\operatorname{rank}(S) = n$

此时 $S > 0$，我们将 S 分块为

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{pmatrix}, \quad S_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

即证明 $\det S \le \det S_{11} \det S_{22}$，由 $S > 0$ 知，S 的 $1, 2, \cdots, k$ 阶顺序主子式是正的，所以 $S_{11} > 0$，考虑用 S_{11} 将 S_{12}, S_{12}^T 打掉，即

$$\begin{pmatrix} I_k & \\ -S_{12}^T S_{11}^{-1} & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & -S_{11}^{-1} S_{12} \\ & I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & \\ & S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} \end{pmatrix}$$

设 $T = \begin{pmatrix} I_k & -S_{11}^{-1} S_{12} \\ & I_{n-k} \end{pmatrix}, \tilde{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & \\ & S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} \end{pmatrix}$，则由 T 可逆知 $\tilde{S} = T^T S T$ 仍为正定方阵，取 $x = (0, x_1), 0 \in \mathbb{R}^{1\times k}, x_1 \in \mathbb{R}^{1\times(n-k)}$，由 $\tilde{S}$ 正定知 $x \tilde{S} x^T > 0, \forall x_1 \ne 0$，而

$$x \tilde{S} x^T = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & \\ & S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^T \end{pmatrix} = x_1 (S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}) x_1^T > 0$$

即 $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} > 0$，由于 S_{11}^{-1} 也正定，所以由定义可证 $S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}$ 半正定，因此我们可以用上题的结论

$$\begin{aligned} \det(S_{22}) &= \det[(S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}) + (S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12})] \\ &\ge \det(S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}) + \det(S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}) \\ &\ge \det(S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}) \end{aligned}$$

第二行到第三行是因为 $\det(S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12})$ 行列式非负，直接放掉，所以

$$\begin{aligned} \det S = \det \tilde{S} &= \det S_{11} \det(S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}) \\ &\le \det S_{11} \det S_{22} \end{aligned}$$

□

习题 6 (P365,T11) 设 S_1, S_2 是 n 阶实对称方阵，$S_1 \ge 0$，且 $\det(S_1 + iS_2) = 0$，其中 $i^2 = -1$，证明：存在非零的实行向量 $x \in \mathbb{R}^n$, s.t. $x(S_1 + iS_2) = 0$

证明 由于 $\det(S_1 + iS_2) = 0$，所以 $(S_1 + iS_2)y = 0$ 存在非零解，即 $\exists y = u + vi \in \mathbb{C}^n, u, v \in \mathbb{R}^n$, s.t. $(S_1 + iS_2)y = 0$，将 $y = u + vi$ 代入，展开得

$$(S_1 u - S_2 v) + i(S_1 v + S_2 u) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} S_1 u - S_2 v = 0 \\ S_1 v + S_2 u = 0 \end{cases}$$

对第一式两边同时左乘 u^T；第二式两边同时左乘 v^T，再将两式相加得

$$\begin{cases} u^T S_1 u - u^T S_2 v = 0 \\ v^T S_1 v + v^T S_2 u = 0 \end{cases} \xRightarrow{v^T S_2 v = v^T S_2 u} u^T S_1 u + v^T S_1 v = 0$$

即 $u^T S_1 u = v^T S_1 v = 0$

Claim: $S_1 u = S_1 v = 0$

Proof Of Claim : 由 $S_1 \ge 0$ 知，$C \overset{\text{def}}{=} \sqrt{S_1} \ge 0$，所以 $u^T C C u = ||Cu||^2 = 0 \Longrightarrow Cu = 0 \Longrightarrow S_1 u = CCu = 0$，同理 $S_1 v = 0$

由于 $y = u + vi$ 非零，所以 u, v 不全为零，不妨设 $u \ne 0$，取 $x = u^T$，则

$$u^T (S_1 + iS_2) = [(S_1 + iS_2) u]^T = 0$$

□

习题 7 (P375,T2) 设 $A>0$，且 B 为对称方阵，证明：多项式 $\det(\lambda A-B)$ 的根都是实数

证明 因为 $A>0$，所以存在可逆方阵 S, s.t. $A=S^TS$，故

$$\begin{aligned}\det(\lambda A-B)&=\det(\lambda S^TS-S^TS(S^TS)^{-1}B)=\det(S^TS)\det(\lambda I_n-S^{-1}(S^T)^{-1}B)\\&=\det(S^TS)\det(\lambda I_n-(S^{-1})^TBS^{-1})\end{aligned}$$

(第一行到第二行利用了 $\lambda^n\det(\lambda I_m-AB)=\lambda^m\det(\lambda I_n-BA)$，此处 $n=m$)，所以 $\det(\lambda A-B)$ 的就是 $\det(\lambda I_n-(S^{-1})^TBS^{-1})$ 的根，即为 $(S^{-1})^TBS^{-1}$ 的特征值，而它是对称方阵，故特征值是实数 □

习题 8 (P375,T13) 设 $0\le A\le B$，证明：$\sqrt{A}\le\sqrt{B}$

证明 由半正定矩阵的等价命题，我们只需证明 $\sqrt{B}-\sqrt{A}$ 的特征值均非负，设 λ 是 $\sqrt{B}-\sqrt{A}$ 的特征值，α 是对应特征向量，则

$$(\sqrt{B}-\sqrt{A})\alpha=\lambda\alpha$$

移项可得

$$\begin{cases}\sqrt{B}\alpha=(\sqrt{A}+\lambda I_n)\alpha & (1)\\ (\sqrt{B}-\lambda I_n)\alpha=\sqrt{A}\alpha & (2)\end{cases}\xRightarrow{\text{转置}}\begin{cases}\alpha^T\sqrt{B}=\alpha^T(\sqrt{A}+\lambda I_n) & (3)\\ \alpha^T(\sqrt{B}-\lambda I_n)=\alpha^T\sqrt{A} & (4)\end{cases}$$

$(1)(3),(2)(4)$ 相乘得

$$\begin{cases}\alpha^TB\alpha=\alpha^T(\sqrt{A}+\lambda I_n)^2\alpha=\alpha^TA\alpha+2\lambda\alpha^T\sqrt{A}\alpha+\lambda^2\alpha^T\alpha\\ \alpha^TA\alpha=\alpha^T(\sqrt{B}-\lambda I_n)^2\alpha=\alpha^TB\alpha-2\lambda\alpha^T\sqrt{B}\alpha+\lambda^2\alpha^T\alpha\end{cases}$$

两式相减得

$$\alpha^T(B-A)\alpha=\lambda\alpha^T(\sqrt{A}+\sqrt{B})\alpha$$

由于 $\sqrt{A}+\sqrt{B}\ge 0$，我们如下讨论

Case 1.$\alpha^T(\sqrt{A}+\sqrt{B})\alpha>0$

由于 $B-A\ge 0$，则 $LHS\ge 0$，故 $\lambda\ge 0$

Case 2.$\alpha^T(\sqrt{A}+\sqrt{B})\alpha=0$

此时 $\alpha^T\sqrt{A}\alpha=\alpha^T\sqrt{B}\alpha=0$，同习题六 (P365,T11) 的断言可证 $\sqrt{A}\alpha=\sqrt{B}\alpha=0$，又因为 $(\sqrt{B}-\sqrt{A})\alpha=\lambda\alpha$，所以 $\lambda\alpha=0\Longrightarrow\lambda=0$

综上 $\lambda\ge 0$，即 $\sqrt{B}\ge\sqrt{A}$ □

为了证明下题，我们首先需要一个引理

引理 1 设 $A=\left(a_{ij}\right)$ 为 n 阶半正定实对称矩阵，求证：若 $a_{ii}=0$，则 A 的第 i 行、第 i 列的所有元素为零

证明 对 $\forall j\ne i$，考虑 A 的第 i,j 行、列构成的主子式

$$\begin{vmatrix}a_{ii}&a_{ij}\\a_{ji}&a_{jj}\end{vmatrix}=a_{ii}a_{jj}-a_{ij}^2=-a_{ij}^2$$

由 A 半正定知，它非负，所以只能是 $a_{ij}=0$ □

习题 9 (P375,T15) 证明：两个 n 阶半正定对称方阵 S_1,S_2 可以同时相合于对角形，即存在 n 阶可逆方阵 P，使得 P^TS_1P,P^TS_2P 都是对角方阵（提示：方阵 $S=S_1+S_2$ 是半正定的）

证明 注意到 $S=S_1+S_2$ 是半正定矩阵，则 n 阶可逆矩阵 Ps.t.

$$P^T(S_1+S_2)P=\operatorname{diag}(I_r,O)$$

设此时

$$P^TS_1P=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^T & A_{22}\end{pmatrix}\quad P^TS_2P=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{12}^T & B_{22}\end{pmatrix}$$

则 $A_{22}+B_{22}=O$，因为 P^TS_1P,P^TS_2P 也是半正定矩阵，所以它的第 ii 元非负，特别地当 $r+1\le i\le n$ 时，因为 $(P^TS_1P)_{ii}+(P^TS_2P)_{ii}$ 是 $A_{22}+B_{22}$ 的对角元，故为零，由非负性知只能是 $(P^TS_1P)_{ii}=(P^TS_2P)_{ii}=0,\forall r+1\le i\le n$，由引理知

$$P^TS_1P=\begin{pmatrix}A_{11} & O\\ O & O\end{pmatrix}\quad P^TS_2P=\begin{pmatrix}B_{11} & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

又因为 A_{11} 也是半正定阵，所以 $\exists Q$ 正交阵，使得

$$Q^TA_{11}Q=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)\overset{\text{def}}{=}D$$

取 $Y=P\begin{pmatrix}Q & \\ & I_{n-r}\end{pmatrix}$，则

$$\begin{aligned}Y^TS_1Y&=\begin{pmatrix}Q^T & \\ & I_{n-r}\end{pmatrix}P^TS_1P\begin{pmatrix}Q & \\ & I_{n-r}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}Q^T & \\ & I_{n-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & \\ & I_{n-r}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}D & O\\ O & O\end{pmatrix}\end{aligned}$$

另一方面，$P^TS_2P=P^T(S_1+S_2)P-P^TS_1P=\operatorname{diag}(I_r-A_{11},O)$

$$\begin{aligned}Y^TS_2Y&=\begin{pmatrix}Q^T & \\ & I_{n-r}\end{pmatrix}P^TS_2P\begin{pmatrix}Q & \\ & I_{n-r}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}Q^T & \\ & I_{n-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r-A_{11} & \\ & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & \\ & I_{n-r}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}I_r-D & \\ & O\end{pmatrix}=\operatorname{diag}(1-\lambda_1,\cdots,1-\lambda_r,0,\cdots,0)\end{aligned}$$

□

习题 10 (P375,T17) 设 $\mu\in\mathbb{R},C$ 是 n 阶实方阵，$A=\mu I_n+iC$ 是 n 阶复正交方阵，即 $AA^T=I_n=A^TA$，其中 $i^2=-1$，证明 C 是斜对称的，并且

(1) 当 $\operatorname{rank}(C)<n$ 时，$A=\pm I_n$

(2) 当 $\operatorname{rank}(C)=n$ 时，存在 n 阶实正交方阵 O，使得

$$O^TAO=\operatorname{diag}\left[\begin{pmatrix}\mu & i\sqrt{\mu^2-1}\\ -i\sqrt{\mu^2-1} & \mu\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\mu & i\sqrt{\mu^2-1}\\ -i\sqrt{\mu^2-1} & \mu\end{pmatrix}\right]$$

证明 将 $A^TA=I_n$ 代入得

$$(\mu I_n+iC^T)(\mu I_n+iC)=I_n$$

展开即

$$\mu^2I_n-C^TC+i\mu(C^T+C)=I_n\Longrightarrow\begin{cases}C^TC=(\mu^2-1)I_n\\ \mu(C^T+C)=O\end{cases}$$

若 $\mu=0$，则 $I_n=-C^TC$，对比等式两边的迹，左边为 n，右边为 $-\sum\limits_{1\le i,j\le n}c_{ij}^2<0$，这显然不可能！所以 $\mu\neq 0$，故 $C^T+C=O$，C 是斜对称方阵

(1). 若 $\operatorname{rank}(C)<n$，由 $(\mu^2-1)I_n=C^TC$ 知，$\mu=\pm 1$，否则左边秩为 n，右边秩小于 n，矛盾！因此 $C^TC=O$，进而 $C=O$，故 $A=\mu I_n=\pm I_n$

(2). 若 $\operatorname{rank}(C)=n$，由 C 是可逆斜对称方阵，可设它的特征值为 $\pm ia_1,\cdots,\pm ia_s$，且存在 $2s$ 阶正交方阵 O，使得

$$C=O\operatorname{diag}\left[\begin{pmatrix}0 & a_1\\ -a_1 & 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0 & a_s\\ -a_s & 0\end{pmatrix}\right]O^T$$

所以

$$C^TC=O\operatorname{diag}(a_1^2,a_1^2,\cdots,a_s^2,a_s^2)O^T=(\mu^2-1)I_n$$

所以 $\mu^2-1=a_i^2,\forall 1\le i\le s$，因此 $a_i=\sqrt{\mu^2-1},\forall i$，代入 A 的表达式即得

$$O^TAO=\operatorname{diag}\left[\begin{pmatrix}\mu & i\sqrt{\mu^2-1}\\ -i\sqrt{\mu^2-1} & \mu\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\mu & i\sqrt{\mu^2-1}\\ -i\sqrt{\mu^2-1} & \mu\end{pmatrix}\right]$$

□

习题 11 (P375,T23) 设 A,B 为 n 阶实对称方阵，且方阵 A 是正定的，证明：

$$|\det(A+iB)|\ge\det A$$

证明 由 A 正定可设 $C=\sqrt{A}$，即证明

$$|\det(C^2+iB)|\ge\det C^2$$

而 $\det(C^2+iB)=\det[C^2(I_n+i(C^{-1})(C^{-1})B)]=\det(C^2)\det(I_n+i(C^{-1})(C^{-1})B)$，两边同时消去 $\det C^2$，故只需证明

$$|\det(I_n+i(C^{-1})(C^{-1})B)|\ge 1$$

利用 $\det(I_n-XY)=\det(I_n-YX)$ 得

$$|\det(I_n+i(C^{-1})(C^{-1})B)|=|\det(I_n+i(C^{-1})B(C^{-1}))|$$

而 $S \overset{\text{def}}{=} (C^{-1})B(C^{-1})$ 也是对称阵，它的特征值均为实数，设为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则 I_n+iS 的特征值为 $1+i\lambda_1,\cdots,1+i\lambda_n$，故

$$\begin{aligned}|\det(I_n+i(C^{-1})(C^{-1})B)| = |\det(I_n+iS)| &= \left|\prod_{i=1}^n(1+i\lambda_i)\right| \\ &= \prod_{i=1}^n|(1+i\lambda_i)| = \prod_{i=1}^n\sqrt{1+\lambda_i^2}\geq 1\end{aligned}$$

□

2 补充习题

习题 12 (P347,T4) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的两组向量，证明：存在满足 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\beta_i, 1\leq i\leq k$ 的正交变换 $\mathscr{A}$ 的充分必要条件是这两组向量的 Gram 方阵相等

证明 $(\Longrightarrow)$: 由正交变换保内积知 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\langle\beta_i,\beta_j\rangle, \forall 1\leq i,j\leq k$，即它们的 Gram 方阵的对应元素相等，故 Gram 方阵相等

$(\Longleftarrow)$: 由对应 Gram 方阵相等知，$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\langle\beta_i,\beta_j\rangle, \forall 1\leq i,j\leq k$，我们不妨假设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，否则可以退化为 $k-1$ 的情形，用数学归纳法即证，则此时由 P320,T6 知 $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 也线性无关

我们通过 Schmidt 正交化将 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$ 化为 $\{\xi_1,\cdots,\xi_k\}$, 再归一得到 $\{e_1,\cdots,e_k\}$, 对 $\{\beta_1,\cdots,\beta_k\}$ 同理进行 Schmidt 正交化得到 $\{\eta_1,\cdots,\eta_k\}$，再归一得到 $\{f_1,\cdots,f_k\}$，再将 $\{e_1,\cdots,e_k\},\{f_1,\cdots,f_k\}$ 分别扩张为 V 的两组标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_n\},\{f_1,\cdots,f_n\}$，定义线性变换

$$\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(f_1,\cdots,f_n)$$

则 $\mathscr{A}$ 把标准正交基映为标准正交基，故 $\mathscr{A}$ 是正交变换，回顾 Schmidt 正交化的过程，因为

$$\begin{cases}\xi_k=\alpha_k-\frac{\langle\alpha_k,\xi_{k-1}\rangle}{\langle\xi_{k-1},\xi_{k-1}\rangle}\xi_{k-1}-\frac{\langle\alpha_k,\xi_{k-2}\rangle}{\langle\xi_{k-2},\xi_{k-2}\rangle}\xi_{k-2}-\cdots-\frac{\langle\alpha_k,\xi_1\rangle}{\langle\xi_1,\xi_1\rangle}\xi_1\\ \eta_k=\beta_k-\frac{\langle\alpha_k,\eta_{k-1}\rangle}{\langle\eta_{k-1},\eta_{k-1}\rangle}\xi_{k-1}-\frac{\langle\alpha_k,\eta_{k-2}\rangle}{\langle\eta_{k-2},\eta_{k-2}\rangle}\eta_{k-2}-\cdots-\frac{\langle\alpha_k,\eta_1\rangle}{\langle\eta_1,\eta_1\rangle}\eta_1\end{cases}$$

因为在计算 ξ_i,η_i 的模长时，出现的 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$ 可以用等号等于 $\langle\beta_i,\beta_j\rangle$，所以不难看出 $||\xi_i||=||\eta_i||$，进而可以得到 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\beta_i$ □

习题 13 设 A,B 是 $m\times n$ 阶实矩阵，求证 $A^TA=B^TB \iff$ 存在 m 阶正交阵 Q, s.t. $A=QB$

证明 $(\Longleftarrow)$: $A=QB\Longrightarrow A^TA=B^TQ^TQB=B^TB$

$(\Longrightarrow)$: 取 $\mathbb{R}^m$ 上的标准内积 $\langle x,y\rangle=y^Tx$，考虑将 A,B 按列分块，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

因为

$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

同理有 $B^TB=G(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，即 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=G(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，由上题知，存在正交变换 $\mathscr{A}:V\to V$ 满足 $\mathscr{A}(\beta_i)=\alpha_i$，设 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 下的矩阵为 Q，其中 e_i 为只有第 i 元为 1，其余元素为零的单位向量，即

$$\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)Q$$

而 β_i 在 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 下的坐标即为 β_i，即 $\beta_i=(e_1,\cdots,e_n)\beta_i$，所以

$$\alpha_i=\mathscr{A}(\beta_i)=\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)\beta_i=(e_1,\cdots,e_n)Q\beta_i=Q\beta_i$$

所以

$$QB=Q\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q\beta_1 & \cdots & Q\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=A$$

□

命题 2 设 A 半正定，若 $x^TAx=0$，则 $Ax=0$

证明 取 A 的平方根 $C=\sqrt{A}$，则

$$||Cx||^2=x^TC^TCx=x^TCCx=x^TAx=0$$

故 $Cx=0\Longrightarrow Ax=CCx=0$ □

习题 14 设 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & D\end{pmatrix}$ 是半正定实对称矩阵，求证：$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}=\mathrm{rank}(A)$

证明 要证明 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}=\mathrm{rank}(A)$，只需证明线性方程组 $\begin{pmatrix}A\\ B^T\end{pmatrix}x=0$ 和 $Ax=0$ 同解即可（大家想想为什么）

一方面，若 $\begin{pmatrix}A\\ B^T\end{pmatrix}x=0$，则 $Ax=0$

另一方面，若 $Ax=0$，则

$$x^TMx=\begin{pmatrix}x^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}=x^TAx=0$$

由上面的命题知 $Mx=0$，即

$$0=\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax\\ B^Tx\end{pmatrix}$$

所以线性方程组 $\begin{pmatrix}A\\ B^T\end{pmatrix}x=0$ 和 $Ax=0$ 同解 □

习题 15 设 A 是 n 阶实对称矩阵，其特征值为 $\lambda_1\le\cdots\le\lambda_n$，求证：对 $\forall\alpha\in\mathbb{R}^n$

$$\lambda_1\alpha^T\alpha\le\alpha^TA\alpha\le\lambda_n\alpha^T\alpha$$

且前一个不等号成立当且仅当 $\alpha\in V_{\lambda_1}$；后一个不等号成立当且仅当 $\alpha\in V_{\lambda_n}$

证明 因为 A 是实对称矩阵，所以 $\exists O$ 为正交矩阵，使得

$$O^TAO = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

对 $\forall\alpha \in \mathbb{R}^n$，考虑 $\beta = O^T\alpha$，则

$$\alpha^TA\alpha = \beta^T\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\beta = \lambda_1 b_1^2 + \cdots + \lambda_n b_n^2 \le \lambda_n(b_1^2 + \cdots + b_n^2) = \lambda_n\beta^T\beta = \lambda_n\alpha^T\alpha$$

等号成立当且仅当若 $\lambda_i \ne \lambda_n, b_i = 0$，这也当且仅当 $\alpha \in V_{\lambda_n}$（大家想想为什么）

另一边不等式同理 □

习题 16 设 A, B 都是半正定实对称矩阵，其特征值分别为

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \quad \mu_1, \cdots, \mu_n$$

求证：AB 的特征值全落在 $[\lambda_1\mu_1, \lambda_n\mu_n]$ 中

证明 首先取 A 的平方根 $C = \sqrt{A}$，则 $AB = CCB$，由 $\lambda^m\det(\lambda I_n - XY) = \lambda^n\det(\lambda I_m - YX)$（此时 $n = m$）知，$AB = CCB$ 的特征值和 CBC 的特征值相同

设 λ 是 CBC 的一个特征值，α 是一个对应的特征向量，则 $CBC\alpha = \lambda\alpha$，所以由上一题的结论知

$$\begin{aligned}\lambda\alpha^T\alpha = \alpha^T(\lambda\alpha) = \alpha^TCBC\alpha &= (C\alpha)^TB(C\alpha)\\ &\ge \mu_1(C\alpha)^T(C\alpha) = \mu_1\alpha^TC^2\alpha = \mu_1\alpha^TA\alpha\\ &\ge \mu_1\lambda_1\alpha^T\alpha\end{aligned}$$

所以 $\lambda \ge \lambda_1\mu_1$，另一边同理可证 □