第八周作业答案

涂嘉乐

2026 年 5 月 2 日

期中考试范围为 Stein 前两章以及 L^p 空间（见周民强第六章）和几种收敛方式（见周民强 3.2 节）；大家可以访问课程主页https://cardigan0214.github.io/course/26SpringRA.html了解前半学期大概学了什么并且获取相关资料。

习题 1 研究 L^∞ 收敛与近一致收敛的关系

注 以下设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty, f$ 是定义在可测集 E 上的可测函数

L^∞ 收敛：$||f_n - f||_{L^\infty(E)} \to 0$

近一致收敛：对 $\forall\delta > 0$ 存在 E 的可测子集 E_δ, s.t. $m(E\backslash E_\delta) < \delta, f_n \rightrightarrows f$ on E_δ

证明 (1).L^∞ 收敛 $\Longrightarrow$ 近一致收敛：对 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, s.t. $\forall n \geq N$，有

$$||f_n - f||_{L^\infty(E)} < \varepsilon$$

对 $\forall k \geq N$，设 $E_k = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$，则由 L^∞ 范数的定义知 $m(E_k) = 0$，设 $\tilde{E} = \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} E_k$，则

$$m(\tilde{E}) \leq \sum_{k=N}^{\infty} m(E_k) = 0$$

对 $\forall\delta > 0$，我们取 $E_\delta = E\backslash\tilde{E}$，则 $E_\delta = E\backslash\left(\bigcup\limits_{k=N}^{\infty} E_k\right) = E \cap \left(\bigcup\limits_{k=N}^{\infty} E_k\right)^c = E \cap \left(\bigcap\limits_{k=N}^{\infty} E_k^c\right) = \bigcap\limits_{k=N}^{\infty} E_k^c$，故

$$\begin{cases} m(E\backslash E_\delta) = m(\tilde{E}) = 0 < \delta \\ \forall x \in E_\delta, \forall k \geq N, x \in E_k^c \Longrightarrow |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \Longrightarrow f_n \rightrightarrows f \text{ on } E_\delta \end{cases}$$

(2). 近一致收敛 $\not\Longrightarrow$ L^∞ 收敛：我们回忆数分里面经典的反例，考虑 $E = [0,1], f_n(x) = x^n, f(x) \equiv 0$，则除了 $x = 1$，$f_n(x) \to f(x)$，我们首先证明 $f_n(x)$ 近一致收敛到 $f(x)$：对 $\forall\delta > 0$，取 $E_\delta = [0, 1-\delta]$，则在 E_δ 上 $x^n \leq (1-\delta)^n$，故

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E_\delta} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} (1-\delta)^n = 0$$

所以 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ on E_δ，且 $m(E\backslash E_\delta) = m((1-\delta, 1]) = \delta$

但是 $||f_n - f||_{L^\infty([0,1])} = ||x^n||_{L^\infty([0,1])}$，接下来我们证明 $\forall n \in \mathbb{N}^*, ||x^n||_{L^\infty([0,1])} = 1$，对 $\forall 0 < M < 1, \exists x_0 \in (0,1)$, s.t. $x_0^n = M$，进而 x^n 在 $(x_0, 1]$ 上取值大于 M，由定义知 $||x^n||_{L^\infty([0,1])} \geq 1$，另一方面 $x^n \leq 1, \forall x \in [0,1]$，所以 $||x^n||_{L^\infty([0,1])} = 1$，这就说明 f_n 并不是 L^∞ 收敛到 f $\square$

习题 2 研究近一致收敛和 a.e 收敛、近一致收敛和依测度收敛的关系

证明 (1). 近一致收敛 $\Longrightarrow$ a.e 收敛：对 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists E_n, \text{s.t. } m(E \backslash E_n) < \frac{1}{n}, f_n \rightrightarrows f$ on E_n，考虑 $\tilde{E} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$，则

$$m(E \backslash \tilde{E}) \leq m(E \backslash E_n) < \frac{1}{n}$$

[1] 令 $n \to \infty$，即 $m(E \backslash \tilde{E}) = 0$，而由 $\tilde{E}$ 的定义知，$\forall x \in \tilde{E}, f_n(x) \to f(x)$，所以 $f_n \to f$ a.e on $\tilde{E}$

(2). 结果和 E 的 Lebesgue 测度有关

Case 1. $m(E) < +\infty$ 时，由 Egorov 定理知 a.e 收敛 $\Longrightarrow$ 近一致收敛

Case 2. $m(E) = \infty$ 时，a.e 收敛 $\not\Longrightarrow$ 近一致收敛，考虑 $E = [0, +\infty), f = \chi_E, f_n = \chi_{[0,n)}$，则 $f_n(x) \to f(x), \forall x \in E$，假设 f_n 近一致收敛到 f，则对 $\delta = 1, \exists E_1 \subseteq E, \text{s.t. } m(E \backslash E_1) < 1$，且 $f_n \rightrightarrows f$ on E_δ，则 $\exists N \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } \forall n \geq N, \forall x \in E_1, |f_n(x) - f(x)| < 1$，但是由 f_n, f 的定义知，它们取值之差小于 1 当且仅当它们相等，即 $\forall x \in E_1, \forall n \geq N, f_n(x) = 1$，即 $E_1 \subseteq [0, N)$，但这与 $m(E \backslash E_1) < 1$ 矛盾！

(3). 近一致收敛 $\Longrightarrow$ 依测度收敛

设 $A_n(\varepsilon) = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$，即证明，对任意 $\varepsilon > 0$，有 $m(A_n(\varepsilon)) \to 0$ 由 f_n 在 E 上近一致收敛到 f 知，对任意 $\delta > 0$，存在可测集 $F_\delta \subset E, m(F_\delta) < \delta, \text{, s.t. } f_n \rightrightarrows f$ on $E \setminus F_\delta$

由一致收敛的定义，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } \forall n \geq N, \forall x \in E \backslash F_\delta$，有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

则若 $x \in A_n(\varepsilon)$，我们有 $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \Longrightarrow x \notin E \setminus F_\delta$，因此 $A_n(\varepsilon) \subset F_\delta$，故

$$m(A_n(\varepsilon)) \leq m(F_\delta) < \delta.$$

令 $n \to \infty$ 得

$$\limsup_{n \to \infty} m(A_n(\varepsilon)) \leq \delta$$

由 $\delta > 0$ 的任意性知 $\lim\limits_{n \to \infty} m(A_n(\varepsilon)) = 0$，即 f_n 在 E 上依测度收敛到 f

（当 $m(E) < +\infty$ 时，也可以这么写：近一致收敛 $\Longrightarrow$ a.e 收敛 $\overset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow}$ 依测度收敛）

(4). 依测度收敛 $\not\Longrightarrow$ 近一致收敛，以下我们举两个反例，分别对应测度有限和测度无限的情形

Case 1. $m(E) < +\infty$ 时，考虑 $E = [0, 1)$，对于每个 $k \in \mathbb{N}^*$，我们将 $[0, 1)$ 进行 k 等分

$$[0, 1) = \left[0, \frac{1}{k}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{k-1}{k}, 1\right) \overset{\text{def}}{=} I_1^{(k)} \cup \cdots \cup I_k^{(k)}$$

定义 $f_j^{(k)}(x) = \chi_{I_j^{(k)}}$，再按 k 从小到大对 $\{f_j^{(k)}\}_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq j \leq k}}$ 重新排序，重新记为 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$，则我们有如下观察

- $\forall x \in E, \{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 都不收敛：对每个 $x \in [0, 1)$，每个 $k \in \mathbb{N}^*$，x 都只在某一个 $I_j^{(k)}$ 中，进而 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 中有无穷多个 1，无穷多个 0，故它不收敛
- g_n 依测度收敛到 $g \equiv 0$：$\varepsilon > 1$ 时平凡，而对 $\forall \varepsilon \in (0, 1], |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon \Longleftrightarrow g_n(x) = 1$，故

$$m(\{x : |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = m(\{x : g_n(x) = 1\}) \to 0$$

若 g_n 近一致收敛到 g，而近一致收敛可推出 a.e 收敛，这与观察 1 矛盾！

Case 2. $m(E) = +\infty$ 时，其实思路还是一样，我们考虑 $E = [0, +\infty)$，对于每个 $k \in \mathbb{N}^*$，我们将

[1] $m(E \backslash \tilde{E}) = m\left(E \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c\right) = m\left(E \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n^c\right) \leq m(E \cap E_n^c) = m(E \backslash E_n) < \frac{1}{n}$

$[0,k)$ 进行 k^2 等分

$$[0,k)=\left[0,\frac{1}{k}\right)\cup\cdots\cup\left[\frac{k^2-1}{k},k\right)\overset{\text{def}}{=}I_1^{(k)}\cup\cdots\cup I_{k^2}^{(k)}$$

定义 $f_j^{(k)}(x)=\chi_{I_j^{(k)}}$，再按 k 从小到大对 $\{f_j^{(k)}\}_{\substack{k\in\mathbb{N}^*\\1\le j\le k^2}}$，重新记为 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$（这样子定义合理，因为可数个可数集仍可数），则我们有如下观察

- $\forall x\in E,\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 都不收敛：对每个 $x\in[0,+\infty)$，对 $\forall k\ge x$，x 都只在某一个 $I_j^{(k)}$ 中，进而 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 中有无穷多个 1，无穷多个 0，故它不收敛
- g_n 依测度收敛到 $g\equiv 0$：$\varepsilon>1$ 时平凡，而对 $\forall\varepsilon\in(0,1],|g_n(x)-g(x)|\ge\varepsilon\iff g_n(x)=1$，故

$$m(\{x:|g_n(x)-g(x)|\ge\varepsilon\})=m(\{x:g_n(x)=1\})\to 0$$

若 g_n 近一致收敛到 g，而近一致收敛可推出 a.e 收敛，这与观察 1 矛盾！ □

注 (4) 中的两个例子常用来构造反例，可以积累一下

习题 3 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭集，G 为开集，$F\subset G$，定义

$$f(x)=\frac{\operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^n\backslash G)}{\operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^n\backslash G)+\operatorname{dist}(x,F)},\quad \operatorname{dist}(x,F)=\inf_{z\in F}|x-z|$$

验证

(1) $f\in C(\mathbb{R}^n)$

(2) $0\le f\le 1$

(3) $f|_{\mathbb{R}^n\backslash G}\equiv 0, f|_F\equiv 1$

证明 我们首先证明对于闭集 $F\subset\mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(x,F)$ 连续，且 $\operatorname{dist}(x,F)=0\iff x\in F$

对 $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$，因为

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x,F)&=\inf_{z\in F}|x-z|\le\inf_{z\in F}(|x-y|+|y-z|)\\&=|x-y|+\inf_{z\in F}|y-z|=|x-y|+\operatorname{dist}(y,F)\end{aligned}$$

即 $\operatorname{dist}(x,F)-\operatorname{dist}(y,F)\le|x-y|$，交换 x,y 的顺序可得 $\operatorname{dist}(y,F)-\operatorname{dist}(x,F)\le|x-y|$，即

$$|\operatorname{dist}(x,F)-\operatorname{dist}(y,F)|\le|x-y|$$

所以 $\operatorname{dist}(x,F)$ 是 Lipschitz 连续的，且若 $\operatorname{dist}(x,F)=0$，则对 $\forall n\in\mathbb{N}^*,\exists z_n\in F,\text{s.t. }|x-z_n|<\frac{1}{n}$，即 $z_n\to x$，由 F 闭知 $x\in F$，另一方面若 $x\in F$，显然 $0\le\operatorname{dist}(x,F)\le|x-x|=0$

(1) $f\in C(\mathbb{R}^n)$：因为 $\mathbb{R}^n\backslash G$ 是开集的补集，故为闭集，所以 $\operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^n\backslash G),\operatorname{dist}(x,F)$ 都是连续函数，所以 f 是连续函数做四则运算后得到的函数，仍为连续函数，我们只需证明 f 良定，即分母不为零，这是因为若 $\operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^n\backslash G)+\operatorname{dist}(x,F)=0$，则 $\operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^n\backslash G)=\operatorname{dist}(x,F)=0$，故 $x\in\mathbb{R}^n\backslash G,x\in F$，但是这是不可能的

(2) 显然

(3) 若 $x\in\mathbb{R}^n\backslash G$，则分子为零，$f\equiv 0$；若 $x\in F$，则 $f(x)=\frac{\operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^n\backslash G)}{\operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^n\backslash G)}=1$ □

习题 4 设 $1\le p<\infty$，则

(1) $\{L^p\text{简单函数}\}\overset{\text{dense}}{\subset}L^p(\mathbb{R}^d)$

(2) $\{\text{阶梯函数}\}\overset{\text{dense}}{\subset}L^p(\mathbb{R}^d)$

(3) $C_c(\mathbb{R}^d) \overset{\text{dense}}{\subset} L^p(\mathbb{R}^d)$

证明 首先注意到

$$f \in L^p(\mathbb{R}^d) \iff \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \mathrm{d}m < +\infty \iff |f|^p \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

注意不等价于 $f^p \in L^1$，因为 p 不为整数时，负数的次方可能没定义（这里我们考虑实值函数）

(1). 对 $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$，对 f 使用简单函数逼近定理，存在一族简单函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$，s.t. $|\varphi_k| \nearrow |f|, \varphi_k \to f$，所以

$$|\varphi_k - f|^p \leq (|\varphi_k| + |f|)^p \leq (2|f|)^p \in L^1$$

取 $(2|f|)^p$ 为控制函数，由 DCT 知

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_k - f|^p \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{k\to\infty} |\varphi_k - f|^p \mathrm{d}m = 0$$

所以 $\varphi_k \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^d)} f$

(2). 由注记的第二点，我们只需证明 $\{\text{阶梯函数}\} \overset{\text{dense}}{\subset} \{L^p\text{简单函数}\}$，设 $\varphi \in \{L^p\text{简单函数}\}$

Case 1. $\varphi = \chi_E, E$ 为可测集

由 $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ 知 $m(E) < \infty$，对 $\forall \varepsilon > 0$，由 *Littlewood* 三原则之一知，$\exists$ 有限多个闭方体的几乎不交并 $F = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$，使得 $m(E \triangle F) < \varepsilon^p$，令

$$\psi = \sum_{j=1}^{N} \chi_{Q_j}$$

则 $\psi = \chi_F$ a.e $x \in \mathbb{R}^d$（在矩体边界上不相等，但是边界为零测集），因此

$$\begin{aligned} ||\varphi - \psi||_p^p &= \int |\varphi - \chi_F|^p \mathrm{d}x = \int |\chi_E - \chi_F|^p \mathrm{d}x \\ &= \int \chi_{E\triangle F}^p \mathrm{d}x = m(E \triangle F) < \varepsilon^p \end{aligned}$$

因此 $||\varphi - \psi||_p < \varepsilon$

Case 2. $\varphi = \sum_{i=1}^{M} a_i \chi_{E_i}$ 为简单函数的标准表示

由标准表示知，$\forall x \in \mathbb{R}^d, \chi_{E_i}(x)$ 中只有一个非零，所以

$$|\varphi|^p = \sum_{i=1}^{M} |a_i|^p \chi_{E_i}$$

且若 $a_i \neq 0$，则 $m(E_i) < +\infty$，否则积分为无穷，与 $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ 矛盾！由 $\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{i=1}^{M} E_i$ 知，$\exists a_i = 0$，且 $m(E_i) = +\infty$，不妨设 $a_M = 0$，则

$$\varphi = \sum_{i=1}^{M-1} a_i \chi_{E_i}, \quad m(E_i) < +\infty, 1 \leq i \leq M-1$$

对 $\forall \chi_{E_i}, 1 \leq i \leq M-1$，由 Case 1. 知，$\exists$ 阶梯函数 ψ_i, s.t. $||\psi_i - \chi_{E_i}||_p < \frac{\varepsilon}{|a_i|(M-1)}$，令 $\psi = \sum_{i=1}^{M-1} a_i \psi_i$，

则 ψ 仍为阶梯函数，且

$$\begin{aligned}||\varphi-\psi||_p &= \left|\left|\sum_{i=1}^{M-1} a_i(\chi_{E_i}-\psi_i)\right|\right|_p \\ &\le \sum_{i=1}^{M-1}|a_i|\cdot||\chi_{E_i}-\psi_i||_p \\ &< \sum_{i=1}^{M-1}|a_i|\cdot\frac{\varepsilon}{|a_i|(M-1)}=\varepsilon\end{aligned}$$

(3). 由注记的第二点，我们只需证明 $C_c(\mathbb{R}^d)\overset{\text{dense}}{\subset}\{$阶梯函数$\}$ 即可

我们只需证明 $\varphi=\chi_R, R$ 是矩体的情形，此时我们可以找到一个更大的开矩体 $G\supset R, \text{s.t. } m(G\backslash R)<\varepsilon^p$，对 R,G 使用习题 3 的结论，$\exists f\in C_c(\mathbb{R}^n), \text{s.t. } 0\le f\le 1, f|_{\mathbb{R}^n\backslash G}\equiv 0, f|_{R\equiv 1}$，进而

$$||f-\chi_R||_{L^p(\mathbb{R}^d)}\le\left(\int_{G\backslash R}1\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$$

□

注

- 由 (1)(2) 知 $\{$阶梯函数$\}\overset{\text{dense}}{\subset}\{L^p$-简单函数$\}\overset{\text{dense}}{\subset}L^p(\mathbb{R}^d)$
- $|\chi_E-\chi_F|=\chi_{E\triangle F}$（分类讨论对比两边取值即可）
- 若 $X\overset{\text{dense}}{\subset}Y, Y\overset{\text{dense}}{\subset}Z$，则 $X\overset{\text{dense}}{\subset}Z$（用三角不等式证明）
- (3) 的启发：在要求证明 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 空间函数 f 的某个性质 A 时，通常这个性质对 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 函数来说可以用微积分知识或者连续性或者紧支集解决，进而我们可以用 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 函数 g 去逼近 f，再在放缩时使用三角不等式，可以参考讲义 15 平移连续性的证明过程，下次我再找点例题

$$||f-f_A||_{L^p}\le||f-g||_{L^p}+||g-g_A||_{L^p}+||g_A-f_A||_{L^p}$$

习题 5 设 $f,f_k\in L^1(E), f_k\xrightarrow{\text{a.e}}f$，证明：$f_k\xrightarrow{L^1}f\iff\lim_{k\to\infty}||f_k||_{L^1}=||f||_{L^1}$

证明 $(\Longrightarrow)$: 由三角不等式知

$$\big|||f_k||_{L^1}-||f||_{L^1}\big|\le||f_k-f||_{L^1}\to 0$$

$(\Longleftarrow)$: 设

$$g_k:=|f_k|+|f|-|f_k-f|.$$

由三角不等式 $|f_k-f|\le|f_k|+|f|$ 知 $g_k\ge 0$，又因为 $f_k\to f$ a.e，所以 $|f_k|\to|f|, |f_k-f|\to 0$ a.e，故 $g_k\to 2|f|$ a.e，对 g_k 使用 Fatou 引理得

$$2\|f\|_{L^1}\le\liminf_{k\to\infty}\int g_k=\liminf_{k\to\infty}(\|f_k\|_{L^1}+\|f\|_{L^1}-\|f_k-f\|_{L^1}).$$

利用 $\|f_k\|_{L^1}\to\|f\|_{L^1}$，得

$$2\|f\|_{L^1}\le 2\|f\|_{L^1}-\limsup_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^1},$$

从而 $\limsup_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^1}\le 0$，而 $\|f_k-f\|_{L^1}\ge 0$，所以 $\|f_k-f\|_{L^1}\to 0\Longrightarrow f_k\xrightarrow{L^1}f$ □

注

- 左推右其实不需要 $f_k\xrightarrow{\text{a.e}}f$ 这个条件，但是反过来右推左必须加上 $f_k\xrightarrow{\text{a.e}}f$ 这个条件

- $\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$