第五次习题课讲义

涂嘉乐

2025 年 11 月 23 日

1 作业选讲

习题 1 (P223,T11) 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = 0$，证明：方阵 A 相似于方阵

$$\begin{pmatrix} 0 & M_{r\times(n-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

证明 设 $\mathbb{F}^n$ 的一组基为 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，定义线性变换

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)A$$

设 $\operatorname{rank}(A) = r$，由 $\dim(\operatorname{Im}(\mathscr{A})) = \operatorname{rank}(A)$ 知，可设 $\operatorname{Im}(\mathscr{A})$ 的一组基为 $\{\beta_1, \cdots, \beta_r\}$，将它扩充为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基 $\{\beta_1, \cdots, \beta_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_n\}$，由于 $A^2 = 0$，所以

$$\mathscr{A}^2(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)A^2 = 0$$

即 $\mathscr{A}^2 = 0$，因此对 $\operatorname{Im}(\mathscr{A})$ 的基 $\beta_i, 1 \le i \le r, \exists \gamma_i \in \mathbb{F}^n, \text{s.t. } \beta_i = \mathscr{A}(\gamma_i)$，所以

$$\mathscr{A}(\beta_i) = \mathscr{A}(\mathscr{A}(\gamma_i)) = \mathscr{A}^2(\gamma_i) = 0, \quad 1 \le i \le r$$

另一方面，对于 $r+1 \le i \le n$，由于 $\{\beta_1, \cdots, \beta_r\}$ 是 $\operatorname{Im}(\mathscr{A})$ 的一组基，所以可设 $\mathscr{A}(\beta_i) = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j^{(i)} \beta_j$，所以在基 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 下我们有

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\beta_1, \cdots, \beta_n) &= (0, \cdots, 0, \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^{(r+1)} \beta_j, \cdots, \sum_{j=1}^{(n)} \lambda_j^{(i)} \beta_j) \\
&= (\beta_1, \cdots, \beta_n) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1^{(r+1)} & \cdots & \lambda_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r^{(r+1)} & \cdots & \lambda_r^{(n)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

习题 2 (P239,T13(1)) 求下列方阵的特征多项式与最小多项式

$$A=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\end{pmatrix}$$

解 特征多项式:

$$\varphi_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)=\begin{vmatrix}\lambda&-1&&&\\&\lambda&-1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\lambda&-1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&\lambda-a_{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按最后一行展开}}\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-\cdots-a_1\lambda-a_0$$

最小多项式:考虑 e_i 为只有第 i 个元素为 1,其余元素为零的行向量,则

$$e_1A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\end{pmatrix}=e_2$$

类似计算可得

$$e_1A^2=e_2A=e_3,\cdots,e_1A^{n-1}=e_{n-1}A=e_n$$

$$e_1A^n=e_nA=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0&a_1&\cdots&a_{n-1}\end{pmatrix}$$

设 $\mathrm{d}(\lambda)$ 为 A 的最小多项式,假设 $\deg(\mathrm{d}(\lambda))\leq n-1$,则存在不全为零的 $a_0,\cdots,a_{n-2}\in\mathbb{C}$, s.t. $\mathrm{d}(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{n-2}\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}$,由 $\mathrm{d}(A)=0$ 知

$$\begin{aligned}0=e_1\mathrm{d}(A)&=a_0e_1+a_1e_1A+\cdots+a_{n-2}e_1A^{n-2}+e_1A^{n-1}\\&=a_0e_1+a_1e_2+\cdots+a_{n-2}e_{n-1}+e_n\end{aligned}$$

由 $e_1,\cdots,e_n$ 线性无关知 $a_0=\cdots=a_{n-2}=0$,这与它们不全为零的假设矛盾,进而 $\deg(\mathrm{d}(\lambda))=n$,即 $\mathrm{d}(\lambda)=\varphi_A(\lambda)$ □

评价 本题我们还有补充，设 $\varphi_A(\lambda)$ 的 n 个根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则

$$A\begin{pmatrix}1\\\lambda_i\\\vdots\\\lambda_i^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_i\\\lambda_i^2\\\vdots\\a_0+a_1\lambda_i+\cdots+a_{n-1}\lambda_i^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_i\\\lambda_i^2\\\vdots\\\lambda_i^n\end{pmatrix}=\lambda_i\begin{pmatrix}1\\\lambda_i\\\vdots\\\lambda_i^{n-1}\end{pmatrix}$$

因此 $(1,\lambda_i,\cdots,\lambda_i^{n-1})^T$ 是 A 的从属于 λ_i 的特征向量，又因为 $\det(A-\lambda_i)$ 右上角的 $(n-1)\times(n-1)$ 阶子矩阵行列式为 1，所以 $\operatorname{rank}(A-\lambda_i)\geq n-1$，由 $A-\lambda_iI$ 不可逆知，$\operatorname{rank}(A-\lambda_i)\leq n-1$，即 $\operatorname{rank}(A-\lambda_iI)=n-1$，进而 $\dim(\operatorname{Ker}(A-\lambda_iI))=n-(n-1)=1$，即

$$\operatorname{Ker}(A-\lambda_iI)=\left\{a(1,\lambda_i,\cdots,\lambda_i^{n-1})|a\in\mathbb{C}\right\}$$

这也说明 λ_i 的几何重数为 1

若 λ_i 都为单根，则它的代数重数和几何重数相等，故它可对角化；若 λ_i 为重根，则它不可对角化，因为几何重数始终为 1，代数重数严格大于几何重数 □

习题 3 (P248,T6) 设 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 可对角化，且 U 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，证明：线性变换 $\mathscr{A}$ 在 U 上的限制 $\mathscr{A}|_U$ 也是可对角化的

证明 由题知，存在 V 的一组基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, s.t. $\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，我们设 $\dim(U)=r$，设 $\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$ 为 U 的一组基，将它扩充为 V 的一组基 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，则由 U 是 $\mathscr{A}$-不变子空间知

$$\mathscr{A}(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\&A_{22}\end{pmatrix}$$

其中 A_{11} 是 $\mathscr{A}|_U$ 在基 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 下的 $r\times r$ 阶方阵，设基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，则 P 可逆，且

$$P\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\&A_{22}\end{pmatrix}P^{-1}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

考虑 P 的前 r 列构成的子矩阵 $\tilde{P}$，由 P 可逆知，它的前 r 列线性无关，故 $\operatorname{rank}(\tilde{P})=r$，进而存在某 r 行，使得 $\tilde{P}$ 的这 r 个行向量线性无关，设它们的行指标为 $i_1,\cdots,i_r$，我们可以通过行变换（交换行）将这 r 行换到第 $1,2,\cdots,r$ 行，即存在置换矩阵 Q（可以表示为初等交换行矩阵的复合）s.t. $Q\tilde{P}$ 的前 r 个行向量线性无关

$$P=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{pmatrix},\quad\tilde{P}=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1r}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nr}\end{pmatrix},\quad Q\tilde{P}=\begin{pmatrix}p_{i_1,1}&p_{i_1,2}&\cdots&p_{i_1,r}\\p_{i_2,1}&p_{i_2,2}&\cdots&p_{i_2,r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\p_{i_r,1}&p_{i_r,2}&\cdots&p_{i_r,r}\\ *&*&*&*\end{pmatrix}$$

考虑 $(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)Q=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则 $(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)$ 实际上就是 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 进行重新排序，因此 $\mathscr{A}$ 在 $(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)$ 下仍可对角化，即存在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的对应重排 $\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_n$, s.t.

$$\mathscr{A}(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)\operatorname{diag}(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_n)$$

因为 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P=(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)QP$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\beta_1,\cdots,\beta_n)&=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\&A_{22}\end{pmatrix}\\&=(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)QP\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\&A_{22}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故

$$\mathscr{A}(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)QP\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\&A_{22}\end{pmatrix}(QP)^{-1}$$

即

$$QP\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\&A_{22}\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_n)QP$$

将 QP 写为分块形式 $QP=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}$，由前分析以及矩阵乘法规则知 X_{11} 就是 $Q\tilde{P}$ 的前 $r\times r$ 阶子矩阵，故 X_{11} 可逆

$$\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\&A_{22}\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_n)\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}$$

对比上式两端的左上角分块可得

$$X_{11}A_{11}=\mathrm{diag}(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_r)X_{11}$$

设 $(\gamma_1,\cdots,\gamma_r)=(\beta_1,\cdots,\beta_r)X_{11}^{-1}$，则它是 U 的另一组基，且

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\gamma_1,\cdots,\gamma_r)&=\mathscr{A}(\beta_1,\cdots,\beta_r)X_{11}^{-1}=(\beta_1,\cdots,\beta_r)A_{11}X_{11}^{-1}\\&=(\gamma_1,\cdots,\gamma_r)X_{11}A_{11}X_{11}^{-1}=(\gamma_1,\cdots,\gamma_r)\mathrm{diag}(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_r)\end{aligned}$$

即 $\mathscr{A}|_U$ 也可对角化 □

2 补充习题

习题 4（2023,T5）设 A,B 为 n 阶矩阵

(1). 若 $A^2=A$，且 $\mathrm{rank}(A)=r$，证明：存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$

(2). 若 $A^2=A,B^2=B,I_n-A-B$ 可逆，则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$

证明 (1). 设 $\mathbb{F}^n$ 的一组基为 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，设 $\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)A$，首先由第九周的作业知 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}(\mathscr{A})=\varnothing$，这说明 $\mathrm{Im}(\mathscr{B})+\mathrm{Ker}(\mathscr{B})$ 是直和，注意到 $\mathrm{Im}(\mathscr{B})\oplus\mathrm{Ker}(\mathscr{B})=\mathrm{Im}(\mathscr{B})+\mathrm{Ker}(\mathscr{B})\subseteq\mathbb{F}^n$，且

$$\dim\mathbb{F}^n=\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{B}))+\dim(\mathrm{Ker}(\mathscr{B}))\xlongequal{\text{直和}}\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{B})\oplus\mathrm{Ker}(\mathscr{B}))$$

这就推出 $\mathbb{F}^n=\mathrm{Im}(\mathscr{A})\oplus\mathrm{Ker}(\mathscr{A})$，我们选取 $\mathrm{Im}(\mathscr{A})$ 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_r$，由 $\mathrm{Im}(\mathscr{A})$ 知 $\exists\delta\in\mathbb{F}^n$, s.t. $\beta_i=\mathscr{A}(\delta)$，进而

$$\mathscr{A}(\beta_i)=\mathscr{A}(\mathscr{A}(\delta))=\mathscr{A}^2(\delta)=\mathscr{A}(\delta)=\beta_i$$

即

$$\mathscr{A}(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

选取 P 为 $e_1,\cdots,e_n$ 到 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵就行了，即 $(e_1,\cdots,e_n)P=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$

(2). 方法一：因为

$$\begin{cases} A(I_n-A-B)=A-A^2-AB=-AB\\ (I_n-A-B)B=B-AB-B^2=-AB\end{cases}$$

所以

$$A(I_n-A-B)=(I_n-A-B)B\Longrightarrow A=(I_n-A-B)B(I_n-A-B)^{-1}$$

故它们相似，秩相等

方法二：定义线性映射 $\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)A,\mathscr{B}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)B$，依题意，$\mathscr{I}-\mathscr{A}-\mathscr{B}$ 是线性同构，进而它是单射

对 $\forall x\in\mathrm{Im}(\mathscr{A}),\exists y\in\mathbb{F}^n,\text{s.t. }x=\mathscr{A}(y)$，进而

$$(\mathscr{I}-\mathscr{A}-\mathscr{B})x=x-\mathscr{A}(x)-\mathscr{B}(x)=\mathscr{A}(y)-\mathscr{A}^2(y)-\mathscr{B}(x)=-\mathscr{B}(x)$$

所以 $\mathscr{I}-\mathscr{A}-\mathscr{B}|_{\mathrm{Im}(\mathscr{A})}=-\mathscr{B}|_{\mathrm{Im}(\mathscr{A})}$，进而

$$-\mathscr{B}|_{\mathrm{Im}(\mathscr{A})}:\mathrm{Im}(\mathscr{A})\to\mathrm{Im}(-\mathscr{B})=\mathrm{Im}(\mathscr{B})$$

是单射，所以 $\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{A}))\le\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{B}))$，由对称性知 $\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{B}))\le\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{A}))$，故二者相等，而它们的维数就是秩，故 $r(A)=r(B)$ □

评价 若 A,B 是线性空间，线性变换 $V:A\to B$ 是单射，则 $\dim(A)\le\dim(B)$，这是因为有线性同构 $A\simeq V(A)$，且 $V(A)$ 是 B 的子空间，所以

$$\dim(A)=\dim(V(A))\le\dim(B)$$

习题 5（2024,T6）设 $\mathbb{F}$ 是域，$A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{F}^{n\times n}$，证明：

(1). 若 A 可逆，矩阵 $B\in\mathbb{F}^{n\times m}$ 和 $C\in\mathbb{F}^{m\times n}$，则 $\det(A+BC)=\det(A)\det(I_m+CA^{-1}B)$

(2). 以 A_{ij} 表示 a_{ij} 的代数余子式，则

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x_1y_1 & a_{12}+x_1y_2 & \cdots & a_{1n}+x_1y_n\\ a_{21}+x_2y_1 & a_{22}+x_2y_2 & \cdots & a_{2n}+x_2y_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}+x_ny_1 & a_{n2}+x_ny_2 & \cdots & a_{nn}+x_ny_n\end{vmatrix}=\det(A)+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_iy_j$$

证明 (1). 我们需要引理（课上讲过，也可以看课本 111 页）

引理 1 设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{n\times m}$，则 $\det(I_m-AB)=\det(I_n-BA)$

则将引理中的 A,B 分别用 $C,-A^{-1}B$ 代入，即

$$\det(A+BC)=\det(A)\det(I_n+A^{-1}BC)=\det(A)\det(I_m+CA^{-1}B)$$

(2). 考虑所求行列式的形式，我们加一行一列得

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & a_{11}+x_1y_1 & a_{12}+x_1y_2 & \cdots & a_{1n}+x_1y_n \\ 0 & a_{21}+x_2y_1 & a_{22}+x_2y_2 & \cdots & a_{2n}+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1}+x_ny_1 & a_{n2}+x_ny_2 & \cdots & a_{nn}+x_ny_n \end{vmatrix} \xlongequal{r_i\to r_i-x_ir_1} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ -x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这就得到第一周作业的第二题，大家可以回去看一看怎么展开这个行列式 □

习题 6 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若 $AB=BA$，则 A,B 至少有一个公共特征向量

证明 记 $\mathbb{C}$ 的标准正交基为 $e_1,\cdots,e_n$，定义线性变换

$$\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)A,\quad \mathscr{B}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)B$$

取 A 的特征值 λ_0，考虑 $V_{\lambda_0}=\{x\in\mathbb{C}^n:Ax=\lambda_0x\}$，由于 $AB=BA$，所以 $\forall x\in V_{\lambda_0}$

$$A(Bx)=BAx=\lambda_0Bx$$

故 V_{λ_0} 是 $\mathscr{B}$-不变子空间，我们取 $\mathscr{B}|_{V_{\lambda_0}}$ 的特征值 μ_0（一定能取到，因为 $\mathscr{B}|_{V_{\lambda_0}}$ 在某组基下的矩阵是复数域下的方阵，而复数域下的方阵一定有特征值），则 $\exists\xi\in V_{\lambda_0},\text{s.t. }(B|_{V_{\lambda_0}})(\xi)=\mu_0\xi$，即 $B\xi=\mu_0\xi$，又因为 $\xi\in V_{\lambda_0},A\xi=\lambda_0\xi$，则 ξ 即为所求 □

习题 7 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若 $AB=BA$，则 A,B 可同时上三角化

证明 $k=1$ 时显然，假设 $k=n-1$ 时命题成立，下面证明 $k=n$ 时，设 λ_1 为 A 的一个特征值，由上题的证明过程知，$\exists x_1\in V_{\lambda_1},\text{s.t. }Bx_1=\mu_1x_1$，其中 μ_1 是 B 的特征值，我们将 x_1 扩充为 C^n 的一组基 $x_1,\cdots,x_n$，令 $P_1=(x_1,\cdots,x_n)$，则

$$P_1^{-1}AP_1=P_1^{-1}(Ax_1,\cdots,Ax_n)=(P_1^{-1}\lambda_1x_1,\cdots,P_1^{-1}Ax_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha^T\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$$

同理

$$P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}\mu_1 & \beta^T\\ 0 & B_1\end{pmatrix}$$

由 $AB=BA$ 知

$$(P_1^{-1}AP_1)(P_1^{-1}BP_1)=P_1^{-1}ABP_1=P_1^{-1}BAP_1=(P_1^{-1}BP_1)(P_1^{-1}AP_1)$$

即

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha^T\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1 & \beta^T\\ 0 & B_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1 & \beta^T\\ 0 & B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha^T\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}* & *\\ * & A_1B_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & *\\ * & B_1A_1\end{pmatrix}$$

即 $A_1B_1=B_1A_1$，由归纳假设知 $\exists P_2,\text{s.t. }P_2^{-1}A_1P_2,P_2^{-1}B_1P_2$ 均为上三角阵，进而考虑

$$P=P_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2^{-1}\end{pmatrix}P_1^{-1}AP_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha^TP_2\\ 0 & P_2^{-1}AP_2\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2^{-1}\end{pmatrix}P_1^{-1}BP_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \beta^TP_2\\ 0 & P_2^{-1}BP_2\end{pmatrix}$$

它们均为上三角阵 □

习题 8 设 t 是一个参数

$$f(t)=\begin{vmatrix}a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}$$

求证 $f(t)=f(0)+t\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在 $A=\left(a_{ij}\right)$ 中的代数余子式

证明 将第一列拆成

$$\begin{pmatrix}a_{11}+t\\ a_{21}+t\\ \vdots\\ a_{n1}+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\ t\\ \vdots\\ t\end{pmatrix}$$

则我们有

$$\begin{aligned}f(t)&=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}t & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}\end{aligned}$$

再将第一个行列式的第二列，第三列，一直到第 n 列同上操作，则 $f(t)=f(0)+t\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}$ □

习题 9 计算下列行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n\\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n\end{vmatrix}$$

证明 考虑升阶法，添加一行一列

$$
|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}
\xlongequal[\forall i\geq 2]{c_i\to c_i-c_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}
$$

我们将第一行进行拆分：$(1,-1,\cdots,-1)=(2,0,\cdots,0)-(1,\cdots,1)$，则

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
&= 2x_1\cdots x_n V(x_1,\cdots,x_n) - V(1,x_1,\cdots,x_n) \\
&= [2x_1x_2\cdots x_n - (x_1-1)\cdots(x_n-1)] \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)
\end{aligned}
$$

□

习题 10 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，求证：只用第三类初等变换可以将 A 化为如下形状

$$
\operatorname{diag}(1,\cdots,1,|A|)
$$

证明 假设 $a_{11}=0$，由 A 可逆知，第一行必有元素不为零，用第三类初等变换将非零元素所在的列加到第一列，则所得矩阵中，第 11 元不为零，进而我们可以不妨设 $a_{11}\neq 0$ 于是可用非零元 a_{11} 以及第三类初等变换将 A 的第一行及第一列其余元素都消为零，即 A 可经过第三类初等变换化为

$$
\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}
$$

再对 A_1 同样处理，最终我们可以通过第三类初等变换将 A 化为对角阵，因此我们只需证明对角阵情形，接下来考虑二阶情形

$$
\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\to r_2+\frac{1-a}{a}r_1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1-a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\to r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2\to c_2-bc_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & ab \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\to r_2+(a-1)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}
$$

对于 n 阶对角阵，我们两两进行操作，因为上述操作只动了那两个元素所在的行、列，对 n 阶对角阵的

其余行、列没有影响，进而不断操作可以将 A 化为

$$\mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, |A|)$$

□