

第一、二周作业答案

涂嘉乐

2026年3月21日

习题 1 (Stein, Chapter 1, T1) Prove that the Cantor set \mathcal{C} constructed in the text is totally disconnected and perfect. In other words, given two distinct points $x, y \in \mathcal{C}$, there is a point $z \notin \mathcal{C}$ that lies between x and y , and yet \mathcal{C} has no isolated points.

证明 (本题中有关 Cantor 集的记号见老师讲义)

Totally disconnected: 对 $\forall x < y \in \mathcal{C}, \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t. } |x - y| > \frac{1}{3^N}$, 回忆 Cantor 集的构造, 第 N 步后余下的区间长度均为 $\frac{1}{3^N}$, 故 x, y 必属于 $F_N \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{2^N} F_{N,k}$ 中的两个不同的区间, 因此 $\exists z \notin \mathcal{C}, \text{s.t. } x < z < y$

Has no isolated points: 对 $\forall x \in \mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t. } \frac{1}{3^N} < \varepsilon$, 由于 $x \in F_N = \bigcup_{k=1}^{2^N} F_{N,k}$, 故 $\exists k_0, \text{s.t. } x \in F_{N,k_0}$, 取 F_{N,k_0} 异于 x 的端点 y_N , 则由 Cantor 集的构造知 $y_N \in \mathcal{C}$ 且 $|x - y_N| \leq \frac{1}{3^N} < \varepsilon$, 即 $\forall x \in \mathcal{C}, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon)$ 中都有在 \mathcal{C} 中的点, 故 $\forall x \in \mathcal{C}$ 都不是孤立点 \square

习题 2 (Stein, Chapter 1, T2) The Cantor set \mathcal{C} can also be described in terms of ternary expansions.

(1) Every number in $[0, 1]$ has a ternary expansion

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}, \quad a_k = 0, 1, 2$$

Note that this decomposition is not unique since, for example $\frac{1}{3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k}$. Prove that $x \in \mathcal{C} \iff x$ has a representation as above where every a_k is either 0 or 2.

(2) The Cantor-Lebesgue function is defined on \mathcal{C} by

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k} \quad \text{if } x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \quad \text{where } b_k = \frac{a_k}{2}$$

In this definition, we choose the expansion of x in which $a_k = 0$ or 2 . Show that F is well defined and continuous on \mathcal{C} , and moreover $F(0) = 0$ as well as $F(1) = 1$.

(3) Prove that $F : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ is surjective, that is, for every $y \in [0, 1]$ there exists $x \in \mathcal{C}$ such that $F(x) = y$.

(4) One can also extend F to be a continuous function on $[0, 1]$ as follows. Note that if (a, b) is an open interval of the complement of \mathcal{C} , then $F(a) = F(b)$. Hence we may define F to have the constant value $F(a)$ in that interval.

证明 (本题中有关 Cantor 集的记号见老师讲义)

(1).(\implies): 设 $x \in \mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}^*, x \in F_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} F_{n,k}$, 其中 $F_{n,k}$ 是闭区间, 则必存在某个 $k_0, \text{s.t. } x \in F_{n,k_0}$, 记这个闭区间为 $I_n(x)$, 则由构造知 $I_n(x) \searrow$, 即 $I_1(x) \supset I_2(x) \supset \dots$, 我们如下归纳定



义 $\{a_n\}$ 和 $\{x_n\}$: $n=1$ 时, $F_1 = F_{1,1} \cup F_{1,2} = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, 定义

$$a_1 = \begin{cases} 0, & x \in F_{1,1} \text{ 或 } I_1(x) = F_{1,1} \\ 2, & x \in F_{1,2} \text{ 或 } I_1(x) = F_{1,2} \end{cases} \quad x_1 = \frac{a_1}{3}$$

假设 $n \leq m$ 时 a_n, x_n 已经定义, 则当 $n = m+1$ 时, 由于 $I_m(x)$ 将被挖去中间的 $\frac{1}{3}$, 得到左右两个子闭集, 由 Cantor 集的构造知 $I_{m+1}(x)$ 必为其中一个, 所以我们定义

$$a_{m+1} = \begin{cases} 0, & I_{m+1}(x) \text{ 是左边那个子闭集} \\ 2, & I_{m+1}(x) \text{ 是右边那个子闭集} \end{cases} \quad x_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{a_k}{3^k}$$

结合 Cantor 集的构造, 容易验证 x_n 是 $I_n(x)$ 的左端点, 它不会在构造中被挖掉, 故 $x_n \in C$, 且由 $x \in I_n$ 知

$$x_n \leq x \leq x_n + \frac{1}{3^n} \implies |x_n - x| \leq \frac{1}{3^n}$$

即 $x_n \rightarrow x$, 又因为

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^n} \rightarrow 0$$

所以 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$, 由极限唯一知 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$

(\Leftarrow): 假设 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$, $a_k = 0$ 或 2 , 则同上定义 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}$, 上面已经验证 $x_n \rightarrow x$, 且 $x_n \in C$, 由 C 是闭集知 $x \in C$

(2). 本题要求证明 F 是良定的, 我们需要证明两点

- $F(x)$ 的取值由 x 的三进制表达 (系数 $a_k \neq 1$) 唯一确定, 实际上我们断言: 若 $x \in C$, 且 x 的三进制表达中系数 $a_k \neq 1, \forall k$, 则该表达唯一

反证, 设 $C \ni x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}, \forall k, a_k, b_k \in \{0, 2\}$, 若表达不唯一, 则 $\exists k \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } a_k \neq b_k$, 假设 $k_0 = \min\{k : a_k \neq b_k\}$, 不失一般性我们设 $a_{k_0} = 0, b_{k_0} = 2$, 则

$$0 = x - x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k - a_k}{3^k} = \frac{2}{3^{k_0}} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{b_k - a_k}{3^k} \geq \frac{2}{3^{k_0}} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^{k_0}}$$

矛盾! 因此 $\forall x \in C$, x 的系数不为 1 的三进制表达唯一, 故 $F(x)$ 由该表达唯一确定

- $F(x)$ 定义的级数收敛, 这是显然的, 因为 $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$

接下来验证 F 的连续性, 我们断言: 若 $x, y \in C$, 且 $|x - y| < \frac{1}{3^{k_0}}$, 则在 x, y 的系数不为 1 的三进制表达中, 前 k_0 项系数都相同

Proof Of Claim: 设 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}$, 记 $s = \min\{k : a_k \neq b_k\}$, 假设断言不成立, 则 $s \leq k_0$, 不失一般性我们设 $a_s = 0, b_s = 2$, 则

$$y - x = \frac{2}{3^s} + \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{b_k - a_k}{3^k} \geq \frac{2}{3^s} + \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^s} \geq \frac{1}{3^{k_0}}$$

矛盾! 因此断言成立

对 $\forall \varepsilon > 0$, 我们选取 $k_0, \text{s.t. } \frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon$, 再取 $\delta = \frac{1}{3^{k_0}}$, 结合断言知, 若 $x, y \in C, |x - y| < \delta$, 则它们的



前 k_0 项系数相同, 故

$$|F(y) - F(x)| = \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{b_k^{(y)} - b_k^{(x)}}{2^k} \right| \leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon$$

即 F 在 C 上连续

最后我们注意到 $0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0}{3^k}, 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$, 故 $F(0) = 0, F(1) = 1$

(3). 对 $\forall y \in [0, 1]$, 均存在二进分解 $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}$, 我们定义 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2b_k}{3^k}$, 由 (1) 知 $x \in C$, 且 $F(x) = y$, 故 $F: C \rightarrow [0, 1]$ 是满射

(4). 因为 $[0, 1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, G_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} G_{n,k}$ 是 Cantor 集构造过程中被挖去的开区间, 接下来我们证明在任意被挖去的开区间的两个端点上 F 的取值相等, 即若 $G_{n,k} = (a, b)$, 其中 $a, b \in C$, 则 $F(a) = F(b)$

回忆 (1) 中定义的 $I_n(x)$, 由 Cantor 集的构造过程知, $I_m(a) = I_m(b), \forall m < n$, 而当 $m = n$ 时, $I_n(a)$ 是 $I_{n-1}(a)$ 的挖去中间 $\frac{1}{3}$ 后得到的左边的闭子空间, $I_n(b)$ 是 $I_{n-1}(a)$ 的挖去中间 $\frac{1}{3}$ 后得到的右边的闭子空间, 当 $m > n$ 时, $I_m(a)$ 是 $I_{m-1}(a)$ 的挖去中间 $\frac{1}{3}$ 后得到的右边的闭子空间, $I_m(b)$ 是 $I_{m-1}(a)$ 的挖去中间 $\frac{1}{3}$ 后得到的左边的闭子空间, (可以画图感受一下), 所以 a, b 的系数不为 1 的三进制表达的前 $n-1$ 位相同, 而第 n 位时 a 的系数全为 0, b 的系数为 2, 从第 $n+1$ 位开始 a 的系数全为 2, b 的系数全为 0, 因此

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2^n} - \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 0$$

我们定义

$$\begin{aligned} \tilde{F}: [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \begin{cases} F(x), & x \in C \\ F(a) = F(b), & x \in (a, b) \subset [0, 1] \setminus C \end{cases} \end{aligned}$$

由 \tilde{F} 定义不难看出 \tilde{F} 是单调不减的, 假设 $\exists x_0 \in (0, 1), \text{s.t. } \tilde{F}$ 在 x_0 处不连续, 则由 \tilde{F} 单调有界知 $a \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \tilde{F}(x), b \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \tilde{F}(x)$ 均存在, 进而由单调性知 \tilde{F} 的值域

$$\text{Range}(\tilde{F}) \subseteq [0, a] \cup [b, 1]$$

但是由 (3) 知 \tilde{F} 的值域为 $[0, 1]$, 这显然矛盾! 最后我们验证 \tilde{F} 在 $x = 0, 1$ 处连续, 我们只验证 $x = 0$ 的情况, $x = 1$ 完全类似, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由 F 在 C 上的连续性知 $\exists \delta > 0, \text{s.t. } \forall x \in C, |x - 0| < \delta$, 就有 $|F(x) - F(0)| < \varepsilon$, 取 $x = \delta'$, 由 \tilde{F} 的单调性知 $\forall 0 < y < \delta'$, 有

$$|\tilde{F}(y) - \tilde{F}(0)| = \tilde{F}(y) < F(x) = |F(x) - F(0)| < \varepsilon$$

进而 \tilde{F} 在 $x = 0$ 连续

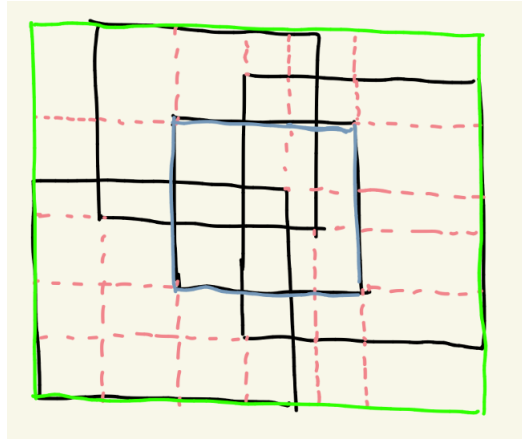
综上 \tilde{F} 在 $[0, 1]$ 上连续 □

习题 3 (Stein, Lemma 1.2) If R, R_1, \dots, R_N are rectangles, and $R \subset \bigcup_{k=1}^N R_k$, then

$$|R| \leq \sum_{k=1}^N |R_k|$$



证明



我们考虑将 R_1, \dots, R_N , 以及 R 的所有边进行无限延拓得到的网络, 记包含于 $\bigcup_{k=1}^N R_k$ 中的分割后得到的几乎不交的新矩体为 $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_M$ (就是图中黑框里面的小矩形), 则我们有

$$\bigcup_{i=1}^N R_i = \bigcup_{k=1}^M \tilde{R}_k$$

因为 $R \subset \bigcup_{k=1}^N R_k$, 且我们也将 R 的所有边进行延伸, 所以 $\exists \{k_1, \dots, k_l\} \subseteq \{1, 2, \dots, M\}$, s.t. (就是图中蓝框里面的小矩形)

$$R = \bigcup_{i=1}^l \tilde{R}_{k_i}$$

因此

$$|R| = \sum_{i=1}^l |\tilde{R}_{k_i}| \leq \sum_{k=1}^M |\tilde{R}_k| \leq \sum_{i=1}^N |R_i|$$

最后一个小于等于号是因为有些 \tilde{R}_i 可能属于多个 R_j 中 □

习题 4 (Stein, Chapter 1, T13) The following deals with G_δ and F_σ sets

- (1) Show that a closed set is a G_δ and an open set an F_σ
[Hint: If F is closed, consider $\mathcal{O}_n = \{x : d(x, F) < \frac{1}{n}\}$]
- (2) Give an example of an F_σ which is not a G_δ .
[Hint: This is more difficult; let F be a denumerable set that is dense]
- (3) Give an example of a Borel set which is not a G_δ nor an F_σ

评价 这里的

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$$

数分中我们证明过他是关于 x 的连续函数, \mathcal{O}_n 为它在开集 $(-\infty, \frac{1}{n})$ 下的像, 故为开集

证明 (1). 考虑 $\mathcal{O}_n = \{x : d(x, F) < \frac{1}{n}\}$, 首先证明 \mathcal{O}_n 是开集: 对于 $\forall x \in \mathcal{O}_n$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{n} - d(x, F)$, 则对 $\forall x' \in B(x, \varepsilon), \forall y \in F$, 由三角不等式有

$$d(x', y) \leq d(x', x) + d(x, y) < \varepsilon + d(x, F) = \frac{1}{n}$$

取下确界得 $d(x', F) < \frac{1}{n}$, 故 $B(x, \varepsilon) \subseteq \mathcal{O}_n$, 由 x 的任意性知 \mathcal{O}_n 是开集



接下来证明 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$

$F \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$: 对 $\forall x \in F, d(x, F) = 0$, 故 $x \in \mathcal{O}_n, \forall n$, 所以 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \implies F \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \subseteq F$: 对 $\forall x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$, 假设 $x \notin F$, 由 F^c 是开集知 $\exists N \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } B(x, \frac{1}{N}) \subseteq F^c$, 故 $d(x, F) \geq \frac{1}{N}$, 即 $x \notin \mathcal{O}_N$, 这与假设矛盾!

进而闭集是 G_δ 集; 反过来设 O 为开集, 则 O^c 是闭集, 故存在可数开集族 $\{\mathcal{O}_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{s.t. } O^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$, 由 De Morgan's law 知

$$O = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n^c$$

其中 \mathcal{O}_n^c 是闭集, 即开集是 F_σ 集

(2). 考虑 $\mathbb{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$, 由单点集是闭集、 \mathbb{Q} 可数知 \mathbb{Q} 是 F_σ 集, 下面证明 \mathbb{Q} 不是 G_δ 集

假设 $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, 其中 G_n 是开集, 设 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 \mathbb{Q} 的一个排列, 定义 $V_n = G_n \setminus \{r_n\}$, 则 V_n 仍为开集, 再定义 $O_n = \bigcap_{k=1}^n V_k$, 则我们有如下观察

1. $O_1 \supseteq O_2 \supseteq \dots$

2. $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$

3. $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\} \right) = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q} = \emptyset$, 故 $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \emptyset$

4. $\mathbb{Q} \setminus \{r_n\} \subseteq G_n \setminus \{r_n\} = V_n$, 由于 \mathbb{Q} 删去有限个数仍为 \mathbb{R} 的稠密子集, 故 $\forall n, V_n$ 是 \mathbb{R} 的稠密子集

5. 有限多个稠密开集之交仍为稠密子集 (见本题最后的注释), 故 $\forall n, O_n$ 也是 \mathbb{R} 的稠密子集

接下来构造矛盾, 由于 O_1 是 \mathbb{R} 的稠密开集, 所以 $\exists I_1 = [a_1, b_1] \subset O_1$, 且 $b_1 - a_1 < 1$; 由于 O_2 是 \mathbb{R} 的稠密开集, 所以可以在 $I_1 = [a_1, b_1]$ 中找到 $I_2 = [a_2, b_2]$, 且 $b_2 - a_2 < \frac{1}{2}$, 归纳地, 我们可以得到一系列闭区间 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| \rightarrow 0$$

由闭区间套定理知 $\exists x_0, \text{s.t. } x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_1 \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \emptyset$, 矛盾!

(3). 答案 1: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c$

我们需要如下几点补充

- 设 $E \subseteq \mathbb{R}^2$, 定义它的竖直截面和水平截面如下

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}, \quad E^y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}$$

- 若 E 是闭集, 则每个 E_x, E^y 都是闭集: 若 $\{y_n\} \subseteq E_x, \text{s.t. } y_n \rightarrow y$, 那么 $(x, y_n) \rightarrow (x, y)$, 由 E 是闭集知 $(x, y) \in E$, 进而 $y \in E_x$, 故 E_x 是闭集

- 若 E 是 F_σ 集, 则每个 E_x, E^y 都是 F_σ 集: 若 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 其中 F_n 是闭集, 则

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in F_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n)_x$$

- 若 E 是开集, 则每个 E_x, E^y 都是开集: 若 $y \in E_x$, 则 $(x, y) \in E, \exists \varepsilon > 0, \text{s.t. } B((x, y), \varepsilon) \subseteq E$, 进而 $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq E_x$, 故 E_x 是开集



- 若 E 是 G_δ 集, 则每个 E_x, E_y 都是 G_δ 集: 若 $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, 其中 G_n 是开集, 则

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in G_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n)_x$$

接下来我们说明 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c$ 既不是 G_δ 集也不是 F_σ 集, 若它是 G_δ 集, 任取 $r \in \mathbb{Q}^c$, 则 $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c)^r = \mathbb{Q}$ 是 G_δ 集, 但这与 (2) 矛盾!

若它是 F_σ 集, 任取 $q \in \mathbb{Q}$, 则 $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c)_q = \mathbb{Q}^c$ 是 F_σ 集, 进而 $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^c)^c$ 是 G_δ 集, 但这与 (2) 矛盾!

答案 2: $E = (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \cup ((1, 2) \cap \mathbb{Q}^c)$

论述过程较为复杂, 助教摆了

□

评价 若 A, B 都是 \mathbb{R} 的稠密开集, 则 $A \cap B$ 也是 \mathbb{R} 的稠密子集 (再由数学归纳法可以推广到有限交)

证明 回忆稠密的等价命题: $X \subseteq \mathbb{R}$ 是稠密子集 $\iff \forall$ 非空开集 $O, O \cap X \neq \emptyset$

对 $\forall O \subset \mathbb{R}$ 是开集, \exists 开区间 $I \subseteq O$, 由 A 稠密知 $I \cap A \neq \emptyset$, 而 $I \cap A$ 也是开集, 结合 B 稠密知 $(I \cap A) \cap B \neq \emptyset$, 而 $I \cap (A \cap B) \subseteq O \cap (A \cap B)$, 故 $O \cap (A \cap B) \neq \emptyset$, 所以 $A \cap B$ 是 \mathbb{R} 的稠密开集

习题 5 (Stein, Chapter 1, T19) Here are some observations regarding the set operation $A + B$

- (1) Show that if either A and B is open, then $A + B$ is open. (注意这里是 either 不是 both)
- (2) Show that if A and B are closed, then $A + B$ is measurable.
- (3) Show, however, that $A + B$ might not be closed even though A and B are closed.

评价 这里的集合 A, B 均为 \mathbb{R}^d 的子集

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

证明 (1). 不妨设 A 是开集, 下面用定义证明 $A + B$ 是开集: 对 $\forall x + y \in A + B$, 因为 A 是开集, $x \in A$, 故 $\exists \varepsilon > 0$, s.t. $B(x, \varepsilon) \subseteq A$, 下证 $B(x + y, \varepsilon) \subseteq A + B$

对 $\forall a \in B(x + y, \varepsilon)$, 因为 $a = (a - y) + y$, 所以我们只需验证 $a - y \in A$, 进而 $a = (a - y) + y \in A + B$, 注意到

$$|(a - y) - x| = |a - (x + y)| < \varepsilon$$

即 $a - y \in B(x, \varepsilon) \subseteq A \implies B(x + y, \varepsilon) \subseteq A + B$, 故 $A + B$ 是开集

或者也可以如下证明

$$A + B = \bigcup_{b \in B} A + \{b\}$$

由 $A + \{b\}$ 表示开集 A 的平移, 故仍为开集, $A + B$ 为一族开集之并, 故仍为开集

(2). Case 1. A, B 都是紧集

我们证明 $A + B$ 也是紧集, 由于在 \mathbb{R}^d 中紧集与有界闭集等价, 我们只需证明 $A + B$ 有界且为闭集, 一方面由 A, B 是紧集知 $\exists M_1, M_2$, s.t.

$$|x| \leq M_1 \quad |y| \leq M_2, \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

进而对 $\forall x + y \in A + B$, 我们有

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq M_1 + M_2$$



故 $A+B$ 有界, 另一方面假设 $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A+B$, 且 $x_n + y_n \rightarrow a$, 下面证明 $a \in A+B$, 由 A 是紧集知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, s.t. $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in A$, 由 B 是紧集知 $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 存在收敛子列 $\{y_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$, s.t. $y_{n_{k_l}} \rightarrow y_0 \in B$, 故我们考虑子列 $\{x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$, 有 $x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}} \rightarrow x_0 + y_0 \in A+B$, 由极限唯一知 $a = x_0 + y_0 \in A+B$, 故 $A+B$ 是闭集

综上 A, B 是紧集时, $A+B$ 也是紧集, 故可测

Case 2. 一般情况

因为 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A \cap \overline{B(0, k)}, B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B \cap \overline{B(0, k)}$, 对 $\forall k \in \mathbb{N}^*, A \cap \overline{B(0, k)}, B \cap \overline{B(0, k)}$ 是有界闭集, 故为紧集, 注意到

$$\begin{aligned} A+B &= \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A \cap \overline{B(0, k)} \right] + \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} B \cap \overline{B(0, k)} \right] \\ &= \bigcup_{k, l=1}^{\infty} \left([A \cap \overline{B(0, k)}] + [B \cap \overline{B(0, l)}] \right) \end{aligned}$$

是可数个紧集的并集, 故可测

(3). 反例 1: 考虑 \mathbb{R}^2 上的集合

$$A = \{(x, y) : xy = 1, x > 0\}, B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

其中 A 是双曲线的上半支 (常用来构造反例), B 是 x 轴, 则

$$A+B = \left\{ \left(x + y, \frac{1}{x} \right) : x > 0, y \in \mathbb{R} \right\}$$

取 $y = -x = n$, 则 $(0, \frac{1}{n}) \in A+B$, 且 $(0, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$, 但是 $(0, 0) \notin A+B$

反例 2: 考虑 \mathbb{R} 上的集合

$$A = \mathbb{Z}, B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ n + \frac{1}{n} \right\}$$

取 $m = -n \in A, n + \frac{1}{n} \in B$, 则 $\frac{1}{n} \in A+B$, 且 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, 但是 $0 \notin A+B$ □

习题 6 (Stein, Chapter 1, T25) An alternative definition of measurability is as follows: E is measurable if for every $\varepsilon > 0$ there is a closed set F contained in E with $m_*(E \setminus F) < \varepsilon$. Show that this definition is equivalent with the one given in the text.

证明 书上的定义: 称 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 可测, 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists O$ 是开集, 使得 $E \subseteq O$ 且 $m_*(O \setminus E) < \varepsilon$; 记书上的定义为 (1), 题中的定义为 (2)

(1) \implies (2): 由 E 可测知 E^c 也可测, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 开集 $O \supseteq E^c$, s.t. $m_*(O \setminus E^c) < \varepsilon$, 考虑 $F = O^c$, 则 F 是闭集且 $F \subseteq E, E \setminus F = E \cap F^c = E \cap O = (E^c)^c \cap O = O \setminus E^c$, 故

$$m_*(E \setminus F) = m_*(O \setminus E^c) < \varepsilon$$

(2) \implies (1): 设 E 可测, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 闭集 $F \subseteq E$, s.t. $m_*(E \setminus F) < \varepsilon$, 考虑 $O = F^c$, 则 O 是开集, 且 $E^c \subseteq O, O \setminus E^c = O \cap (E^c)^c = (F^c)^c \cap E = E \setminus F$, 故

$$m_*(O \setminus E^c) = m_*(E \setminus F) < \varepsilon$$

进而 E^c 可测, 再由补集可测知 E 也可测 □

习题 7 设 R 是闭矩体, 证明 $m_*(\partial R) = 0, m_*(R^\circ) = |R|$, 其中 R° 表示 R 的内部

证明 要证明 $m_*(\partial R) = 0$, 只需证明 $\forall \varepsilon > 0, m_*(\partial R) < \varepsilon$ 即可, 还是考虑二进方体, 记

$$\Gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1}{2^k}([0, 1]^n + m) : m \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

$$\mathcal{F}_k = \{Q \in \Gamma_k : Q \cap \partial R \neq \emptyset\}$$

则我们有如下观察

$$\#\mathcal{F}_k \leq \frac{\text{Area}(\partial R) \times 2^{-k} \times 2}{2^{-kn}} = 2\text{Area}(\partial R) \cdot 2^{k(n-1)}$$

其中分子是覆盖的最大可能体积 (底面积为 $\text{Area}(\partial R)$, 高是 2^{-k} , $\times 2$ 是因为 ∂R 可能在上下两个二进方体的公共面上), 分母是单个二进方体的体积, 进而

$$m_*(\partial R) \leq \sum_{Q \in \mathcal{F}_k} |Q| = 2^{-nk} \cdot \#\mathcal{F}_k = \frac{2\text{Area}(\partial R)}{2^k}$$

令 $k \rightarrow \infty$ 知 $m_*(\partial R) = 0$

接下来证明 $m_*(R^\circ) = |R|$, 一方面由单调性知 $m_*(R^\circ) \leq m_*(R) = |R|$, 另一方面, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 我们考虑将开矩体的每个面往内“推”一点, 只要推的距离足够小, 体积差距就不会“差太多”, 因此存在闭矩体 $\exists \tilde{R} \subseteq R^\circ \subseteq R, \text{s.t. } |R| > |\tilde{R}| > |R| - \varepsilon$, 进而由单调性有

$$m_*(R^\circ) \geq m_*(\tilde{R}) = |\tilde{R}| = |R| - \varepsilon$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得证

□