第三次习题课

[1]: 用 Eisenstein 判别法证明 在 Q 上不可约

① $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}$ (p 为素数)

② x^p+px+1 (p 为奇素数)

③ $x^p+px+2p-1$ (p 为素数)

[2]: 设 $f(x)$ 为一个整系数多项式，a,b,c 互异整数，证明：不可能有

$f(a)=b \quad f(b)=c \quad f(c)=a$

[3] 若既约分数 $\frac{q}{p}$ 是整系数多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的根

证明：对任何整数 k，$pk-q \mid f(k)$

[4] 证明：若实系数多项式 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的一切根都是

实的，则在 $f'(x)$ 的两个相邻根之间，$f(x)$ 有一个根且为单根

[5]: 证明：数域 F 上的一个 n 次多项式 $f(x)$ 能被它的导数 $f'(x)$ 整除

的充分必要条件为：$f(x)=a(x-b)^n \quad a,b\in F, a\neq 0$

[6] 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为两个非零多项式，证明 $\exists$ 正整数 n, st 对任意整数 $a, b > n$ 有 $(f^a(x), g(x)) = (f^b(x), g(x))$

[7] 设 $f(x)$ 为整系数多项式，且 $f(1)=f(2)=f(3)=p$，证明不存在整数 n, st $f(n)=2p$

[8] 设线性方程组

$$\begin{cases} a_1^{n-1}x_1 + a_1^{n-2}x_2 + \cdots + a_1 x_{n-1} + x_n = -a_1^n \\ a_2^{n-1}x_1 + a_2^{n-2}x_2 + \cdots + a_2 x_{n-1} + x_n = -a_2^n \\ \vdots \\ a_n^{n-1}x_1 + a_n^{n-2}x_2 + \cdots + a_n x_{n-1} + x_n = -a_n^n \end{cases}$$

其中 $a_1, \ldots, a_n$ 互不相同

证明：上述方程组有唯一解，求出这个解

[9]：把实数域 $\mathbb{R}$ 看成有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间，$b=p^3q^2r$

p, q, r 为互不相同素数，证明 $1, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{b^2}, \ldots, \sqrt[n]{b^{n-1}}$

线性无关

11：用 Eisenstein 判别法证明 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约

① $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}$（$p$ 为素数）

② x^p+px+1（p 为奇素数）

③ $x^p+px+2p-1$（p 为素数）

①：$p!f(x)=p!+p!x+A_p^{p-2}x^2+\cdots+x^p$ 用 Eisenstein

②：令 $x=y-1$ $f(y-1)=y^p-C_p^1y^{p-1}+C_p^2y^{p-2}+\cdots-C_p^{p-2}y^2+(C_p^{p-1}+p)y-p$

用 Eisenstein

③：令 $x=y+1$ $g(y)=f(y+1)=y^p+C_p^1y^{p-1}+\cdots+C_p^{p-2}y^2+(C_p^{p-1}+p)y+3p$

$p\neq 3$ 时 Eisenstein

$p=3$ 时 x^3+3x+5 在 $\mathbb{Q}$ 上根只能为 ±1，±5，代入全部不为 0

故不可约

12：设 $f(x)$ 为一个整系数的多项式，a,b,c 互异整数，证明：不可能有

$f(a)=b$ $f(b)=c$ $f(c)=a$

设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，$a_i\in\mathbb{Z}$

$f(a)-f(b)=a_0(a^n-b^n)+a_1(a^{n-1}-b^{n-1})+\cdots+a_{n-1}(a-b)=(a-b)Q(a,b)$

$f(b)-f(c)=(b-c)Q(b,c)$

$f(c)-f(a)=(c-a)Q(c,a)$

三式相乘

$\Rightarrow Q(a,b)Q(b,c)Q(c,a)=1$

$\Rightarrow |Q(a,b)| = |Q(b,c)| = |Q(c,a)| = 1$

于是 $|b-c| = |f(a)-f(b)| = |a-b|$

$|a-b| = |f(c)-f(a)| = |c-a|$

$\Rightarrow \quad |a-b| = |b-c| = |c-a|$

而在 $\mathbb{Z}$ 上 不可能有三个互不相同整数 距离两两为1，故 f 不可能

[3] 若既约分数 $\frac{q}{p}$ 是整系数多项式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 的根

证明：对任何整数 k，$pk-q \mid f(k)$

$\frac{q}{p}$ 为 $f(x)$ 根

$f(x) = \left(x-\frac{q}{p}\right) g(x)$

$= (px-q)\left(\frac{1}{p}g(x)\right)$

由于 $(px-q)$ 本原 $\Rightarrow \frac{1}{p}g(x) \in \mathbb{Z}[x]$

故 $pk-q \mid f(k)$

[4] 证明：若实系数多项式 $f(x) = a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 的一切根都是实的，则在 $f'(x)$ 的两个相邻根之间，都有一个根且为单根

设 $f(x) = a_0(x-x_1)^{r_1} \cdots (x-x_k)^{r_k}$

其中 $x_1, \ldots, x_k$ 为互不相同的实根，且 $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$

$r_1 + \cdots + r_k = n$

由 Rolle 定理 (x_{k-1}, x_k) 中必存在实根 记为 $y_1, \dots, y_{k-1}$

而 $x_1, \dots, x_k$ 为 $f(x)$ r_1 重, …, r_{k-1} 重根

因 $f'(x)$ $n-1$ 次, 而我们已找到 $n-1$ 个根, 故 $f(x)$ 一切根都实

例: 证明: 数域 F 上的一个 n 次多项式 $f(x)$ 能被它的导数 整除 的充分必要条件为: $f(x)=a(x-b)^n$ $a, b \in F, a \neq 0$

充分性 显然的

必要性: $f(x)$ 标准分解:

$f(x)=a p_1^{r_1}(x) \dots p_s^{r_s}(x)$ 其中 $p_1(x), \dots, p_s(x)$ 为互不相同的首一不可约多项式

$f'(x) = p_1^{r_1-1} \dots p_s^{r_s-1}(g(x))$ $p_i(x) \nmid g(x)$

而 $f'(x) \mid f(x)$ 有 $g(x) \mid p_1(x) \cdots p_s(x)$ 而 $p_i(x) \nmid g(x)$

$\Rightarrow g(x)=c \neq 0$ 设 $\deg p_i(x)=n_i$

$\Rightarrow$ $n_1 r_1 + \dots + n_s r_s = n$

$n_1(r_1-1) + \dots + n_s(r_s-1) = n-1$

$\Rightarrow s=1$ $n_1=1$ $\Rightarrow f(x)=a(x-b)^n$ 即可

例 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为两个非零多项式, 证明 $\exists$ 正整数 n, st 对任意整数 $a, b > n$ 有 $(f^a(x), g(x)) = (f^b(x), g(x))$

Pf: 若 $(f, g)=1$, 显然成立.

若 $(f,g)\neq 1$

设 $(f,g)=d(x)=a p_1^{k_1}(x)\cdots p_l^{k_l}(x)$ 　对 $k_i \geq 1$

设 $g(x)=p_1^{s_1}\cdots p_l^{s_l}\, g_1(x)$ 　其中 $p_i \nmid g_1(x)$

取 $n=\max(s_1,\ldots,s_l)$

则 $(f^n(x),g(x))=p_1^{s_1}(x)\cdots p_l^{s_l}(x)$

当 $s\geq n$ 时 $(f^s(x),g(x))=p_1^{s_1}\cdots p_l^{s_l}$ 　#

[7] 设 $f(x)$ 为整系数多项式，且 $f(1)=f(2)=f(3)=p$，证明不存在整数 m，s.t. $f(m)=2p$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)g(x)+p$

其中 $g(x)\in Q(x)$，而 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 本原

$g(x)\in Z(x)$

若有 $f(m)=(m-1)(m-2)(m-3)g(m)+p=2p$

即 $(m-1)(m-2)(m-3)g(m)=p$

则以上三个因子为 ±1 一个为 $\pm p$

Ж讨论这4个因子以及 $\pm p$ 情形都不对

故无 $m\in Z$ s.t. $f(m)=2p$

例 设线性方程组
$$\begin{cases} a_1^{n-1}x_1 + a_1^{n-2}x_2 + \cdots + a_1 x_{n-1} + x_n = -a_1^n \\ a_2^{n-1}x_1 + a_2^{n-2}x_2 + \cdots + a_2 x_{n-1} + x_n = -a_2^n \\ \vdots \\ a_n^{n-1}x_1 + a_n^{n-2}x_2 + \cdots + a_n x_{n-1} + x_n = -a_n^n \end{cases}$$

其中 $a_1, \ldots, a_n$ 互不相同

证明：上述方程组有唯一解，求出这个解

由范德蒙得行列式知，解必存在唯一

下面求出此解：

设方程组有解 $(x_1, \ldots, x_n)$

则 $a_1, \cdots, a_n$ 为一元n次方程组 $\lambda^n + x_1\lambda^{n-1} + \cdots + x_{n-1}\lambda + x_n = 0$ 的n个解

由 Vieta 定理知

$x_1 = -(a_1 + \cdots + a_n)$

$x_2 = (-1)^2(a_1a_2 + \cdots + a_{n-1}a_n)$

$\vdots$

$x_n = (-1)^n a_1 \cdots a_n$

问：把实数域 $\mathbb{R}$ 看成有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间，$b=p\cdots q$，$p,\cdots,q$ 为互不相同素数，证明 $1,\sqrt[n]{b},\sqrt[n]{b^2},\cdots,\sqrt[n]{b^{n-1}}$ 线性无关

若线性相关，$\exists$ 不全为0的 $k_0,k_1,\dots,k_{n-1}\in\mathbb{Q}$ s.t.

$k_0+k_1\sqrt[n]{b}+\dots+k_{n-1}\sqrt[n]{b^{n-1}}=0$

令 $f(x)=k_{n-1}x^{n-1}+\dots+k_1x+k_0$

则 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$，$x=\sqrt[n]{b}$ 为一个根

而 $x^n-b=0$ 取 p，$p\mid b$

用Eisenstein判别法知 x^n-b 不可约

而 x^n-b 与 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不互素

$\Rightarrow$ x^n-b 与 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不互素

而 x^n-b 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约

$\Rightarrow x^n-b\mid f(x)$ 而 $\deg f(x)=n-1$，矛盾!

故 $1,\sqrt[n]{b},\dots,\sqrt[n]{b^{n-1}}$ 线性无关