第一次习题课讲义

涂嘉乐

2025 年 10 月 12 日

1 作业选讲

习题 1（T113 P10）设 A_{ij} 是 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 $\det A$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式，证明：

$$\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{jk} \\ A_{il} & A_{jl} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j+k+l} A \begin{pmatrix} 1 & \cdots & (i-1) & (i+1) & \cdots & (j-1) & (j+1) & \cdots & n \\ 1 & \cdots & (k-1) & (k+1) & \cdots & (l-1) & (l+1) & \cdots & n \end{pmatrix} \det(A)$$

评价 本题乍一看没什么头绪，我们先进行分析：回忆 A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

则 $LHS = A^* \begin{pmatrix} k & l \\ i & j \end{pmatrix}$，由伴随矩阵的性质知 $AA^* = \det(A) I_n$，接下来我们可以先讨论一些特殊情形，然后再将问题一般化

证明 Case 1. 当 $i=k=n-1, j=l=n$ 时，此时 $LHS = \begin{vmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ A_{n-1,n} & A_{n,n} \end{vmatrix}$，即为 A^* 右下角的 2×2 分块，为了让所求式子中出现这一项，我们考虑对 $AA^* = \det(A) I_n$ 中的 A^* 进行分块处理，见下式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & A_{n-1,1} & A_{n1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & A_{n-1,2} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & A_{n-1,n-2} & A_{n,n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n-1,n} & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & * & \det(A) & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 & \det(A) \end{pmatrix}$$

其中 $*$ 表示不重要的部分，关于新矩阵的最后两列，大家也可以用行列式的 Laplace 展开

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \det(A), & i = j \end{cases}$$

进行验证。对上式两边同时取行列式即得

$$\det(A)\cdot\begin{vmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ A_{n-1,n} & A_{n,n} \end{vmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-2 \\ 1 & \cdots & n-2 \end{pmatrix}\cdot\det(A)^2 = (-1)^{n-1+n-1+n+n}\cdot A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-2 \\ 1 & \cdots & n-2 \end{pmatrix}\cdot\det(A)^2$$

如果 $\det(A) \neq 0$，则两边同时消去一个 $\det(A)$ 即得证；如果 $\det(A) = 0$，那么 $\mathrm{rank}(A^*) \leq 1$，进而 $\begin{vmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ A_{n-1,n} & A_{n,n} \end{vmatrix} = 0$，即 $LHS = RHS = 0$，仍成立

Case 2. 一般情形，我们考虑将 A 的第 i,j 行与第 $n-1,n$ 行交换，A 的第 k,l 列与第 $n-1,n$ 列交换，记所得的矩阵为 $\tilde{A}$，则

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,n-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,n} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,k} & a_{1,l} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,n-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,l-1} & a_{i-1,n} & a_{i-1,l+1} & \cdots & a_{i-1,n-2} & a_{i-1,k} & a_{i-1,l} \\
a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,k+1} & \cdots & a_{n-1,l-1} & a_{n-1,n} & a_{n-1,l+1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,k} & a_{n-1,l} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,n-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,l-1} & a_{i+1,n} & a_{i+1,l+1} & \cdots & a_{i+1,n-2} & a_{i+1,k} & a_{i+1,l} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,ki-1} & a_{j-1,n-1} & a_{j-1,k+1} & \cdots & a_{j-1,l-1} & a_{j-1,n} & a_{j-1,l+1} & \cdots & a_{j-1,n-2} & a_{j-1,k} & a_{j-1,l} \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,n-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,n} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,k} & a_{n,l} \\
a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,k-1} & a_{j+1,n-1} & a_{j+1,k+1} & \cdots & a_{j+1,l-1} & a_{j+1,n} & a_{j+1,l+1} & \cdots & a_{j+1,n-2} & a_{j+1,k} & a_{j+1,l} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,k-1} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,k+1} & \cdots & a_{n-2,l-1} & a_{n-2,n} & a_{n-2,l+1} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,k} & a_{n-2,l} \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{i,n-1} & a_{i,k+1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,n} & a_{i,l+1} & \cdots & a_{i,n-2} & a_{i,k} & a_{i,l} \\
a_{j,1} & \cdots & a_{j,k-1} & a_{j,n-1} & a_{j,k+1} & \cdots & a_{j,l-1} & a_{j,n} & a_{j,l+1} & \cdots & a_{j,n-2} & a_{j,k} & a_{j,l}
\end{pmatrix}$$

我们对 $\tilde{A}$ 运用 Case 1，则有

$$\begin{vmatrix} \tilde{A}_{n-1,n-1} & \tilde{A}_{n,n-1} \\ \tilde{A}_{n-1,n} & \tilde{A}_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1+n+n-1+n}\tilde{A}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-2 \\ 1 & \cdots & n-2 \end{pmatrix}\det(\tilde{A})$$

接下来以 $\tilde{A}_{n,n}$ 为例，因为

$$\tilde{A}_{n,n}=\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,n-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,n} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,k}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,n-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,l-1} & a_{i-1,n} & a_{i-1,l+1} & \cdots & a_{i-1,n-2} & a_{i-1,k}\\
a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,k+1} & \cdots & a_{n-1,l-1} & a_{n-1,n} & a_{n-1,l+1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,k}\\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,n-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,l-1} & a_{i+1,n} & a_{i+1,l+1} & \cdots & a_{i+1,n-2} & a_{i+1,k}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,ki-1} & a_{j-1,n-1} & a_{j-1,k+1} & \cdots & a_{j-1,l-1} & a_{j-1,n} & a_{j-1,l+1} & \cdots & a_{j-1,n-2} & a_{j-1,k}\\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,n-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,n} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,k}\\
a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,k-1} & a_{j+1,n-1} & a_{j+1,k+1} & \cdots & a_{j+1,l-1} & a_{j+1,n} & a_{j+1,l+1} & \cdots & a_{j+1,n-2} & a_{j+1,k}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,k-1} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,k+1} & \cdots & a_{n-2,l-1} & a_{n-2,n} & a_{n-2,l+1} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,k}\\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{i,n-1} & a_{i,k+1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,n} & a_{i,l+1} & \cdots & a_{i,n-2} & a_{i,k}
\end{vmatrix}$$

我们此时将第 k 列与第 $n-1$ 列对换，行列式改变 (-1)；将第 l 列不断与右边的列对换至最后一列，行列式改变 $(-1)^{n-1-l}$（$l\to l+1\to\cdots\to n-1$）；同理将第 i 行和第 $n-1$ 行对换，行列式改变 (-1)；将第 j 行不断与下面的行对换至最后一行，行列式改变 $(-1)^{n-1-j}$，经过这样操作后我们就将 $\tilde{A}_{n,n}$ 变为 $A_{j,l}$，因此

$$\tilde{A}_{n,n}=(-1)^{2(n-1)-j-l}A_{j,l}=(-1)^{j+l}A_{j,l}$$

同理我们有

$$\tilde{A}_{n-1,n-1}=(-1)^{i+k}A_{i,k},\quad \tilde{A}_{n-1,n}=(-1)^{i+l}A_{i,l},\quad \tilde{A}_{n,n-1}=(-1)^{j+k}A_{j,k}$$

且

$$\tilde{A}\begin{pmatrix}1 & \cdots & n-2\\ 1 & \cdots & n-2\end{pmatrix}=(-1)^4A\begin{pmatrix}1 & \cdots & (i-1) & (i+1) & \cdots & (j-1) & (j+1) & \cdots & n\\ 1 & \cdots & (k-1) & (k+1) & \cdots & (l-1) & (l+1) & \cdots & n\end{pmatrix}$$

$$\det(\tilde{A})=(-1)^{1+1}\det(A)=\det(A)$$

所以我们有

$$LHS=\begin{vmatrix}(-1)^{i+k}A_{i,k} & (-1)^{j+k}A_{j,k}\\ (-1)^{i+l}A_{i,l} & (-1)^{j+l}A_{j,l}\end{vmatrix}=(-1)^{k+l}\begin{vmatrix}(-1)^{i}A_{i,k} & (-1)^{j}A_{j,k}\\ (-1)^{i}A_{i,l} & (-1)^{j}A_{j,l}\end{vmatrix}=(-1)^{i+j+k+l}\begin{vmatrix}A_{i,k} & A_{j,k}\\ A_{i,l} & A_{j,l}\end{vmatrix}$$

$$RHS=A\begin{pmatrix}1 & \cdots & (i-1) & (i+1) & \cdots & (j-1) & (j+1) & \cdots & n\\ 1 & \cdots & (k-1) & (k+1) & \cdots & (l-1) & (l+1) & \cdots & n\end{pmatrix}\det(A)$$

所以一般情况得证 □

习题 2（P143 T4）设给定矩阵 $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{m\times p}$，未知矩阵 $X\in\mathbb{F}^{n\times p}$，证明矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件是 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,B)$，其中 (A,B) 是矩阵 A,B 并排而成的矩阵

证明 ($\Longrightarrow$)：将 A,X,B 按列分块为 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),X=(x_1,\cdots,x_p),B=(\beta_1,\cdots,\beta_p)$，其中 $\alpha_i\in\mathbb{R}^{m\times 1},x_i\in\mathbb{F}^{n\times 1},\beta_i\in\mathbb{F}^{m\times 1}$，则

$$AX=B\iff(Ax_1,\cdots,Ax_p)=(\beta_1,\cdots,\beta_p)$$

即 $AX=B$ 有解当且仅当 $Ax_1=\beta_1,\cdots,Ax_n=\beta_n$ 有解，由课本 3.6 节的定理 2 知，$\operatorname{rank}(A)=$

$\text{rank}(A,\beta_i),\forall i$，即 $\text{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\text{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_i)$，即 $\forall i,\beta_i$ 可以被 A 的列向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 线性表示，设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 的一个极大无关组为 $\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}\}$，则它也是 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_p\}$ 的极大无关组，进而

$$\text{rank}(A)=\text{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}=\text{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_p\}=\text{rank}(A,B)$$

$(\Longleftarrow)$：由 $\text{rank}(A)=\text{rank}(A,B)$ 知，$\text{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}=\text{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_p\}$，即 $\forall i,\beta_i$ 可以被 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 线性表示，即

$$\text{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}=\text{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_i\}\Longrightarrow\text{rank}(A)=\text{rank}(A,\beta_i)$$

则 $\forall 1\le i\le p, Ax=\beta_i$ 有解，所以 $AX=B$ 有解 □

习题 3（P134 T6）设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{n\times m}$，证明 $\text{rank}(AB)=\text{rank}(A)$ 的充要条件是：存在 $C\in\mathbb{F}^{m\times n}$, s.t. $A=ABC$，并由此证明：如果 $\text{rank}(AB)=\text{rank}(A)$，且方阵 AB 幂等，则方阵 BA 也幂等

证明 $(\Longleftarrow)$：若存在 $C\in\mathbb{F}^{m\times n}$, s.t. $A=ABC$，则

$$\text{rank}(A)=\text{rank}(ABC)\le\text{rank}(AB)\le\text{rank}(A)\Longrightarrow\text{rank}(A)=\text{rank}(AB)$$

$(\Longrightarrow)$：方法 I（较为巧妙）

因为矩阵方程 $ABX=A$ 有解 C 当且仅当 $\text{rank}(AB,A)=\text{rank}(A)$,所以我们只需证明 $\text{rank}(AB,A)=\text{rank}(A)$，因为 $(AB,A)=A(B,I_n)$，所以我们有

$$\text{rank}(A)=\text{rank}(AB)\le\text{rank}(AB,A)=\text{rank}(A(B,I_n))\le\text{rank}(A)$$

若 $\text{rank}(AB)=\text{rank}(A)$ 且 AB 幂等，则 $\exists C$, s.t. $ABC=A$，所以

$$(BA)^2=BABA=BABABC=B(ABAB)C=BABC=BA$$

即 BA 也幂等

方法 II（构造性证明，见补充习题） □

评价 本题运用线性空间的语言可以非常快解决，我们很快就会学到

习题 4（P151 T2）设 A,B,C 分别是 $m\times n,p\times q,m\times q$ 阶矩阵，X 是 $n\times p$ 阶未知矩阵，证明：矩阵方程 $AXB=C$ 有解的充分必要条件是 $(I_m-AA^-)C=0$ 和 $C(I_q-B^-B)=0$，并且当有解时，它的通解为

$$X=A^-CB^-+(I_n-A^-A)Y+Z(I_p-BB^-)+(I_n-A^-A)W(I_p-BB^-)$$

其中 Y,Z,W 为任意 $n\times p$ 阶矩阵

证明 $(\Longrightarrow)$：若矩阵方程 $AXB=C$ 有解 $X=X_0$，则

$$\begin{aligned}(I_m-AA^-)C&=(I_m-AA^-)AX_0B=AX_0B-AA^-AX_0B\\&=AX_0B-AX_0B=O\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C(I_q-B^-B)&=AX_0B(I_q-B^-B)=AX_0B-AX_0BB^-B\\&=AX_0B-AX_0B=O\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$)：若 $(I_m-AA^-)C=0, C(I_q-B^-B)=0$，则 $C=AA^-C, C=CB^-B$，我们取 $X_0=A^-CB^-$，则

$$AX_0B=A(A^-CB^-)B=(AA^-C)B^-B=CB^-B=C$$

即 $X_0=A^-CB^-$ 为矩阵方程 $AXB=C$ 的一个解

接下来证明 $X=A^-CB^-+(I_n-A^-A)Y+Z(I_p-BB^-)+(I_n-A^-A)W(I_p-BB^-)$ 为矩阵方程 $AXB=C$ 的通解，我们需要证明两点

- 上面的表达式确实为解
- 每个解都能写成上面的表达式

首先

$$\begin{aligned}AXB&=A[A^-CB^-+(I_n-A^-A)Y+Z(I_p-BB^-)+(I_n-A^-A)W(I_p-BB^-)]B\\&=AX_0B+A(I_n-A^-A)YB+AZ(I_p-BB^-)B+A(I_n-A^-A)W(I_p-BB^-)B\\&=O+(A-AA^-A)YB+AZ(B-BB^-B)+(A-AA^-A)W(B-BB^-B)\\&=O+O+O+O=O\end{aligned}$$

即 X 确实是解，其次，对于任意矩阵方程 $AXB=C$ 的解 $X=X_0$，我们证明它均有通解的形式，取通解中的 $Y=Z=X_0, W=-X_0$，则

$$\begin{aligned}&A^-CB^-+(I_n-A^-A)X_0+X_0(I_p-BB^-)+(I_n-A^-A)(-X_0)(I_p-BB^-)\\=&A^-CB^-+X_0-A^-AX_0+X_0-X_0BB^--X_0+A^-AX_0+X_0BB^--A^-CB^-\\=&X_0\end{aligned}$$

即 X_0 确实可以写为通解的形式 □

习题 5 (P66 T9) 设 $b_{ij}=(a_{i1}+\cdots+a_{in})-a_{ij}, 1\le i,j\le n$，证明

$$\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\end{vmatrix}$$

如果 $b_{ij}=(a_{i1}+\cdots+a_{in})-ka_{ij}, 1\le k\le n, 1\le i,j\le n$，结论又怎样？

证明 直接考虑 $b_{ij}=(a_{i1}+\cdots+a_{in})-ka_{ij}, 1\le k\le n, 1\le i,j\le n$ 的情形

解法 I：我们记 $s_i = a_{i1} + \cdots + a_{in}$，注意到每列中有相同的 $(s_1, \cdots, s_n)^T$，则我们可以使用升阶法

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} s_1 - ka_{11} & s_1 - ka_{12} & \cdots & s_1 - ka_{1n} \\ s_2 - ka_{21} & s_2 - ka_{22} & \cdots & s_2 - ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n - ka_{n1} & s_n - ka_{n2} & \cdots & s_n - ka_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & s_1 - ka_{11} & s_1 - ka_{12} & \cdots & s_1 - ka_{1n} \\ s_2 & s_2 - ka_{21} & s_2 - ka_{22} & \cdots & s_2 - ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_n - ka_{n1} & s_n - ka_{n2} & \cdots & s_n - ka_{nn} \end{vmatrix} \\
&\xlongequal[2 \le i \le n+1]{\text{第 } i \text{ 列减去第 } 1 \text{ 列}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ s_1 & -ka_{11} & -ka_{12} & \cdots & -ka_{1n} \\ s_2 & -ka_{21} & -ka_{22} & \cdots & -ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & -ka_{n1} & -ka_{n2} & \cdots & -ka_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-k)^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{k} & \frac{1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} \\ s_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ s_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\xlongequal[2 \le i \le n+1]{\text{第 } 1 \text{ 列减第 } i \text{ 列}} (-k)^n \begin{vmatrix} 1 - \frac{n}{k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (1 - \frac{n}{k})(-k)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

解法 II（需要集中注意力）：注意到 b_{ij} 为矩阵 A 的第 i 行的除去第 j 个元素 a_{ij} 的全体元素相加，这样的效果能通过除去第 j 个元素为 $1-k$，其余元素为 1 的列向量 $(1, \cdots, 1, 1-k, 1, \cdots, 1)$ 产生，即

$$
\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-k & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1-k \end{pmatrix}
$$

两边同时取行列式即可得证，即我们只需计算矩阵 K 的行列式（可以通过初等变换来求，以下是一个较

为简单的方法)，其中

$$K=\begin{pmatrix}1-k & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-k & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \ddots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1-k\end{pmatrix}$$

而注意到

$$K=\begin{pmatrix}1-k & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-k & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \ddots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}-kI_n$$

记 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)^T$ 利用 $\lambda^n\det(\lambda I_m-AB)=\lambda^m\det(\lambda I_n-BA)$ 知

$$\det(K)=(-1)^n\det(-K)=(-1)^n\det(kI_n-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})=(-1)^n|k-\alpha\alpha^T|=(-1)^n(k-n)k^{n-1}$$

整理即证 $\square$

2 补充内容

2.1 (分块) 矩阵的打洞细讲

回忆矩阵的三种初等变换

(1) 交换矩阵的两行/列

(2) 某一行/列乘以某个数 λ

(3) 某一行/列乘以 λ 倍加到另一行/列上

类似地，对于分块矩阵也有三种初等变换

(1) 交换矩阵的两个分块行/列

$$\begin{pmatrix}
I_1 &&&&&&&&&&\\
&\ddots&&&&&&&&&\\
&&I_{i-1}&&&&&&&&\\
&&&&&&&I_j&&&\\
&&&&I_{i+1}&&&&&&\\
&&&&&\ddots&&&&&\\
&&&&&&I_{j-1}&&&&\\
&&&I_i&&&&&&&\\
&&&&&&&&I_{j+1}&&\\
&&&&&&&&&\ddots&\\
&&&&&&&&&&I_n
\end{pmatrix}$$

(2) 某一分块行/列**左**乘某个矩阵 M；某一分块列**右**乘某个矩阵 M

$$\begin{pmatrix} I_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & I_{i-1} & & & & \\ & & & M & & & \\ & & & & I_{i+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & I_n \end{pmatrix}$$

(3) 某一分块行**左**乘某个矩阵 M 后加到另一分块行上；某一分块列**右**乘某个矩阵 M 后加到另一分块列上

$$\begin{pmatrix} I_1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & I_{i-1} & & & & & & & & \\ & & & I_i & & & & M & & & \\ & & & & I_{i+1} & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & I_{j-1} & & & & \\ & & & & & & & I_j & & & \\ & & & & & & & & I_{j+1} & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & I_n \end{pmatrix}$$

（该矩阵有两种理解：将第 j 分块行左乘矩阵 M 加到第 i 分块行；将第 i 分块列右乘矩阵 M 加到第 j 分块列）

命题 1（打洞的步骤）打洞，即把某个矩阵 A 通过（分块）初等变换变成上/下三角阵，我们通常要将角落的矩阵变成零矩阵，因此称为打洞，打洞的步骤主要如下

(1) 明确要对矩阵 A 进行上述三种初等变换中的哪一种

(2) 先对单位阵做所需的初等变换得到矩阵 J

(3) 若所需初等变换为行变换，则对矩阵 A 左乘矩阵 J；若所需初等变换为列变换，则对矩阵 A 右乘矩阵 J

这样讲可能比较抽象，我们接下来介绍几个例子，首先最典型的就是 Schur 公式（这里我们假设 D 可逆）

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C)$$

我们要给 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 打洞，即把 B 和 C 都变成零矩阵。首先我们把左下角的 C 打成零矩阵，可以将第一行左乘 $-CA^{-1}$ 加到第二行，我们先对单位阵做该操作得到 $\begin{pmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}$，所以

$$\begin{pmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

然后我们将新矩阵的第一列右乘 $-A^{-1}B$ 加到第二列，我们先对单位阵做该操作得到 $\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ & I \end{pmatrix}$，所以

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

习题 6（去年期中）设 $\mathbb{F}$ 是域，矩阵 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$，证明

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A+B) + \operatorname{rank}(A-B)$$

证明 如果我们能够通过打洞将 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 变成 $\begin{pmatrix} A+B & O \\ O & A-B \end{pmatrix}$，那么就证完了，考虑分块变换

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{pmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \to c_2 - c_1} \begin{pmatrix} A+B & \\ B & A-B \end{pmatrix}$$

接下来是一个棘手的问题，怎么把左下角的 B 打掉？我们可以双管齐下，即行、列变换都使用，设 $x(A+B)+y(A-B)=B$，则 $x+y=0, x-y=1$，解得 $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}$，因此考虑如下分块变换

$$\begin{pmatrix} A+B & \\ B & A-B \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - \frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} A+B & \\ -\frac{A}{2}+\frac{B}{2} & A-B \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \to c_1 + \frac{1}{2}c_2} \begin{pmatrix} A+B & \\ & A-B \end{pmatrix}$$

接下来我们写出每一步所用到的矩阵，第一步是将第二行加到第一行，即为 $\begin{pmatrix} I & I \\ & I \end{pmatrix}$；第二步是将第二列减去第一列，即为 $\begin{pmatrix} I & -I \\ & I \end{pmatrix}$；第三步是将第二行减去 $\frac{1}{2}$ 倍的第一行，即为 $\begin{pmatrix} I & \\ -\frac{1}{2}I & I \end{pmatrix}$；第四步是第一列加上 $\frac{1}{2}$ 倍的第二列，即为 $\begin{pmatrix} I & \\ \frac{1}{2}I & I \end{pmatrix}$，所以

$$\begin{pmatrix} I & \\ -\frac{1}{2}I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -I \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ \frac{1}{2}I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & O \\ O & A-B \end{pmatrix}$$

由于左/右乘可逆矩阵，秩不变，所以

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A+B & O \\ O & A-B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A+B) + \operatorname{rank}(A-B)$$

□

2.2 摄动法

引理 2 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则存在正数 $t_0 > 0$，使得对 $\forall 0 < t < t_0$，方阵 $tI_n + A$ 均可逆

证明 因为 $|tI_n + A|$ 是一个关于 t 的 n 次首一多项式，我们先设

$$|tI_n + A| = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

由于 n 次多项式至多有 n 个实根，若实根全为零，则取任意 $t_0>0$ 均成立；若实根不全为零，则取 t_0 为所有实根中绝对值最小的那个，则对 $\forall 0<t<t_0$，t 均不是 $|tI_n+A|=0$ 的根 □

命题 3 若矩阵的数域为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，我们可以使用摄动法，具体步骤如下

(1) 先证明要证明的命题对可逆阵成立

(2) 取一列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, s.t. $t_k\to 0$，且 t_kI_n+A 均为可逆矩阵，**验证t_kI_n+A仍然满足题目中的条件**，因此要证明的命题对 t_kI_n+A 成立

(3) 利用连续性，我们在等式两边令 $t_k\to 0$，即可得到所证命题

习题 7 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times m}, B\in\mathbb{R}^{n\times n}$，求

$$C=\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}$$

的伴随矩阵

证明 Case 1. 若 A,B 均可逆，以下我们通过尝试求出 C^*，即求矩阵 X 满足 $CX=\det(C)I_{m+n}=|A|\cdot|B|I_{m+n}$，首先考虑 $X_1=\begin{pmatrix}A^* & \\ & B^*\end{pmatrix}$，则 $CX_1=\begin{pmatrix}|A|I_m & \\ & |B|I_n\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}|A|\cdot|B|I_m & \\ & |A|\cdot|B|I_n\end{pmatrix}$，所以我们需要给 A^* 补一个系数 $|B|$，给 B^* 补一个系数 $|A|$，即

$$\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|B|A & \\ & |A|B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A|\cdot|B|I_m & \\ & |A|\cdot|B|I_n\end{pmatrix}=\det(C)I_n\Longrightarrow C^*=\begin{pmatrix}|B|A & \\ & |A|B\end{pmatrix}$$

Case 2. 若 A,B 至少有一个不可逆，由引理 2，存在 $t_1,t_2>0$, s.t. $\forall 0<t<t_1$ 时，方阵 tI_m+A；$\forall 0<t<t_2$ 时，方阵 tI_n+B 均可逆，取 $t_0=\min\{t_1,t_2\}$，则由 Case 1 知

$$\begin{pmatrix}tI_m+A & \\ & tI_n+B\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}|tI_n+B|(tI_m+A) & \\ & |tI_m+A|(tI_n+B)\end{pmatrix},\quad \forall t\in(0,t_0)$$

所以我们可以找到一列 $t_k\to 0$，使得上式成立，令等式两边 $t_k\to 0$，即得

$$\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}|B|A & \\ & |A|B\end{pmatrix}$$

□

2.3 与秩相关的等式、不等式

命题 4 (1) $\operatorname{rank}(AB)\le\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$

(2) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

(3) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & C\\ & B\end{pmatrix}\ge\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

(4) $\operatorname{rank}(A)\le\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}, \operatorname{rank}(B)\le\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}$

(5) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B), \operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

(6) $\operatorname{rank}(A\pm B)\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

(7) $\text{rank}(A-B) \geq |\text{rank}(A) - \text{rank}(B)|$

(8)（Sylvester 不等式）$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$

(9)（Frobenius 不等式）$\text{rank}(ABC) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank}(B)$

证明 (1) 课上证过

(2) 设 $\text{rank}(A) = r_1, \text{rank}(B) = r_2$，则 $P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2AQ_2 & \\ & P_2BQ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}$$

所以 $\text{rank}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = r_1 + r_2 = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

(3) 假设 $\text{rank}(A) = r_1, \text{rank}(B) = r_2$，则存在 A 的 r_1 阶子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_{r_1} \\ j_1 & \cdots & j_{r_1} \end{pmatrix} \neq 0$，存在 B 的 r_2 阶子式 $B\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_{r_2} \\ l_1 & \cdots & l_{r_2} \end{pmatrix} \neq 0$，因此我们考虑 $X = \begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix}$ 的子式（设 A 是 $n \times m$ 阶矩阵）

$$X\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_{r_1} & n+k_1 & \cdots & n+k_{r_2} \\ j_1 & \cdots & j_{r_1} & m+l_1 & \cdots & m+l_{r_2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_{r_1}} & c_{i_1,l_1} & \cdots & c_{i_1,l_{r_2}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_{r_1},j_1} & \cdots & a_{i_{r_1},j_{r_1}} & c_{i_{r_1},l_1} & \cdots & c_{i_{r_1},l_{r_2}} \\ & & & b_{k_1,l_1} & \cdots & b_{k_1,l_{r_2}} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{k_{r_2},l_1} & \cdots & b_{k_{r_2},l_{r_2}} \end{vmatrix} \neq 0$$

所以 X 有一个非零 $r_1 + r_2$ 阶子式，即 $\text{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r_1 + r_2 = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

(4) 用列向量空间看，设 A, B 的列向量分别为 $\alpha_i, \beta_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$，显然有

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \leq \text{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m) = \text{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$$

另一式同理

(5) 因为

$$\begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$$

由 (1) 知 $\text{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq \text{rank}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$，另一式由 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 可得

(6) 因为 $\begin{pmatrix} A & \pm B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} = A \pm B$ 所以

$$\text{rank}(A \pm B) \leq \text{rank}\begin{pmatrix} A & \pm B \end{pmatrix} \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(\pm B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

(7) 因为

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A-B+B)\le\operatorname{rank}(A-B)+\operatorname{rank}(B)$$

所以 $\operatorname{rank}(A-B)\ge\operatorname{rank}(A)-\operatorname{rank}(B)$，交换 A,B 可得 $\operatorname{rank}(B-A)\ge\operatorname{rank}(B)-\operatorname{rank}(A)$，由于 $\operatorname{rank}(A-B)=\operatorname{rank}(B-A)$，所以

$$\operatorname{rank}(A-B)\ge|\operatorname{rank}(A)-\operatorname{rank}(B)|$$

(8) 考虑分块初等变换

$$\begin{pmatrix} I_n & \\ & AB \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\to Ar_1+r_2} \begin{pmatrix} I_n & \\ A & AB \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2\to c_2-c_1B} \begin{pmatrix} I_n & -B \\ A & O \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} A & O \\ I_n & -B \end{pmatrix}$$

所以

$$n+\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_n & \\ & AB \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ I_n & -B \end{pmatrix}\ge\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(-B)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$$

(9) 考虑分块初等变换

$$\begin{pmatrix} ABC & \\ & B \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\to r_1+Ar_2} \begin{pmatrix} ABC & AB \\ & B \end{pmatrix}] \xrightarrow{c_1\to c_1-c_2C} \begin{pmatrix} & AB \\ -BC & B \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} AB & \\ B & -BC \end{pmatrix}$$

所以

$$\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} ABC & \\ & B \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} AB & \\ B & -BC \end{pmatrix}\ge\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)$$

□

评价 大家可以自己把 (8), (9) 打洞过程中每一步初等变换所用到的矩阵写出来

2.4 补充练习（看时间，不一定全讲）

习题 8 证明 A 与 A^T 相似

证明 记

$$S=\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

则 $S^2=I_n\Longrightarrow S^{-1}=S$，且容易验证

$$A^T=SAS$$

□

评价 这个矩阵大家可以记一下，之后还会见到

习题 9 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，B 是 $n\times k$ 阶矩阵，若 $\text{rank}(AB)=\text{rank}(B)$，求证：对任意的 $k\times l$ 阶矩阵 C，$\text{rank}(ABC)=\text{rank}(BC)$

证明 由 Frobenius 不等式知

$$\text{rank}(ABC)\geq \text{rank}(AB)+\text{rank}(BC)-\text{rank}(B)=\text{rank}(BC)$$

另一方面有 $\text{rank}(ABC)\leq \text{rank}(BC)$，所以 $\text{rank}(ABC)=\text{rank}(BC)$ □

习题 10 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，求证

(1) 若 $\text{rank}(A)=n$，即 A 是列满秩矩阵，则必存在秩为 n 的 $n\times m$ 阶矩阵 B，使得 $BA=I_n$，我们称这样的矩阵 B 为 A 的左逆

(2) 若 $\text{rank}(A)=m$，即 A 是行满秩矩阵，则必存在秩为 m 的 $n\times m$ 阶矩阵 C，使得 $AC=I_m$，我们称这样的矩阵 C 为 A 的右逆

证明 只证明 (1)，(2) 类似，由 $\text{rank}(A)=n,A$ 是 $m\times n$ 阶矩阵知 $\exists m$ 阶方阵 P 和 n 阶方阵 Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}I_n\\O\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix}I_n & O\end{pmatrix}PAQ=\begin{pmatrix}I_n & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n\\O\end{pmatrix}=I_n$$

进而

$$\begin{pmatrix}I_n & O\end{pmatrix}PA=Q^{-1}\Longrightarrow Q\begin{pmatrix}I_n & O\end{pmatrix}PA=I_n$$

我们取矩阵 $B=Q\begin{pmatrix}I_n & O\end{pmatrix}PA$ 即可 □

有了左/右逆的概念，我们再来看一下这道作业题（必要性的证明）

习题 11（P134 T6）设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{n\times m}$，证明 $\text{rank}(AB)=\text{rank}(A)$ 的充要条件是：存在 $C\in\mathbb{F}^{m\times n}$, s.t. $A=ABC$，并由此证明：如果 $\text{rank}(AB)=\text{rank}(A)$，且方阵 AB 幂等，则方阵 BA 也幂等

证明 $(\Longrightarrow)$: 设 $A=P\begin{pmatrix}I_r & O\\O & O\end{pmatrix}Q$，将 QB 进行分块，设 $QB=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}$，则

$$AB=P\begin{pmatrix}I_r & O\\O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\O & O\end{pmatrix}$$

设 $\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\end{pmatrix}=Y$ 由于 $\text{rank}(AB)=\text{rank}(A)=r$，所以 Y 是行满秩矩阵，我们可以取 Y 的一个右逆 Z，则 $YZ=I_r$，我们取 $X=\begin{pmatrix}Z & O\end{pmatrix}Q$ 则

$$ABX=P\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\O & O\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}Y\\O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z & O\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}I_r & O\\O & O\end{pmatrix}Q$$

□

习题 12 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，若 $\operatorname{rank}(A)=r$，则存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

如何求 P,Q？

证明

$$\begin{pmatrix} P_{m\times m} & O_{m\times n} \\ O_{n\times m} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{m\times n} & I_m \\ I_n & O_{n\times m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{n\times n} & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & I_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PA & P \\ I_n & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & O \\ O & I_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PAQ & P \\ Q & O \end{pmatrix}$$

所以我们只需写出矩阵

$$\begin{pmatrix} A & I_m \\ I_n & O \end{pmatrix}$$

对它进行行/列变换直到 A 变为 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，则此时分块矩阵中就有 P 和 Q □

评价 此时 P,Q 并不唯一，因为这取决于行/列变换的顺序

习题 13 设 A 是 n 阶对称方阵或者反对称方阵，$\operatorname{rank}(A)=r$，求证：A 必有一个 r 阶主子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$ 不等于零

证明 由 $\operatorname{rank}(A)=r$，则 A 的行向量组秩也为 r，设行向量组的一个极大无关组为第 $i_1,\cdots,i_r$ 行构成的行向量，由对称/反对称性知，A 的第 $i_1,\cdots,i_r$ 列构成的列向量是 A 的列向量的极大无关组，进而

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ i_1 & \cdots & i_r \end{pmatrix}\neq 0$$

（有点跳步，具体大家自己论述一下） □

习题 14 利用上一题结论，证明反对称方阵的秩必为偶数

证明 假设秩为奇数 $2k+1$，则必存在 $2k+1$ 阶主子式不为零，而反对称方阵的主子式也是反对称的，而奇数阶反对称方阵的行列式一定非零（因为 $A^T=-A$，两边同时取行列式即 $|A|=(-1)^{2k+1}|A|\Longrightarrow|A|=0$），矛盾！ □

习题 15（P114 T14）设 $A\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}$，且 $A\begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix}A^T=\begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix}$，证明 $\det(A)=1$

证明 这个是之前陈老师上课留的思考题，难度还是较大的。

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，则依题意有

$$\begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -A_{12}A_{11}^T+A_{11}A_{12}^T & -A_{12}A_{21}^T+A_{11}A_{22}^T \\ -A_{22}A_{11}^T+A_{21}A_{12}^T & -A_{22}A_{21}^T+A_{21}A_{22}^T \end{pmatrix}$$

所以我们有

$$\begin{cases} A_{11}A_{12}^T = A_{12}A_{11}^T \\ A_{21}A_{22}^T = A_{22}A_{21}^T \\ A_{11}A_{22}^T - A_{12}A_{21}^T = I_n \end{cases}$$

Case 1. A_{22} 可逆

由 Schur 公式

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12} \\ & A_{22} \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\det(A_{22}) = \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\det(A_{22}^T) \\ &= \det(A_{11}A_{22}^T - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}A_{22}^T) = \det[(I_n + A_{12}A_{21}^T) - A_{12}A_{22}^{-1}A_{22}A_{21}^T] \\ &= \det(I_n) = 1 \end{aligned}$$

Case 2. A_{22} 不可逆

我们设 $\tilde{A}_{22} = A_{22} + tX$，其中 X 待定，如果 $A_{22} + tX$ 可逆，我们希望能像 A_{22} 可逆的情形一样，用 Schur 公式计算 $\det(A(t)) = \det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} + tX \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A(t)) &= \det(A_{11} - A_{12}(A_{22} + tX)^{-1}A_{21})\det(A_{22} + tX) \\ &= \det(A_{11} - A_{12}(A_{22} + tX)^{-1}A_{21})\det(A_{22}^T + tX^T) \\ &= \det(A_{11}A_{22}^T + tA_{11}X^T - A_{12}(A_{22} + tX)^{-1}A_{21}(A_{22}^T + tX^T)) \end{aligned}$$

如果此时 $A_{21}X^T = XA_{21}^T$，则 $A_{21}(A_{22}^T + tX^T) = (A_{22} + tX)A_{21}^T$，故我们可以按照 A_{22} 可逆时的方法进行消元：

$$\begin{aligned} \det(A(t)) &= \det[(I_n + A_{12}A_{21}^T) + tA_{11}X^T - A_{12}(A_{22} + tX)^{-1}(A_{22} + tX)A_{21}^T] \\ &= \det(I_n + A_{12}A_{21}^T + tA_{11}X^T - A_{12}A_{21}^T) = \det(I_n + tA_{11}X^T) \end{aligned}$$

此时令 $t \to 0$ 即可得证，因此我们只需证明 $\exists X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, s.t. $A_{21}X^T = XA_{21}^T$

设 $\operatorname{rank}(A_{21}) = r$，则 $\exists P, Q$ 可逆，使得 $A_{21} = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$，由 $A_{21}X^T = XA_{21}^T$ 得

$$P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}QX^T = XQ^T\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}P^T$$

这里我们可以直接注意到其中一个 $X = P(Q^T)^{-1}$，但是我们还是演示一下如何求 X，移项可得

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}QX^T(P^{-1})^T = P^{-1}XQ^T\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

我们记 $P^{-1}XQ^T = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11}^T & X_{21}^T \\ X_{21}^T & X_{22}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

展开对比得

$$X_{11}^T = X_{11}, \quad X_{21}^T = X_{21} = O$$

因此

$$X = P\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ O & X_{22} \end{pmatrix}(Q^T)^{-1}, \quad X_{11}^T = X_{11}, \quad X_{12}, X_{22}\text{随意}$$

我们取 $X_{11} = I_r, X_{12} = O, X_{22} = I_n - r$，即 $X = P(Q^T)^{-1}$，则此时 $f(t) = \det(A_{22} + tX)$ 为关于 t 的多项式，且 $f(0) = 0$，由于多项式的零点有限，故 $\exists t_0 > 0, \text{s.t.}\ \forall 0 < t < t_0, \det(A_{22} + tX) \neq 0$，因此我们确实可以在

$$\det(A(t)) = \det(I_n + tA_{11}X^T)$$

的等式两边令 t 同时趋于零，所以此时也有 $\det(A) = 1$ □