第九周作业答案

涂嘉乐

2025 年 11 月 14 日

习题 1 (P239,T2) 设 n 阶可逆方阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，求逆方阵 A^{-1} 的特征值

解 由 A 可逆知特征值非零，存在可逆矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\overset{\text{def}}{=}B$$

所以

$$Q^{-1}A^{-1}Q=B^{-1}=\frac{1}{\det B}B^*$$

而 B^* 也为上三角阵，且 B^* 的第 i 个对角元为 $B_{ii}=\prod\limits_{j\neq i}\lambda_j$，所以

$$Q^{-1}A^{-1}Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det(\lambda I-A^{-1})=\det[Q^{-1}(\lambda I-A^{-1})Q]=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i^{-1})$$

所以 A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_i},1\le i\le n$ $\square$

评价 本题有同学用 $Ax=\lambda_i x\Longrightarrow A^{-1}x=\frac{1}{\lambda_i}x$ 做，这里我们只能推出 λ_i^{-1} 是 A 的特征值，但是重数至多为 λ_i 的几何重数，当几何重数严格小于代数重数时，我认为该做法不太严谨

习题 2 (P239,T5) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 分别是方阵 A 的分别属于特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 的特征向量，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m$ 也是方阵 A 的特征向量，证明 $\lambda_1=\cdots=\lambda_m$

证明 设 λ_0 是 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m$ 对应的特征值，则

$$\lambda_0(\alpha_1+\cdots+\alpha_m)=A(\alpha_1+\cdots+\alpha_m)=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m$$

即

$$(\lambda_0-\lambda_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda_0-\lambda_m)\alpha_m=0$$

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关知 $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_m$ $\square$

习题 3 (P239,T6) 若 $\exists k\in\mathbb{N}^*, \text{s.t. } A^k=0$，则称 A 为幂零方阵，证明：方阵 A 幂零 $\iff$ A 的特征值全为零

证明 $(\Longrightarrow)$: 设 A 有特征值 λ，x 是从属于 λ 的一个特征向量，则 $Ax=\lambda x \Longrightarrow A^m x=\lambda^m x, \forall m\in\mathbb{N}^*$，进而 $A^k x=\lambda^k x=0$，所以 $\lambda^k=0\Longrightarrow \lambda=0$，由 λ 的任意性知 A 的特征值全为零

$(\Longleftarrow)$: 若 A 的特征值全为零，则 A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)=\lambda^n$，由 Cayley-Hamilton 定理知 $A^n=0$，故方阵 A 幂零 □

习题 4 (P239,T7) 设 A,B 为 n 阶复方阵，方阵 A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)$，证明：方阵 $\varphi(B)$ 可逆 $\iff$ A,B 没有公共特征值

证明 $(\Longrightarrow)$: 设 $\varphi(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$，我们证明逆否命题：假设 A,B 有公共的特征值，不妨设为 λ_1，则

$$\det(\varphi(B))=\prod_{i=1}^{n}\det(B-\lambda_i I)=\det(B-\lambda_1 I)\prod_{i=2}^{n}\det(B-\lambda_i I)$$

由 λ_1 为 B 的特征值知 $\det(B-\lambda_1 I)=0$，故 $\det(\varphi(B))=0, \varphi(B)$ 不可逆

$(\Longleftarrow)$: 若 A,B 没有公共特征值，则 $\det(B-\lambda_i I)\neq 0$，从而 $\det(\varphi(B))=\prod\limits_{i=1}^{n}\det(B-\lambda_i I)\neq 0$，故 $\varphi(B)$ 可逆 □

习题 5 (P239,T8) 设 A,B 为 n 阶复方阵，则关于未知方阵 X 的方阵方程 $AX=XB$ 只有零解 $\iff$ 方阵 A,B 没有公共特征值

证明 $(\Longrightarrow)$: 证明逆否命题，假设 A,B 有公共特征值 λ，由于 B,B^T 的特征值相同（它们的特征多项式相同），所以 B^T 也有特征值 λ，则 $\exists u,v\in\mathbb{F}^{n\times 1}\backslash\{0\}, \text{s.t. } Au=\lambda u, B^T v=\lambda v$，考虑 $X=uv^T$，则

$$\begin{cases} Auv^T=\lambda uv^T \\ uv^T B=u(B^T v)^T=u(\lambda v)^T=\lambda uv^T \end{cases}$$

因此 $X=uv^T$ 为 $AX=XB$ 的非零解，与条件矛盾！

$(\Longleftarrow)$: 设 $\varphi(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ 为 A 的特征多项式，若 $AX=XB$，则 $A^kX=A^{k-1}XB=\cdots=XB^k$，故

$$\begin{aligned} \varphi(A)X&=A^nX+a_{n-1}A^{n-1}X+\cdots+a_1AX+a_0X \\ &=XB^n+a_{n-1}XB^{n-1}+\cdots+a_1XB+a_0X=X\varphi(B) \end{aligned}$$

由 Cayley-Hamilton 定理知，$\varphi(A)=0$，则对 $AX=XB$ 的解 X 有 $X\varphi(B)=0$ 所以

$$\begin{aligned} A,B\text{没有公共特征值} &\overset{\text{上一题}}{\iff} \varphi(B)\text{可逆} \\ &\iff X\varphi(B)=0\text{只有零解}\Longrightarrow AX=XB\text{只有零解} \end{aligned}$$

其中第一行到第二行是因为我们将 X 按行分块得

$$X\varphi(B)=\begin{pmatrix} x_1\varphi(B) \\ \vdots \\ x_n\varphi(B) \end{pmatrix}$$

所以 $X\varphi(B)=0$ 只有零解 $\iff x\varphi(B)=0$ 只有零解，其中 x 为 $1\times n$ 阶的行向量，由线性方程组理论这当且仅当 $\varphi(B)$ 可逆 $\square$

习题 6 (P204,T10) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中所有形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 的方阵集合记为 V，其中 $a,b\in\mathbb{R}$，显然 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，视复数域 $\mathbb{C}$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，定义映射 $\mathscr{A}: C\to V$ 如下：设 $\alpha=a+ib\in\mathbb{C},a,b\in\mathbb{R}$，则令 $\mathscr{A}(\alpha)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$，证明：$\mathscr{A}$ 是实线性空间 $\mathbb{C}$ 到 V 上的可逆线性映射，并且对 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$，$\mathscr{A}(\alpha\beta)=\mathscr{A}(\alpha)\mathscr{A}(\beta)$

证明 线性：

$$\mathscr{A}((a+bi)+(c+di))=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\mathscr{A}(a+bi)+\mathscr{A}(c+di)$$

单射：即证明 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})=\{0\}$，若 $0=\mathscr{A}(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$，则 $a=b=0$，故 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})=\{0\}$

满射：对 $\forall\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\in V$，它有原像 $a+bi$

进而 $\mathscr{A}$ 是可逆线性变换，且

$$\begin{aligned}\mathscr{A}((a+bi)(c+di))=\mathscr{A}((ac-bd)+(ad+bc)i)&=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\mathscr{A}(a+bi)\mathscr{A}(c+di)\end{aligned}$$

$\square$

习题 7 (P204,T12) 设 $\mathscr{A}:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$ 是线性映射，而且对任意 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n},\mathscr{A}(AB)=\mathscr{A}(BA)$，证明 $\mathscr{A}=\lambda\mathrm{tr}$，其中 $\lambda\in\mathbb{F}$

证明 思路：我们先分析 $\mathscr{A}$ 在 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的基 $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ 下的像，其中 E_{ij} 表示只有第 ij 元为 1，其余元素均为 0 的矩阵

Lemma：$E_{ij}E_{kl}=E_{il}\delta_{jk}$

Proof of Lemma：因为 $E_{ij}E_{kl}$ 的第 ab 元表示 E_{ij} 的第 a 行和 E_{kl} 的第 b 列的内积，因此只有第 il 元可能非零，且非零时，做内积的行向量和列向量中，1 的位置应该相同，即 $j=k$，所以 $E_{ij}E_{kl}=E_{il}\delta_{jk}$

回到本题，因为

$$\begin{cases}\mathscr{A}(E_{ij}E_{kl})=\mathscr{A}(E_{il}\delta_{jk})=\delta_{jk}\mathscr{A}(E_{il})\\ \mathscr{A}(E_{kl}E_{ij})=\mathscr{A}(E_{kj}\delta_{li})=\delta_{li}\mathscr{A}(E_{kj})\end{cases}\implies\delta_{jk}\mathscr{A}(E_{il})=\delta_{li}\mathscr{A}(E_{kj})$$

令 $k=j$，则 $\mathscr{A}(E_{il})=\delta_{li}\mathscr{A}(E_{kj})$，若 $l\neq i$，则 $\mathscr{A}(E_{li})=0,\forall 1\le i\neq l\le n$

另一方面，取 $i=l=i_1,j=k=i_2$，则

$$\mathscr{A}(E_{i_1i_1})=\mathscr{A}(E_{i_2i_2}),\quad\forall 1\le i_1\neq i_2\le n$$

即 $\exists\lambda\in\mathbb{F},\text{s.t. }\mathscr{A}(E_{ii})=\lambda,\forall 1\le i\le n$，因此对 $\forall A=\left(a_{ij}\right)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$，我们有

$$\mathscr{A}(A)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\mathscr{A}(E_{ij})=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}\mathscr{A}(E_{kk})=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=\lambda\mathrm{tr}(A)$$

所以 $\mathscr{A}=\lambda\mathrm{tr}$ □

习题 8 (P211,T4) 设 U,V 分别是数域 $\mathbb{F}$ 上的 m,n 维线性空间，取定 $\alpha\in U$，所有满足 $\mathscr{A}(\alpha)=0$ 的线性映射 $\mathscr{A}:U\to V$ 的集合记为 K，证明：K 在线性映射的加法、纯量与线性映射的乘法下成为数域 F 上的线性空间，并求 $\dim K$

证明 对 $\forall\mathscr{A},\mathscr{B}\in K\subseteq\mathscr{L}(U,V)$，对 $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{F}$，有

$$(\lambda\mathscr{A}+\mu B)(\alpha)=\lambda\mathscr{A}(\alpha)+\mu\mathscr{B}(\alpha)=0$$

所以 $\lambda\mathscr{A}+\mu\mathscr{B}\in K$，因此 K 是 $\mathscr{L}(U,V)$ 的子空间，故 K 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，下求 $\dim K$

若 $\alpha=0$，则 $\forall\mathscr{A}\in L(U,V),\mathscr{A}(\alpha)=\mathscr{A}(0)=0$，故 $K=L(U,V),\dim K=\dim(L(U,V))=mn$

若 $\alpha\neq 0$，我们可以将 $\alpha\overset{\text{def}}{=}\alpha_1$ 扩充为 U 的一组基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$，再取 V 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$，考虑

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{ij}:U&\longrightarrow V\\ \alpha_k&\longmapsto\delta_{ik}\beta_j=\begin{cases}\beta_j, & k=i\\ 0, & k\neq i\end{cases}\end{aligned}$$

容易验证 $\mathscr{A}_{ij}\in L(U,V)$，下面我们证明 $\{\mathscr{A}_{ij}\}_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ 为 $\mathscr{L}(U,V)$ 的一组基，由于 $\mathscr{L}(U,V)=mn$，因此我们只需证明它们线性无关，假设

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\mathscr{A}_{ij}=0$$

则对 $\forall 1\le k\le m$ 有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\mathscr{A}_{ij}(\alpha_k)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\delta_{ik}\beta_j=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{kj}\beta_j=0$$

由 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 线性无关知，$\lambda_{k1}=\cdots=\lambda_{kn}=0$，遍历 $1\le k\le m$ 知 $\lambda_{ij}=0,\forall i,j$，所以它们线性无关，故为 $\mathscr{L}(U,V)$ 的一组基

注意到 $\mathscr{A}_{ij}(\alpha_1)=0,\forall 2\le i\le m,1\le j\le n$，所以 $\mathrm{Span}\{\mathscr{A}_{ij}\}_{\substack{2\le i\le m\\1\le j\le n}}\subseteq K$，另一方面假设 $\mathscr{A}\in K$，我们设 $\mathscr{A}=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\mathscr{A}_{ij}$，所以

$$0=\mathscr{A}(\alpha_1)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\mathscr{A}_{ij}(\alpha_1)=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\beta_j$$

由 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 线性无关知，$a_{1j}=0,\forall 1\le j\le n$，因此 $\mathscr{A}=\sum\limits_{i=2}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\mathscr{A}_{ij}\in\mathrm{Span}\{\mathscr{A}_{ij}\}_{\substack{2\le i\le m\\1\le j\le n}}$，即 $K\subseteq\mathrm{Span}\{\mathscr{A}_{ij}\}_{\substack{2\le i\le m\\1\le j\le n}}$，故

$$K=\mathrm{Span}\{\mathscr{A}_{ij}\}_{\substack{2\le i\le m\\1\le j\le n}}\Longrightarrow\dim K=(m-1)n$$

□

习题 9 (P219,T2) 取 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -4 & 4\end{pmatrix}$，线性映射 $\mathscr{A}:\mathbb{C}^{2\times 2}\to\mathbb{C}^{2\times 2}, X\mapsto AX$，求 $\rho(\mathscr{A})$

证明 这里给出一般解法：取 $\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ 为 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的一组基，设 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 Y，即

$$\mathscr{A}(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})Y$$

因为

$$AE_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 0\end{pmatrix}=E_{11}-4E_{21},\quad AE_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}=E_{12}-4E_{22}$$
$$AE_{21}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}=-E_{11}+4E_{21},\quad AE_{22}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=-E_{12}+4E_{22}$$

所以

$$Y=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -4 & 0 & 4 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

因此

$$\rho(\mathscr{A})=\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{A}))=\mathrm{rank}(Y)=2$$

□

习题 10 (P219,T3) 设 $\mathscr{A}:V\to V$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 到自身的线性映射，且 $\rho(\mathscr{A}^2)=\rho(\mathscr{A})$，证明 $\mathrm{Im}(\mathscr{A})\cap\mathrm{Ker}(\mathscr{A})=\{0\}$

证明 依题意有 $\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{A}))=\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{A}^2))$，由

$$\dim(V)=\dim(\mathrm{Ker}(\mathscr{A}))+\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{A}))$$

知 $\dim(\mathrm{Ker}(\mathscr{A}))=\dim(\mathrm{Ker}(\mathscr{A}^2))$，因为若 $\mathscr{A}x=0$，则 $\mathscr{A}^2x=0$，故 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})\subseteq\mathrm{Ker}(\mathscr{A}^2)$，再由它们维数相等知 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})=\mathrm{Ker}(\mathscr{A}^2)$，假设 $x\in\mathrm{Im}(\mathscr{A})\cap\mathrm{Ker}(\mathscr{A})$，则 $\mathscr{A}x=0$，且 $\exists y,\mathrm{s.t.}\ x=\mathscr{A}y$，所以 $\mathscr{A}^2y=\mathscr{A}x=0\Longrightarrow y\in\mathrm{Ker}(\mathscr{A}^2)=\mathrm{Ker}(\mathscr{A})\Longrightarrow x=\mathscr{A}y=0$，故 $\mathrm{Im}(\mathscr{A})\cap\mathrm{Ker}(\mathscr{A})=\{0\}$ □

评价 大家感兴趣可以证明：以下等价

(1) $V=\mathrm{Ker}(\mathscr{A})\oplus\mathrm{Im}(\mathscr{A})$

(2) $V=\mathrm{Ker}(\mathscr{A})+\mathrm{Im}(\mathscr{A})$

(3) $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}(\mathscr{A})=\{0\}$

(4) $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})=\mathrm{Ker}(\mathscr{A}^2)$

(5) $\mathrm{Im}(\mathscr{A})=\mathrm{Im}(\mathscr{A}^2)$