第八周作业答案

涂嘉乐

2025 年 11 月 8 日

习题 1 (P26,T1(2)(5)) 利用 Eisenstein 判别准则判断下列整系数多项式的不可约性

(2) $f(x) = x^4 - x^3 + 2x + 1$

(5) $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{p-1}(x+1)^i$，其中 p 是素数（原题有错，这里 i 从零开始求和）

解 首先我们有：$f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中不可约 $\iff$ $f(x+a)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中不可约，$a \in \mathbb{Z}$，这是因为若 $f(x)$ 有分解 $f(x) = g(x)h(x)$，则 $f(x+a)$ 有分解 $g(x+a)h(x+a)$，反之同理（本质上是因为 $\phi_a : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x], f(x) \mapsto f(x+a)$ 是环同构，不改变多项式的可约性！）

(2). 因为 $f(x+1) = (x+1)^4 - (x+1)^3 + 2(x+1) + 1 = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 3$，取素数 $p = 3$，由 Eisenstein 判别法知 $f(x+1)$ 不可约，进而 $f(x)$ 不可约

(5). 因为

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{0=1}^{p-1}(x+1)^i = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1)-1} \\ &= x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-2}x + \binom{p}{p-1} \end{aligned}$$

取素数 p，由于 $p^2 \nmid p = \binom{p}{p-1}$，$p \,\Big|\, \binom{p}{k}, 1 \le k \le p-2$，由 Eisenstein 判别法知 $f(x)$ 不可约 $\square$

习题 2 (P26,T4) 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是 n 个不同整数，证明：多项式 $f(x) = (x-a_1)^2 \cdots (x-a_n)^2 + 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约

证明 我们证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约，进而它在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约，假设 $f(x) = g(x)h(x), \deg g \ge 1, \deg h \ge 1$，因为 $\deg g + \deg h = \deg f = 2n$，我们可以不妨设 $\deg g \le n$

若 $\deg g < n$，注意到 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$，故 f 无实根，所以 g, h 也无实根，因此 g, h 不变号，即恒正或恒负；由于 $\forall i, f(a_i) = 1$，则 $g(a_i)h(a_i) = 1$，且 $g(a_i), h(a_i) \in \mathbb{Z}$，故它们都为 1 或都为 -1；若 $\exists a_i, \text{s.t. } g(a_i) = 1$，则由 g 不变号知 $g(a_1) = \cdots = g(a_n) = 1$，即次数小于 n 的多项式 $g(x) - 1$ 有 n 个根，它只能恒为零，故 $g(x) \equiv 1$，同理此时 $h(x) \equiv 1$，则 $f = gh = 1$，矛盾！若 $\exists a_i, \text{s.t. } g(a_i) = -1$，同理可论述 $g(x) = h(x) \equiv -1$，则 $f = gh = 1$，矛盾！

由上论述我们知只能是 $\deg g = \deg h = n$，由 $f(x) = g(x)h(x)$ 我们可以设 $g(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0, h(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$，同上论述我们知，对 $\forall i$，有 $g(a_i) = h(a_i) = 1$ 或 -1，因此 $(g-h)(a_i) = 0, \forall 1 \le i \le n$，但是由假设 $\deg(g-h) < n$，所以只能是 $g - h \equiv 0$，故 $f = g^2$，记 $m(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)$，则

$$m^2(x) + 1 = g^2(x) \Longrightarrow (g(x) - m(x))(g(x) + m(x)) = 1$$

由于 $g,m\in\mathbb{Z}[x]$，所以对 $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} g(x)-m(x)=1 \\ g(x)+m(x)=1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} g(x)-m(x)=-1 \\ g(x)+m(x)=-1 \end{cases}$$

两式相加即 $g(x)\equiv 2$ 或 -2，矛盾！

综上 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约，进而在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约 $\square$

习题 3 (P26,T6) 设整系数多项式 $f(x)$ 在 x 的 4 个不同整数值上取值为 1，证明 $f(x)$ 在 x 的其它整数值上的值不能是 -1

证明 若 $f\equiv 1$，则命题成立，下面假设 f 不是常值多项式，设 $f(a_1)=\cdots=f(a_4)=1, a_i\in\mathbb{Z}, 1\le i\le 4$，则 $(x-a_i)\mid f(x)-1$，进而可设

$$f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_4)g(x)+1$$

若 $\exists y\in\mathbb{Z},\text{s.t. } f(y)=-1$，则 $(y-a_1)\cdots(y-a_4)g(y)=-2$，所以 $\forall i, y-a_i\in\{1,-1,2,-2\}$，且至多有一个为 2 或 -2，即 $a_i, 1\le i\le 4$ 中，有至少 3 个到 y 距离为 1，这与 a_i 两两不同矛盾！ $\square$

习题 4 (P26,T7) 证明：设正整数 $n\ge 12$，并且 n 次整系数多项式 $f(x)$ 在 x 的 $[n/2]+1$ 个及以上的整数上取值为 ± 1，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，问 n 的下界 12 是否还可以缩小

解 我们需要一个引理：设 $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 不恒为常数，且 f 在三个不同整数上取值为 1，则 f 至多在一个整数上取值为 -1

Proof of Lemma : 由条件可设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)g(x)+1$, 反证, 假设 $f(y_1)=f(y_2)=-1$，则

$$\begin{cases} (y_1-a_1)(y_1-a_2)(y_1-a_3)g(y_1)=-2 \\ (y_2-a_1)(y_2-a_2)(y_2-a_3)g(y_2)=-2 \end{cases}$$

所以

$$|y_i-a_j|\in\{1,-1,2,-2\}, \forall i=1,2, j=1,2,3$$

但是这是不可能的！先考虑 y_1，则 a_1,a_2,a_3 与 y_1 之间的距离为 1 或 2 且两两不同，即 $a_1,a_2,a_3\in\{y_1-2,y_1-1,y_1+1,y_1+2\}$，无论它们怎么取，都找不到 y_2 使得 $|y_2-a_j|\in\{1,-1,2,-2\}$

回到本题，若 $n\ge 8$，则 $[n/2]+1\ge 5$，则 f 必在 3 个不同整数上取值全为 1 或全为 -1，不妨设全为 1，否则考虑 $-f$，则由引理知，$f(x)$ 至多在 1 个整数上取值为 -1，进而 f 至少在 4 个整数上取值为 1，再由第六题知，$f(x)$ 取值不能为 -1，所以 $f(x)$ 在 $[n/2]+1$ 个整数上的取值均为 1

接下来证明此时 f 不可约，假设 $f(x)=m(x)n(x), m,n\in\mathbb{Z}[x]$，且 m,n 非常值多项式，记 $[n/2]+1=k, f(a_1)=\cdots=f(a_k)=1$，则我们可设

$$f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_k)g(x)+1$$

所以 $\forall i, m(a_i)n(a_i)=1$，因此 m,n 都在 k 个数上取值为 ± 1，对 m,n 同上做与 f 相同的论述（至少在 3 个不同整数上取值为 $1\implies$ 在 4 个整数上取值为 $1\implies$ 在这 $[n/2]+1$ 个整数上取值全为 1）知，

$m(a_i)=n(a_i)=1,\forall i$，由 m,n 非常值多项式可设

$$\begin{cases} m(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_k)m_1(x)+1 \\ n(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_k)n_1(x)+1 \end{cases}$$

进而 $n=\deg f=\deg m+\deg n\geq [n/2]+1+[n/2]+1>n$，矛盾！故 f 不可约，因此 $n\geq 8$

最后我们说明 n 不能比 8 小，若 $n=7$，回忆上面引理的证明过程是如何导出矛盾的，我们可以如下构造 f：

$$f(x)=[(x-a)(x-(a+1))(x-(a+3))+1][(x-a)(x-(a+1))(x-(a+2))(x-(a+3))+1],\quad a\in\mathbb{Z}$$

则 $f(a)=f(a+1)=f(a+3)=1,f(a+2)=-1$，但是 f 是可约的！

综上 n 的下界可缩小至 8 □

习题 5 (P35,T1(2)(4)) 把下列对称多项式表为关于基本对称多项式的多项式

(2) $(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$

(4) $\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2$

解 我们给出此类问题的一般解法（有些题目可能用瞪眼法更快，但是使用待定系数法一定能保证做出来）

Step1. 将 f 写为齐次多项式（即 f_j 的每一项 $a_ix_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ 满足 $k_1+\cdots+k_n$ 为定值）f_j 的和：$f=\sum\limits_j f_j$

Step2. 求每个 f_j: 找出 f_j 的首项 $ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$, 并列出所有 $k_1+\cdots+k_n$ 次单项式 $x_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}$ 满足 $l_1\geq\cdots\geq l_n$，且 $(k_1,\cdots,k_n)>(l_1,\cdots,l_n)$ ，因此 f_j 必有形式

$$f_j=a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\cdots\sigma_{n-1}^{k_n-k_{n-1}}\sigma_n^{k_n}+\sum_{l=(l_1,\cdots,l_n)<(k_1,\cdots,k_n)}c_l\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_{n-1}^{l_{n-1}-l_n}\sigma_n^{l_n}$$

其中 a,c_l 均待定

Step3. 取具体的 $x_1,\cdots,x_n$ 的值来待定出 f_j 中 a,c_l 的值

(2). 首先 f 本来就是齐次多项式，因此直接进入 Step2，我们找到 f 的最高项为 $2x_1^3$，并列出符合降序条件的项为 $x_1^2x_2,x_1x_2x_3$，因此我们可设

$$f(x_1,x_2,x_3)=a\sigma_1^3+c_1\sigma_1\sigma_2+c_2\sigma_3$$

取 $x_1=x_2=1,x_3=0$，则 $\sigma_1=2,\sigma_2=1,\sigma_3=0,f(x_1,x_2,x_3)=-2$，故

$$-2=8a+2c_1 \tag{1}$$

取 $x_1=x_2=x_3=1$，则 $\sigma_1=3,\sigma_2=3,\sigma_3=1,f(x_1,x_2,x_3)=0$，故

$$0=27a+9c_1+c_2 \tag{2}$$

取 $x_1=x_2=1,x_3=-2$，则 $\sigma_1=0,\sigma_2=-3,\sigma_3=-2,f(x_1,x_2,x_3)=-54$，故

$$-54=-2c_2 \tag{3}$$

联立 (1)(2)(3)，解得 $a=2, c_1=-9, c_2=27$，故

$$f(x_1,x_2,x_3)=2\sigma_1^3-9\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3$$

(5). 由于 f 本来就是齐次多项式，我们找到 f 的最高项为 x_1^2，并列出符合降序条件的项为 x_1x_2，因此我们可设

$$f(x_1,\cdots,x_n)=a\sigma_1^2+c\sigma_2$$

取 $x_1=\cdots=x_n=1$，则 $\sigma_1=n, \sigma_2=\frac{n(n-1)}{2}, f(x_1,\cdots,x_n)=0$，故

$$0=an^2+c\frac{n(n-1)}{2} \tag{4}$$

取 $x_1=1, x_2=\cdots=x_n=0$，则 $\sigma_1=1, \sigma_2=0, f(x_1,\cdots,x_n)=n-1$，故

$$n-1=a \tag{5}$$

联立 (4)(5)，解得 $a=n-1, c=-2n$，故

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(n-1)\sigma_1^2-2n\sigma_2$$

习题 6 (P35,T2) 证明：三次实系数方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的每个根的实部都是负数的充分必要条件为

$$a>0, \quad ab-c>0, \quad c>0$$

证明 记 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，由介值定理知 f 必有一实根，所以 f 的根有两种情况：三个实根、一个实根和两个共轭复根

$(\Longrightarrow)$: 若 f 有三个负实根 r_1,r_2,r_3，则 $\sigma_1<0,\sigma_2<0,\sigma_3<0$，由韦达定理知 $a=-\sigma_1, b=\sigma_2, c=-\sigma_3$，故

$$\begin{cases} a=-\sigma_1>0 \\ ab-c=-\sigma_1\sigma_2+\sigma_3=-(r_1^2r_2+r_1^2r_3+r_2^2r_3+r_1r_2^2+r_3^2r_1+r_2r_3^2+2r_1r_2r_3)>0 \\ c=-\sigma_3>0 \end{cases}$$

若 f 有一个实根 r，两个共轭复根 $x\pm iy$，由条件知 $r,x<0$，则 $\sigma_1=2r+x<0, \sigma_2=2rx+(x^2+y^2), \sigma_3=r(x^2+y^2)<0$，故

$$\begin{cases} a=-\sigma_1>0 \\ ab-c=-\sigma_1\sigma_2+\sigma_3=-2x[(x+r)^2+y^2]>0 \\ c=-\sigma_3>0 \end{cases}$$

$(\Longleftarrow)$: 若 f 有三个实根 r_1,r_2,r_3，由 $c=-r_1r_2r_3>0$ 知，至少有一个根为负数，不妨设 $r_1<0$，则 $r_2r_3>0$，即它们同号，若 $r_2,r_3>0$，注意到 $f(-a)=c-ab<0, f(0)=c>0$，进而 $\exists x\in(-a,0)$, s.t. $f(x)=0$，但是 $r_1=\sigma_1-r_2-r_3=-a-(r_2+r_3)<-a$，所以 f 有两个负根 r_1,x，这说明 f 有至少 4 个根，矛盾！进而 $r_2,r_3<0$

若 f 有一个实根 r，两个共轭复根 $x\pm iy$，因为

$$\begin{cases} ab-c=-2x[(x+r)^2+y^2]>0 \Longrightarrow x<0 \\ c=r(x^2+y^2)<0 \Longrightarrow r<0 \end{cases}$$

所以 f 的每个根的实部均为负数 □

习题 7 (P35,T4) 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$ 的 n 个根，证明：关于 $x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式可以表示为关于 x_1 的多项式

证明 我们记 $s_k=\sigma_k(x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{2\le i_1<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}\cdots x_{i_k}$，则

$$\begin{aligned}
\sigma_k(x_1,\cdots,x_n)&=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}\cdots x_{i_k}\\
&=\sum_{2\le i_2<\cdots<i_k\le n}x_1x_{i_2}\cdots x_{i_k}+\sum_{2\le i_1<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}\cdots x_{i_k}\\
&=x_1\sum_{2\le j_1<\cdots<j_{k-1}\le n}x_{j_1}\cdots x_{j_{k-1}}+s_k\\
&=x_1s_{k-1}+s_k
\end{aligned}$$

由韦达定理，$a_{n-k}=(-1)^k\sigma_k$，即

$$s_k=(-1)^ka_{n-k}-x_1s_{k-1}$$

当 $k=1$ 时，$s_1=x_2+\cdots+x_n=\sigma_1-x_1=-a_{n-1}-x_1$，即 s_1 为 x_1 的多项式，使用数学归纳法，设 $k<m$ 时 s_k 是 x_1 的多项式，即存在多项式 f, s.t. $s_{m-1}=f(x_1)$，进而

$$s_m=(-1)^ka_{n-k}-x_1f(x_1)$$

也为 x_1 的多项式，由数学归纳法，故关于 $x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式可以表示为关于 x_1 的多项式 □

习题 8 (P35,T10) 求多项式

$$f(x)=x^n+(a+b)x^{n-1}+(a^2+b^2)x^{n-2}+\cdots+(a^{n-1}+b^{n-1})x+(a^n+b^n)$$

的根的等幂和 $s_1,s_2,\cdots,s_n$

证明 由韦达定理知，$a^{n-k}+b^{n-k}=(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}$，由 Newton 恒等式 $s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0,\forall k\le n$，

$$s_k+(a+b)s_{k-1}+(a^2+b^2)s_{k-2}+\cdots+(a^{k-1}+b^{k-1})s_1+k(a^k+b^k)=0,\quad 1\le k\le n$$

我们可以先计算几项观察一下规律

$s_1=-a-b$

$s_2=x_1^2+\cdots+x_n^2=\sigma_1^2-2\sigma_2=-a^2+2ab-b^2=-(a-b)^2$

$s_3=-(a+b)s_2-(a^2+b^2)s_1-3(a^3+b^3)=(a+b)(a-b)^2+(a+b)(a^2+b^2)=-a^3-b^3$

$s_4=-(a+b)s_3-(a^2+b^2)s_2-(a^3+b^3)s_1-4(a^4+b^4)=-a^4+2a^2b^2-b^4=-(a^2-b^2)^2$

因此我们猜测

$$\begin{cases}s_{2k-1}=-a^{2k-1}-b^{2k-1}\\ s_{2k}=-(a^k-b^k)^2\end{cases}$$

由数学归纳法，假设命题对 $k=1,2,\cdots,2m-1,2m$ 成立，接下来证明 $2m+1,2m+2$ 的情形

$$\begin{aligned}
s_{2m+1} &= -(a+b)s_{2m} - (a^2+b^2)s_{2m-1} - \cdots - (a^{2m}+b^{2m})s_1 - (2m+1)(a^{2m+1}+b^{2m+1}) \\
&= (a+b)(a^m-b^m)^2 + (a^2+b^2)(a^{2m-1}+b^{2m-1}) + \cdots + (a^{2m-1}+b^{2m-1})(a-b)^2 + (a^{2m}+b^{2m})(a+b) \\
&\quad - (2m+1)(a^{2m+1}+b^{2m+1}) \\
&= -a^{2m-1} - b^{2m-1}
\end{aligned}$$

（具体计算时，我们可以对第二行成对求和：第一项和最后一项配对，第二项和倒数第二项配对，依此类推）同理可以计算 $s_{2m+2} = -(a^{m+1}-b^{m+1})^2$，由数学归纳法即证 $\square$