第七周作业答案

P76.3:

3. 证明：当 $n=6m+5$ 时，多项式 x^2+xy+y^2 整除多项式 $(x+y)^n-x^n-y^n$；当 $n=6m+1$ 时，多项式 $(x^2+xy+y^2)^2$ 整除多项式 $(x+y)^n-x^n-y^n$. 这里 m 是使 $n>0$ 的整数，而 x，y 是实数.

法一：(比较技巧) 需看出 (x^2+xy+y^2) 乘 $h(x)$ 如何组合 $h(x)$ 的各项系数.

证明：用数学归纳法：

① 当 $n=0$ 时 $(x+y)^5-x^5-y^5=5(x^2y+xy^2)(x^2+xy+y^2)$

② 当 $n=k$ 时成立

③ 当 $n=k+1$ 时

$$(x+y)^6-x^6=6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$
$$=(6x^3y+9x^2y^2+5xy^3+y^4)(x^2+xy+y^2)$$
$$(x+y)^6-y^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5$$
$$=(x^4+5x^3y+9x^2y^2+6xy^3)(x^2+xy+y^2)$$
$$\Rightarrow (x^2+xy+y^2)\mid (x+y)^6-x^6,\quad (x^2+xy+y^2)\mid (x+y)^6-y^6$$

$$(x^2+xy+y^2)\mid (x+y)^6\left((x+y)^{6k+5}-x^{6k+5}-y^{6k+5}\right)+\left((x+y)^6-x^6\right)x^{6k+5}+\left((x+y)^6-y^6\right)y^{6k+5}$$
$$=(x+y)^{6(k+1)+5}-x^{6(k+1)+5}-y^{6(k+1)+5}$$

对 $n=6k+1$ 同样用数学归纳法:

① 当 $n=0$ 时，即 $n=1$ 时 $(x+y)-x-y=0$

② 设 $n=k$ 成立

③ 当 $n=k+1$ 时

令 $T=\left((x+y)^6-x^6\right)x^{6k+1}+\left((x+y)^6-y^6\right)\left(y^{6k+1}\right)$

由 $6k+1$ 时情形 可知

$$\frac{T}{x^2+xy+y^2}=\left(6x^3y+9x^2y^2+5xy^3+y^4\right)x^{6k+1}+\left(x^4+5x^3y+9x^2y^2+6xy^3\right)y^{6k+1}$$

$$=\Big(6x^{6k+2}y+3x^{6k+1}y^2+(-4)x^{6k}y^3+2x^{6k-1}y^4+2x^{6k-2}y^5$$
$$+(-4)x^{6k-3}y^6+2x^{6k-4}y^7+2x^{6k-5}y^8+(-4)x^{6k-6}y^9+\cdots+2x^4y^{6k-1}$$
$$+(-4)x^3y^{6k}+3x^2y^{6k+1}+6xy^{6k+2}\Big)\left(x^2+xy+y^2\right)$$

$\Rightarrow \left(x^2+xy+y^2\right)^2 \mid T$

$\Rightarrow \left(x^2+xy+y^2\right) \mid (x+y)^6\left((x+y)^{6k+1}-x^{6k+1}-y^{6k+1}\right)+T$

$$=(x+y)^{6(k+1)+1}-x^{6(k+1)+1}-y^{6(k+1)+1} \quad \#$$

法二: $\left(x^2+xy+y^2\right)=(x-wy)(x-w^2y)$ 其中 w 为本原3次单位根

令 $g(t)=(t+1)^7-t^7-1$

(也) $7=6\times1+1$ 用 $w^3=1$

$g(w)=(w+1)^7-w^7-1=(-w^2)^7-w^7-1=-(w^2+w+1)=0$

$g(w^2)=(w^2+1)^7-w^{2\cdot7}-1=-w^7-w^{2\cdot7}-1=0$

$\Rightarrow (t-w)(t-w^2) \mid g(t)$

$\Rightarrow \exists\, h(t) \in \mathbb{R}[t]$, s.t. $(t-\omega)(t-\omega^2)h(t) = g(t)$

两边代入 $t=\frac{x}{y}$, $\Rightarrow$ $\left(\frac{x}{y}-\omega\right)\left(\frac{x}{y}-\omega^2\right)h\left(\frac{x}{y}\right) = g\left(\frac{x}{y}\right)$

两边乘以 y^n

得到 $\underbrace{(x-\omega y)(x-\omega^2 y)}_{= x^2+xy+y^2}\underbrace{\left(h\left(\frac{x}{y}\right)\cdot y^{n-2}\right)}_{\text{为 } x,y \text{ 的二元多项式}} = (x+y)^n - x^n - y^n$

$\Rightarrow (x^2+xy+y^2) \mid (x+y)^n - y^n - x^n$

当 $n=6m+1$ 时

由于 $g(\omega) = -(\omega+\omega^2+1) = 0$

$g(\omega^2) = -(\omega^2+\omega+1) = 0$

(g 为上面的 g

即 $g(t) = (t+1)^n - t^n - 1$

由刚才做法知 $(x^2+xy+y^2) \mid (x+y)^n - x^n - y^n$

下证 ω 与 ω^2 为 $g(t)$ 的根:

$g(t) = n\left((t+1)^{n-1} - t^{n-1}\right) = n\left((t+1)^{6m} - t^{6m}\right)$

$g'(\omega) = n\left((-\omega^2)^{6m} - \omega^{6m}\right) = 0$

$g'(\omega^2) = n\left(-\omega^{6m} - (\omega^2)^{6m}\right) = 0$

$\Rightarrow (t-\omega)(t-\omega^2) \mid g'(t)$

$\Rightarrow \exists\, h(t) \in \mathbb{R}[t]$, s.t. $(t-\omega)(t-\omega^2)h(t) = g(t)$

$\Rightarrow (t-w)(t-w^2) \mid g'(t)$

而 $(t-w)(t-w^2) \mid g(t)$

$\Rightarrow (t-w) \mid g(t) \quad (t-w) \mid g'(t)$

$\Rightarrow (t-w)^2 \mid g(t)$

同理 $(t-w^2)^2 \mid g(t)$

由于 $(t-w)$ 与 $(t-w^2)$ 互素

$\Rightarrow (t-w)^2(t-w^2)^2 = ((t-w)(t-w^2))^2 \mid g(t)$

两边乘以 y^7

$\Rightarrow (x^2+xy+y^2)^2 \mid (x+y)^7-x^7-y^7$ #

2\. (2) $f(x)=x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5, g(x)=x^5+x^2-x+1$;

用辗转相除法得到如下:

$r_1(x)=2x^4-5x^3-2x^2+7x-5$

$r_2(x)=\frac{29}{4}(x^2-x+1)$

$r_3(x)=0$

$\Rightarrow \gcd(f,g)=x^2-x+1$

3\. (2) $f(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6, g(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$; (4) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1, g(x)=x^2-x-1$.

(2) $f(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$

$g(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$

$$f(x) = (x+3)\,g(x) - (3x^3+2x^2)$$

$$g(x) = (x-2)(3x^3+2x^2) + (3x^2-x-2)$$

$$3x^3+2x^2 = (x+1)(3x^2-x-2) + (3x-2)$$

$$3x^2-x-2 = (x-1)(3x+2)$$

将 $3x-2$ 用 $3x^3+2x^2$, $3x^2-x-2$ 表出,

再将 $3x^2-x-2$ 用 表出

再用 $3x^3+2x^2$ 用 $f(x)\,g(x)$ 表出

得 $f(x)\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)+g(x)\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}\right)=x+\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x) = -\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \\ v(x) = \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x-\frac{4}{3} \\ d(x) = x+\frac{2}{3} \end{cases}$$

(4) $f(x) = x^4-x^3-4x^2+4x+1$

$g(x) = x^2-x-1$

$f(x) = (x^2-3)\,g(x) + x-2$

$g(x) = (x+1)(x-2) \underline{+1}$

$\Rightarrow f(x)(-x-1)+g(x)(x^3+x^2-3x-2)=1$

$\Rightarrow u(x) = -(x+1)$ $v(x) = x^3+x^2-3x-2$, $d(x)=1$

4.

(2) $f(x)=x^4, g(x)=(1-x)^4$;

我们可取 $\deg u < \deg g$, $\deg v < \deg f$

设 $u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$v(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$

$x^2 u(x) + (1-x)^4 u(x) = 1$

有 $b_0 + (-4b_0 + b_1)x + (6b_0 - 4b_1 + b_2)x^2 + (-4b_0 + 6b_1 - 4b_2 + b_3)x^3$

$+ (a_0 + b_0 - 4b_1 + 6b_2 - 4b_3)x^4 + (a_1 + b_1 - 4b_2 + 6b_3)x^5$

$+ (a_2 + b_2 - 4b_3)x^6 + (a_3 + b_3)x^7 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_0 = 1 \\ -4b_0 + b_1 = 0 \\ 6b_0 - 4b_1 + b_2 = 0 \\ -4b_0 + 6b_1 - 4b_2 + b_3 = 0 \\ a_0 + b_0 - 4b_1 + 6b_2 - 4b_3 = 0 \\ a_1 + b_1 - 4b_2 + 6b_3 = 0 \\ a_2 + b_2 - 4b_3 = 0 \\ a_3 + b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 35 \\ a_1 = -84 \\ a_2 = 70 \\ a_3 = -20 \\ b_0 = 1 \\ b_1 = 4 \\ b_2 = 10 \\ b_3 = 20 \end{cases}$$

$\Rightarrow u(x) = -20x^3 + 70x^2 - 84x + 35$

$v(x) = 20x^3 + 10x^2 + 4x + 1$

5

(x − 2) 除时余式为 3x.

9. 求次数最低的多项式 $f(x)$，使得 $f(x)$ 被多项式 $x^4-2x^3-2x^2+10x-7$ 除时余式为 x^2+x+1，被多项式 $x^4-2x^3-3x^2+13x-10$ 除时余式为 $2x^2-3$.

10. 设 $f(x)$ 是 $2n+1$ 次多项式，n 为正整数，$f(x)+1$ 被 $(x-1)^n$ 整除，而 $f(x)-1$ 被

问题转化为同余方程组

$$\begin{cases} f(x) \equiv x^2+x+1 \pmod{f_1(x)} \\ f(x) \equiv 2x^2-3 \pmod{f_2(x)} \end{cases}$$

（其中 $f_1(x) = x^4-2x^3-2x^2+10x-7$
$f_2(x) = x^4-2x^3-3x^2+13x-10$

由于 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$ （去算一下）

设 $h(x)$ 为一特解

则 通解 $f(x) = h(x) + q(x) f_1(x) f_2(x)$

我们去算一特解 $h(x)$

由辗转相除法计算

$$\underbrace{(x^3-x^2-5x+7)}_{\text{记为 } u(x)} f_1(x) + \underbrace{(-(x^3-x^2-4x+5))}_{\text{记为 } v(x)} f_2(x) = 1$$

由中国剩余定理的证明知：

$$h(x) := u(x)\, a_1(x) f_2(x) + v(x)\, a_2(x) f_1(x)$$
$$= (-x^3+x^2+4x-5)(x^2+x+1)(x^4-2x^3-3x^2+13x-10)$$
$$+ (x^3-x^2-5x+7)(2x^2-3)(x^4-2x^3-2x^2+10x-7)$$

为一特解，且 $\deg h(x) = 9 > 8$

用带余除法 得 $h(x)$ 除以 $f_1(x) f_2(x)$ 的余项为

$$r(x) = -5x^7+13x^6+27x^5-130x^4+75x^3+266x^2-440x+197$$

为特解

故次数最低的为 $2(x)$ #

6

1. 把下列复系数多项式分解为一次因式的乘积：

(1) $(x+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(x+\cos\theta-i\sin\theta)^n$；

(2) $(x+1)^n+(x-1)^n$；

(3) $x^n-C_{2n}^2x^{n-1}+C_{2n}^4x^{n-2}+\cdots+(-1)^nC_{2n}^{2n}$；

(4) $x^{2n}+C_{2n}^2x^{2n-2}(x^2-1)+C_{2n}^4x^{2n-4}(x^2-1)^2+\cdots+(x^2-1)^n$；

(5) $x^{2n+1}+C_{2n+1}^2x^{2n-1}(x^2-1)+C_{2n+1}^4x^{2n-3}(x^2-1)^2+\cdots+x(x^2-1)^n$.

(2) $(x-u)$ 为 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow$ u 为 $f(x)$ 的根

令 $(t+1)^n+(t-1)^n=0$

$\Rightarrow \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^n=-1 \Rightarrow \frac{t+1}{t-1}=e^{\frac{i(2k-1)\pi}{n}} \quad 1\le k\le n$

$$\Rightarrow t=-\frac{\left(1+\cos\frac{2k-1}{n}\pi+i\sin\frac{2k-1}{n}\pi\right)}{1-\cos\frac{2k-1}{n}\pi-i\sin\frac{2k-1}{n}\pi}=-i\cot\frac{2k-1}{2n}\pi$$

故 $f(x)=2\prod_{i=1}^{n}\left(x+i\cot\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)$

(4) 令 $f(x)=x^{2n}+C_{2n}^2x^{2n-2}(x^2-1)+C_{2n}^4x^{2n-4}(x^2-1)^2+\cdots+(x^2-1)^n$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}+\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}=0$$

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)^{2n}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\sqrt[2n]{-1}$$

解得 $x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4n]{-1}}+\sqrt[4n]{-1}\right)=\cos\frac{(2k+1)}{4n}\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow f(x)=\prod_{k=0}^{2n-1}\left(x-\cos\frac{(2k+1)}{4n}\pi\right)$

7.

2. 把下列实系数多项式分解为实的不可约因式的乘积：

(1) x^4+1；

$\boxed{(2)}$ x^6+27；

(3) $x^4+4x^3+4x^2+1$；

(4) $x^{2n}-2x^n+2$；

(5) $x^4-ax^2+1, -2<a<2$；

$\boxed{(6)}$ $x^{2n}+x^n+1$.

(2) 在 $\mathbb{C}$ 中 $x^6+27=\prod_{k=0}^{5}\left(x-\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{6}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2k+1}{6}\pi\right)\right)\right)$

$\underset{\text{共轭配对}}{=}(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$

(3) $(x^{2n}+x^n+1)(x^n-1)=x^{3n}-1=\prod_{k=0}^{3n-1}\left(x-e^{\frac{2k\pi}{3n}i}\right)$

而 $x^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)$

$$\Rightarrow (x^{2n}+x^n+1)=\frac{\prod_{k=0}^{3n-1}\left(x-e^{\frac{2k\pi}{3n}i}\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)}$$

$$=\underline{\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{\frac{i2(3k+1)\pi}{3n}}\right)\left(x-e^{\frac{2(3k+2)}{3n}\pi i}\right)}$$

可以计算每一项 $e^{\frac{i2(3k+1)\pi}{3n}}$ 与 $e^{\frac{2(3k+2)}{3n}\pi i}$ $\neq 1$ 与 -1

故 $f(x)$ 一定分解为二次不可约的多项式乘积

看哪两项是共轭的

$$f(x)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2\cos\left(\frac{2(3k+1)\pi}{3n}\right)+1\right) \quad \#$$

8

3. 证明:复系数多项式 $f(x)$ 对所有实数 x 恒取正值的充分必要条件是,存在复系数多项式 $\varphi(x)$,$\varphi(x)$ 没有实数根,使得 $f(x)=|\varphi(x)|^2$.

证明 "$\Leftarrow$" 显然.

"$\Rightarrow$" $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)>0$, 故 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$

对 $f(x)$ 进行唯一分解

$f(x)=(x^2+p_1x+q_1)^{e_1}\cdots(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{e_\ell}$ 在 $\mathbb{R}$ 上分解

(注意,分解中不会有一次因式 $(x-c)$,否则 $x=c$ 时 $f(c)=0$)

$x^2+p_ix+q_i$ 在 $\mathbb{C}$ 上有两个共轭根,记作 z_i $\bar{z}_i$

$(x^2+p_ix+q_i)=(x-z_i)(x-\bar{z}_i)=|x-z_i|^2$

令 $\varphi(x)=(x-z_1)^{e_1}\cdots(x-z_\ell)^{e_\ell}$

$f(x)=\varphi(x)\cdot\overline{\varphi(x)}=|\varphi(x)|^2$ #

9.

4. 证明:实系数多项式 $f(x)$ 对所有实数 x 恒取非负实数值的充分必要条件是,存在实系数多项式 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$,使得 $f(x)=[\varphi(x)]^2+[\psi(x)]^2$.

idea: 用唯一因式分解定理

设 $f(x)=(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{e_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{e_t}$

其中 k_i 必为偶数 $i=1\ldots s$，否则 $f(x)$ 在 a_i 两边取值符号相反

现只需考虑：只需 $h(x)=(x^2+p_1x+q_1)^{e_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{e_t}$ 即可

若 $h(x)=(\varphi(x))^2+(\psi(x))^2$

$\Rightarrow f(x)=\left(\left((x-a_1)^{\frac{k_1}{2}}\cdots(x-a_s)^{\frac{k_s}{2}}\right)\varphi(x)\right)^2+\left((x-a_1)^{\frac{k_1}{2}}\cdots(x-a_s)^{\frac{k_s}{2}}\psi(x)\right)^2$