第五、六周作业

P184. T2:

2. 在数域 F 上所有 n 阶方阵构成的线性空间 $F^{n\times n}$，所有对称方阵的集合记为 S，所有斜对称方阵的集合记为 K. 证明：S 和 K 都是 $F^{n\times n}$ 的子空间；$S+K=F^{n\times n}$，$S\cap K=\{0\}$；并求 $\dim S$，$\dim K$.

证明：由于对称阵的加法与数乘仍为对称阵，反对称阵的加法与数乘仍为反对称。

故 S 与 K 都为 $F^{n\times n}$ 子空间

对于 $A\in F^{n\times n}$，$A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$

其中 $\frac{A+A^T}{2}$ 对称　$\frac{A-A^T}{2}$ 反称

故 $S+K=F^{n\times n}$

若有 $A=(a)_{ij}\in S\cap K$，则 $a_{ij}=-a_{ji}$，$a_{ij}=a_{ji}$

$\Rightarrow a_{ii}=0\quad a_{ij}=0$

故 $S\cap K=\{0\}$

S 中有基 $\{e_{ij}+e_{ji}\}(i\neq j)\cup\{e_{ii}\}$，其中 $e_{ij}=\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\end{array}$

故 $\dim S=\frac{n(n+1)}{2}$

K 中有基 $\{e_{ij}-e_{ji}\}(i\neq j)$　故 $\dim K=\frac{n(n-1)}{2}$

P184 T3:

3. 在 $F^{2\times 2}$ 中，所有形如 $\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$ 的矩阵集合记为 V_1，所有形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$ 的矩阵集合记为 V_2. 证明：V_1 和 V_2 都是 $F^{2\times 2}$ 的子空间，并求 $\dim V_1$，$\dim V_2$，$\dim(V_1+V_2)$，$\dim(V_1\cap V_2)$.

V_1 中有基 $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$　故 $\dim V_1=3$

V_2 中有基 $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$　故 $\dim V_2=3$

$V_1\cap V_2=\left\{\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & z \end{pmatrix}\middle|\ a,z\in F\right\}$　故 $V_1\cap V_2$ 有基 $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

故 $\dim(V_1\cap V_2)=2$

由维数定理 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)=4$

6. 设 U,V 和 W 是线性空间 L 的子空间.证明:

(1) 等式 $U\cap(V+W)=(U\cap V)+(U\cap W)$ 不一定成立.

(2) 等式 $U\cap(V+(U\cap W))=(U\cap V)+(U\cap W)$ 恒成立.

P184, T6:

(1) 反例: 取 $L=\mathbb{R}^n$ $V_1=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \middle| x_1\in\mathbb{R}\right\}$ $V_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \middle| x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$

取 $U=\left\{\begin{pmatrix}a\\\vdots\\a\end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 子空间

$U\cap(V+W)=U$ 而 $U\cap V=\phi$ $U\cap W=\phi$

故 等式不成立

(2) 我们证明左右集合互相包含

证: 对于"$\supseteq$": 设 $u_1\in U\cap V$, $u_2\in U\cap W$, 则 $u_1+u_2\in U$,

$u_1+u_2\in V+(U\cap W)$ 故 $u_1+u_2\in U\cap(V+(U\cap W))$

对于"$\subseteq$" 若 $u=v+w$ $(v\in V, w\in U\cap W)$

$\Rightarrow v=u-w\in U$, $w\in U\cap W$

而 $v\in V \Rightarrow v\in U\cap V$ $w\in U\cap W$

故"$\subseteq$"成立

Remark: 本题表明 空间做和 对交 不满足分配律

P184 T10.

10. 分别求下列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与向量 β_1,β_2,β_3 生成的子空间 W_1 与 W_2 的维数,并给出子空间 $W_1\cap W_2$ 与 W_1+W_2 的一组基:

(1) $\alpha_1=(1,2,1,-2)$, $\alpha_2=(2,3,1,0)$, $\alpha_3=(1,2,2,-3)$,
$\beta_1=(1,1,1,1)$, $\beta_2=(1,0,1,-1)$, $\beta_3=(1,3,0,-4)$;

(2) $\alpha_1=(1,1,0,0)$, $\alpha_2=(0,1,1,0)$, $\alpha_3=(0,0,1,1)$,
$\beta_1=(1,0,1,0)$, $\beta_2=(0,2,1,1)$, $\beta_3=(1,2,1,2)$.

(1) 先求 W_1 与 W_2 的维数:

对于 W_1：把 $\alpha_1=(1,2,1,-2)$ $\alpha_2=(2,3,1,0)$ $\alpha_3=(1,2,2,-3)$ 作为列向量

构成矩阵 A，对 A 进行初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&2\\1&1&2\\-2&0&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&0\\0&-1&1\\0&4&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故 $\mathrm{rank}(A)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 W_1 的一组基

对于 W_2：令 $\beta_1=(1,1,1,1)$ $\beta_2=(1,0,1,-1)$ $\beta_3=(1,3,0,-4)$

作为列向量构成矩阵 B，对 B 进行初等行变换：

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&3\\1&1&0\\1&-1&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\0&0&-1\\0&-2&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\0&0&-1\\0&0&-9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(B)=3 \Rightarrow \dim W_2=3$ β_1,β_2,β_3 为 W_2 一组基

对于 W_1+W_2：把 W_1 与 W_2 的列向量连在一起考虑，$C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

同样方法做初等行变换 可知 $\dim(W_1+W_2)=4$

且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$ 可作为 W_1+W_2 一组基

对于 $W_1\cap W_2$：设 $\gamma\in W_1\cap W_2$，则

$\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3$ 未知数 x_1,x_2,x_3 y_1,y_2,y_3

即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3-y_1\beta_1-y_2\beta_2-y_3\beta_3=0$

解此方程组，得到 $\gamma=k_1\begin{pmatrix}-2\\-8\\1\\13\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

故 $W_1\cap W_2$ 中有基 $\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\0\\9\end{pmatrix}$

(2) 与(1)同样方法可得:

$\dim W_1=3$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 W_1 一组基

$\dim W_2=3$, β_1,β_2,β_3 为 W_2 一组基

$\dim(W_1+W_2)=4$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 为 W_1+W_2 一组基

$\dim(W_1\cap W_2)=2$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ 为 $W_1\cap W_2$ 一组基

P184. T12

证明: 由条件

间为

$V(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)=\{a_1\boldsymbol{\alpha}_1+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_k\boldsymbol{\alpha}_k: a_1,a_2,\cdots,a_k\in F$

$V\{\alpha\}+W=U$

$V\{\beta\}+W=K$

其中, $V(\alpha_1\ldots\alpha_k)=\{a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots+a_k\alpha_k \mid a_1\ldots a_k\in F\}$

若 $\beta\in U \Rightarrow \beta=\lambda\alpha+w$, $\lambda\in F, w\in W$

由于 $\beta\notin W \Rightarrow \lambda\neq 0 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{\lambda}(\beta-w)=\frac{1}{\lambda}\beta-\frac{1}{\lambda}w \in K$

#

P176. T4

4. 设 V 是 n 维实线性空间. 如果保留 V 的向量加法, 但在纯量 λ 乘以向量时, 限定纯量 λ 只取有理数, 如此得到的有理域 $\mathbb{Q}$ 上线性空间记为 $\tilde{V}$. 线性空间 $\tilde{V}$ 是否有限维的?

设 V 有基 $\{e_1\ldots e_n\}$

$\tilde{V}$ 若有限维, $\tilde{V}$ 做 $\mathbb{Q}$ 上线性空间有基 $\{e_1'\ldots e_n'\}$

由于 $e_i' \in V \Rightarrow \exists k_{ij} \in Q$，$1 \le i \le n$，$1 \le j \le n$

s.t. $e_i' = k_{i1}e_1 + \cdots + k_{in}e_n$

由于 $\mathbb{R}$ 上任何一个元素都有唯一表示 $v = r_1e_1 + \cdots + r_ne_n$，$r_i \in \mathbb{R}$

又由于 $\{e_1' \cdots e_n'\}$ 为 V 的基

故 v 又有表示 $v = q_1e_1' + \cdots + q_ne_n'$，$q_i \in Q$

$$
\begin{aligned}
&= (q_1k_{11} + q_2k_{21} + \cdots + q_nk_{n1})e_1 \\
&+ (q_1k_{12} + \cdots + q_nk_{n2})e_2 \\
&+ \cdots \\
&+ (q_1k_{1n} + \cdots + q_nk_{nn})e_n
\end{aligned}
$$

由于 $\{e_1 \cdots e_n\}$ 为 V 的基，故 v 变化时 r_1 遍历整个 $\mathbb{R}$

但看 v 的另一个表示中 e_1 分量为 $q_1k_{11} + \cdots + q_nk_{n1}$

遍历不了整个 $\mathbb{R}$，因为 $\{q_1k_{11}, \cdots q_nk_{n1} \mid q_1, \cdots, q_n \in Q\}$

为可数集，而 $\mathbb{R}$ 不可数，故矛盾！

故 V 作为 Q 上线性空间不为有限维

Remark：显然对于一个域 F 上的有限维线性空间看成 F 子域上的线性空间时未必有限，但域 F 可以看成子域上的线性空间

即子域 $E \subseteq F$，F 可以看成 E 上线性空间，若 F 作为 E 上线性空间有限维，则 F 上的有限维线性空间可以看成 E 上有限维线性空间

用数学语言讲：

设 V 为域 F 上有限维线性空间，子域 $E \subseteq F$，若 F 是 E 上有限维线性空间，则 V 为 E 上有限维线性空间，且有：

$$\dim_E(V) = \dim_E(F) \cdot \dim_F(V)$$

P186 T7:

rank A^k = rank A^{k+1} = rank A^{k+2} = $\cdots$.

17. 设 $P_1, P_2, \cdots, P_k, Q_1, A_2, \cdots, Q_k$ 都是 n 阶方阵，并且 $P_iQ_j = Q_jP_i$，rank P_i = rank P_iQ_i，$1 \leqslant i, j \leqslant k$. 证明：

rank $P_1P_2\cdots P_k$ = rank $P_1\cdots P_kQ_1\cdots Q_k$.

Remark: 这道题乍一看可能没什么想法,我们先看一下上两周作业题

习题 6（P134 T6）设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$，证明 $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A)$ 的充要条件是：存在 $C \in \mathbb{F}^{m\times n}$, s.t. $A = ABC$，并由此证明：如果 $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A)$，且方阵 AB 幂等，则方阵 BA 也幂等

这个题可以用非常自然的方式去看:

将A写成列向量 $A=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ AB也写成列向量 $AB=(\beta_1\cdots\beta_m)$

AB意思是将A中向量进行线性组合,即 $\beta_1\cdots\beta_m$ 用 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性表出,而 $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)$ 等价于 $(\beta_1\cdots\beta_m)$ 的极大无关组个数与 $(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 极大无关组个数相同,而 $\beta_1\cdots\beta_m$ 又能被 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 表出,故 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 也能被 $(\beta_1\cdots\beta_m)$ 表出,即存在矩阵 C, st

$$(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\beta_1\cdots\beta_m)C,$$

这就是 $A=ABC$,上题就得证

我们用这个想法去看这个题如何操作:

想法: 我们先从操作两个开始: 即证明 $\mathrm{rank}(P_1P_2)=\mathrm{rank}(P_1P_2Q_1Q_2)$

首先,由于 $\mathrm{rank}(P_1)=\mathrm{rank}(P_1Q_1)$,这表明 P_1 的列向量组与 P_1Q_1 的列向量组等价(即相互线性表出),那么 $\mathrm{rank}(P_1P_2)=\mathrm{rank}(P_1Q_1P_2)$

(因为 P_2 右乘为对 P_1 与 P_1Q_1 的列向量线性组合)

我们接下来继续操作, st $\mathrm{rank}(P_1Q_1P_2)=\mathrm{rank}(P_1Q_1P_2Q_2)$

由于 $\mathrm{rank}(P_2)=\mathrm{rank}(P_2Q_2) \Longrightarrow \mathrm{rank}(Q_2P_2)$

故将 P_2 看成行向量, $\mathrm{rank}(P_2)=\mathrm{rank}(Q_2P_2)$ 表明:

对P_2的行向量进行线性组合 仍然与P_2的行向量等价

故对P_2与P_2Q_2左乘任何矩阵后，得到的行向量组都等价

即∀矩阵A，$rank(AP_2)=rank(AP_2Q_2)$，取$A=P_1Q_1$

$\Rightarrow rank(P_1Q_1P_2)=rank(P_1Q_1P_2Q_2)=rank(P_1P_2Q_1Q_2)$

$\Rightarrow rank(P_1P_2)=rank(P_1P_2Q_1Q_2)$，对两个的操作完毕

对k个也一样，一个一个这样操作 从2个到3个，从3个到4个，一直到k个

这就是用数学归纳法，我们证明一下：

证明：对$k=1$，条件$rank(P_1)=rank(P_1Q_1)$显然成立

设$k<n$时结论成立，

当$k=n$时，由于$rank(P_n)=rank(P_nQ_n)=rank(Q_nP_n)$

这表明，Q_nP_n即对P_n行向量组线性组合仍与P_n行向量组等价，于是对Q_nP_n与P_n的行向量组取相同系数线性组合，得到的行向量组仍等价，即有$rank(P_1\cdots P_{n-1}Q_1\cdots Q_{n-1}Q_nP_n)=$

$rank(P_1\cdots P_{n-1}Q_1\cdots Q_{n-1}P_n)$

由归纳假设：$rank(P_1\cdots P_{n-1})=rank(P_1\cdots P_{n-1}Q_1\cdots Q_{n-1})$

这表明 $P_1\cdots P_{n-1}$的列向量用$Q_1\cdots Q_{n-1}$这些矩阵的系数进行线性组合后，得到的列向量组与$P_1\cdots P_{n-1}$的列向量组等价

故对两者的列向量组进行相同系数线性组合后仍等价

即有 $rank(P_1\cdots P_{n-1}P_n)=rank(P_1\cdots P_{n-1}Q_1\cdots Q_{n-1}P_n)$

刚刚证明了右式$=rank(P_1\cdots P_{n-1}Q_1\cdots Q_{n-1}Q_nP_n)$

由于 $P_iQ_j=Q_jP_i$ 故

$rank(P_1\cdots P_n)=rank(P_1\cdots P_nQ_1\cdots Q_n)$成立，故$k=n$结论成立

P191 T3:

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 都是四维复向量空间 $\mathbf{C}^4$ 中的向量，$\mathbf{C}^4$ 中分别由向量集合 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 和 $\{\alpha_3,\alpha_4\}$ 生成的子空间记为 V 和 W. 试判断 $\mathbf{C}^4=V\oplus W$ 是否成立？

(1) $\alpha_1=(0,1,0,1),\alpha_2=(0,0,1,0),\alpha_3=(1,0,1,0),\alpha_4=(1,1,0,0)$;

(2) $\alpha_1=(-1,1,1,0),\alpha_2=(0,1,-1,1),\alpha_3=(1,0,0,0),\alpha_4=(0,0,0,1)$;

(3) $\alpha_1=(1,0,0,1),\alpha_2=(0,1,1,0),\alpha_3=(1,0,1,0),\alpha_4=(0,1,0,1)$.

Remark: 本质上 4维 线性空间的一组基有4个向量，本题可以直接看这4个向量是否线性无关即可

方法一：(1) $\mathbb{C}^4=V\oplus W \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为一组基，由于 $\mathbb{C}^4$ 基向量有4个

故 $\mathbb{C}^4=V\oplus W \Leftrightarrow \mathrm{rank}(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=4$

令 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)$

则 $A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$，对A作初等行变换

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

故 $\mathrm{rank}(A)=4$ 故 $V\oplus W=\mathbb{C}^4$

(2) 也同理，令 $C=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)$

对C进行初等行变换，得到

$$C\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 故 $V+W\neq\mathbb{C}^4$ 故 $V\oplus W\neq\mathbb{C}^4$

(3) 也同样方法做 可以得到 $\mathbb{C}^4=V\oplus W$ 不成立

方法二 3个小问 在此方法下思路完全相同，我们演示第(1)题

(1): 我们需判断两个条件:

① $V+W=F^4$ ② $V\cap W=\{0\}$

先求 $\dim V$ 与 $\dim W$

在向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 中，(α_1^T,α_2^T) 此矩阵进行初等行变换

得到 (α_1,α_2) 线性无关，$\Rightarrow \dim V=2$

在向量组 $\{\alpha_3,\alpha_4\}$ 中，(α_3^T,α_4^T) 此矩阵进行初等行变换

得到 (α_3,α_4) 线性无关，$\Rightarrow \dim W=2$

由维数定理 $\dim(V+W)=\dim V+\dim W-\dim(V\cap W)$

只需看是否 $\dim(V\cap W)=0$ 即可，即 $V\cap W=\{0\}$

设 $\beta\in V\cap W$，则 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=l_1\alpha_3+l_2\alpha_4$

即 $(0,k_1,0,k_1)+(0,k_2,0,0)-(l_1,l_2,l_1,0)-(l_2,l_2,0,0)=0$

解此方程组得到 $k_1=k_2=l_1=l_2=0 \Rightarrow \beta=0$

故 $V\cap W=\{0\}$

故 $V\oplus W=F^4$

P194 T2

2. 设 A 是数域 F 上 $m\times n$ 矩阵，β 是数域 F 上 m 维列向量空间 F^m 中的向量，并且 $\operatorname{rank}(A,B)=\operatorname{rank}A$. 记方程组 $Ax=0$ 的解空间为 V_A. 设向量 α 是方程组 $Ax=\beta$ 的一个特解. 证明：方程组 $Ax=\beta$ 的所有解构成 F^n 中向量 α 所在的模 V_A 同余类.

证明: 若 x 为 $Ax=\beta$ 的解

由于 $A\alpha=\beta \Rightarrow A(x-\alpha)=0 \Rightarrow x-\alpha\in V_A$

$\Rightarrow x\equiv\alpha \pmod{V_A}$

P194 T3: 3. 设 W 是数域 F 上 n 维列向量空间 F^n 的子空间. 证明:存在数域 F 上 $m\times n$ 矩阵 A, 使得齐次方程组 $Ax=0$ 的解空间 V_A 为 W.

这道题如果学了线性变换会是很 easy 的,但在这里我们仍然用线性空间与线性方程组解释

证明: 设 W 中有一组基 $\{w_1, \dots, w_{n-m}\}$

若 $\forall x \in W$, $Ax=0 \iff A(w_1,\dots,w_{n-m})=0$

令 $(w_1 \dots w_{n-m}) = B$, $\operatorname{rank}(B) = n-m$ (由于 $w_1 \dots w_{n-m}$ 为线性无关)

若有矩阵 A s.t. $AB=0 \iff B^TA^T=0 \iff A^T$ 的列向量组的每个列向量都为 $B^Tx=0$ 的解

而 $\operatorname{rank} B^T = n-m \Rightarrow B^Tx=0$ 的解空间恰有 m 个线性无关向量

即 $\dim(V_{B^T}) = m$, 取 A^T 为 V_{B^T} 一组基, 则 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T) = m$

而 $B^TA^T=0 \Rightarrow AB=0 \Rightarrow B$ 的每个列向量都为 $Ax=0$ 的解

且 $\operatorname{rank}(A) = m$ 由线性方程组理论知 $Ax=0$ 的解空间 V_A

$\dim(V_A) = n-m$ 而 $W \subseteq V_A$ $\dim(W) = \dim V_A \Rightarrow W = V_A$ #

P74.T3

3. 设非零的实系数多项式 $f(x)$（即系数都是实数的多项式）满足 $f(f(x)) = f^k(x)$，其中 k 是给定的正整数. 求多项式 $f(x)$.

方法一：用多项式的定义去解（比较系数）

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$

$f^k(x) = (a_n x^n + \cdots + a_0)^k$，首项次数为 nk

则 $f(f(x)) = a_n f^n(x) + a_{n-1} f^{n-1}(x) + \cdots + a_1 f(x) + a_0$

$= a_n(a_n x^n + \cdots + a_0)^n + a_{n-1}(a_n x^n + \cdots + a_0)^{n-1} + \cdots + a_0$

首项次数为 $n^2 \Rightarrow n^2 = nk \Rightarrow n = k$

故 $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_0$

$f(f(x)) = a_k f^k(x) + a_{k-1} f^{k-1}(x) + \cdots + a_1 f(x) + a_0$

$= a_k(a_k x^k + \cdots + a_0)^k + \cdots + a_0$

对比 $f(f(x))$ 与 $f^k(x)$ 首项系数 有 $a_k = 1$（当 $k \neq 0$ 时）

由 $f(f(x)) - f^k(x) = 0$ 知

$a_{k-1}(x^k + \cdots + a_0)^{k-1} + \cdots + a_0 = 0$

对比首项系数 可得 $a_{k-1} = 0$

得到 $a_{k-2}(x^k + \cdots + a_0)^{k-2} + \cdots + a_0 = 0$

对比 $x^{k(k-2)}$ 项系数 $\Rightarrow a_{k-2} = 0$

一直往下做，得到 $a_t = 0 \ (t < n)$

$\Rightarrow f(x) = x^k \quad (k \neq 0)$

当 $k=0$ 时

即 $f(x)=a_0$

则 $f(f(x))=f(x)$ $\overset{代入}{\Longleftrightarrow}$ $a_0=a_0^k$ $\Rightarrow$ a_0 为实数域上 $k-1$ 次单位根.

方法二：(可以先不看，后面会学，n 次多项式至多有 n 个根)

证明，设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$

当 $n>0$ 时 $f(x)$ 可以取无穷多个值

设 $t=f(x)$，由条件 $f(f(x))=f^k(x)$ 知

$f(t)=t^k$ 当 t 取无穷多个值，都成立

这表明 $f(x)=x^k$，当 x 取无穷多个值都成立

又因 f 为 n 次多项式，不可能 $f(x)-x^k=0$ 当 x 取无穷多个值成立

$\Rightarrow$ $f(x)=x^k$

当 $n=0$ 时，$f(f(x))=a_0$ 而 $f^k(x)=a_0^k$

$\Rightarrow$ a_0 只能为 $k-1$ 次单位根，且 $a_0\in\mathbb{R}$ #

第6周作业

P7. T4

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$ $(a_n\neq 0)$

则 $f^2(x)=a_n^2x^{2n}+2a_na_{n-1}x^{2n-1}+\dots+2a_1a_0x+a_0^2$

且 $f(x^2)=a_nx^{2n}+a_{n-1}x^{2n-2}+\dots+a_1x^2+a_0$

将 $f^2(x)$ 写成 $\sum_{s=0}^{2n}b_sx^s$，其中 $b_s=\sum_{i+j=s}a_ia_j$

对照 x^{2n} 项系数 有 $a_n=1$

以下断言 $a_t=0$ (当 $t<n$ 时)

我们用反向归纳法证明

由于 $f(x^2)$ 与 $f^2(x)$ 的 x^{2n-1} 项次系数相等 $\Rightarrow 2a_na_{n-1}=a_{n-1}\Rightarrow a_{n-1}=0$

设当 $t>n-k$ 时成立，即当 $t>n-k$ 时，$a_t=0$ $(t\neq n)$

当 $t=n-k$ 时

①若 k 为偶数

考虑 $f(x^2)$ 与 $f^2(x)$ 的 $2n-k$ 项系数

即 $a_{n-k}=\sum_{i+j=2n-k}a_ia_j$

由于当 $t>n-k$ 时 $a_t=0$

故得到 $2a_na_{n-k}=a_{n-k}\Rightarrow a_{n-k}=0$

②当 k 为奇数时

考虑 $f(x^2)$ 与 $f^2(x)$ 的 $2n-k$ 项系数

即 $0=2a_na_{n-k}$ $\Rightarrow a_{n-k}=0$

故 $f(x) = x^n \quad n=0,1,2,\cdots.$