第三、四周作业答案

涂嘉乐

2025 年 10 月 12 日

习题 1（P113 T5）证明：

(1) 正交方阵一定可逆，并且它的逆仍是正交方阵

(2) 酉方阵一定可逆，并且它的逆仍是酉方阵

(3) 可逆对称方阵的逆仍是对称方阵

(4) 可逆斜对称方阵的逆仍是斜对称方阵

证明 (1). 设 O 是正交方阵，则 $OO^T = O^TO = I_n$，所以 $O^{-1} = O^T$，且 $(O^T)^TO^T = OO^T = I_n$，即 $O^{-1} = O^T$ 也是正交方阵

(2). 设 U 是酉方阵，则 $UU^* = U^*U = I_n$（其中 U^* 表示 U 的共轭转置），所以 $U^{-1} = U^*$，且 $(U^*)^*U^* = UU^* = I_n$，即 $U^{-1} = U^*$ 也是酉方阵

(3). 设 A 为可逆对称方阵，则 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$，故 A^{-1} 也是对称方阵

(4). 设 A 为可逆斜对称方阵，则 $A^T = -A$，故 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$，故 A^{-1} 也是斜对称方阵 □

习题 2（T113 P10）设 A_{ij} 是 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的行列式 $\det A$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式，证明：

$$\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{jk} \\ A_{il} & A_{jl} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j+k+l} A \begin{pmatrix} 1 & \cdots & (i-1) & (i+1) & \cdots & (j-1) & (j+1) & \cdots & n \\ 1 & \cdots & (k-1) & (k+1) & \cdots & (l-1) & (l+1) & \cdots & n \end{pmatrix} \det(A)$$

评价 本题乍一看没什么头绪，我们先进行分析：回忆 A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

则 $LHS = A^* \begin{pmatrix} k & l \\ i & j \end{pmatrix}$，由伴随矩阵的性质知 $AA^* = \det(A)I_n$，接下来我们可以先讨论一些特殊情形，然后再将问题一般化

证明 Case 1. 当 $i = k = n-1, j = l = n$ 时，此时 $LHS = \begin{vmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ A_{n-1,n} & A_{n,n} \end{vmatrix}$，即为 A^* 右下角的 2×2 分块，为了让所求式子中出现这一项，我们考虑对 $AA^* = \det(A)I_n$ 中的 A^* 进行分块处理，见下式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & A_{n-1,1} & A_{n1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & A_{n-1,2} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & A_{n-1,n-2} & A_{n,n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n-1,n} & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & * & \det(A) & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 & \det(A) \end{pmatrix}$$

其中 $*$ 表示不重要的部分，关于新矩阵的最后两列，大家也可以用行列式的 Laplace 展开

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \det(A), & i = j \end{cases}$$

进行验证。对上式两边同时取行列式即得

$$\det(A) \cdot \begin{vmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ A_{n-1,n} & A_{n,n} \end{vmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-2 \\ 1 & \cdots & n-2 \end{pmatrix} \cdot \det(A)^2 = (-1)^{n-1+n-1+n+n} \cdot A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-2 \\ 1 & \cdots & n-2 \end{pmatrix} \cdot \det(A)^2$$

如果 $\det(A) \neq 0$，则两边同时消去一个 $\det(A)$ 即得证；如果 $\det(A) = 0$，那么 $\operatorname{rank}(A^*) \leq 1$，进而 $\begin{vmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ A_{n-1,n} & A_{n,n} \end{vmatrix} = 0$，即 $LHS = RHS = 0$，仍成立

Case 2. 一般情形，我们考虑将 A 的第 i, j 行与第 $n-1, n$ 行交换，A 的第 k, l 列与第 $n-1, n$ 列交换，记所得的矩阵为 $\tilde{A}$，则

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,n-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,n} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,k} & a_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,n-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,l-1} & a_{i-1,n} & a_{i-1,l+1} & \cdots & a_{i-1,n-2} & a_{i-1,k} & a_{i-1,l} \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,k+1} & \cdots & a_{n-1,l-1} & a_{n-1,n} & a_{n-1,l+1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,k} & a_{n-1,l} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,n-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,l-1} & a_{i+1,n} & a_{i+1,l+1} & \cdots & a_{i+1,n-2} & a_{i+1,k} & a_{i+1,l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,ki-1} & a_{j-1,n-1} & a_{j-1,k+1} & \cdots & a_{j-1,l-1} & a_{j-1,n} & a_{j-1,l+1} & \cdots & a_{j-1,n-2} & a_{j-1,k} & a_{j-1,l} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,n-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,n} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,k} & a_{n,l} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,k-1} & a_{j+1,n-1} & a_{j+1,k+1} & \cdots & a_{j+1,l-1} & a_{j+1,n} & a_{j+1,l+1} & \cdots & a_{j+1,n-2} & a_{j+1,k} & a_{j+1,l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,k-1} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,k+1} & \cdots & a_{n-2,l-1} & a_{n-2,n} & a_{n-2,l+1} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,k} & a_{n-2,l} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{i,n-1} & a_{i,k+1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,n} & a_{i,l+1} & \cdots & a_{i,n-2} & a_{i,k} & a_{i,l} \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,k-1} & a_{j,n-1} & a_{j,k+1} & \cdots & a_{j,l-1} & a_{j,n} & a_{j,l+1} & \cdots & a_{j,n-2} & a_{j,k} & a_{j,l} \end{pmatrix}$$

我们对 $\tilde{A}$ 运用 Case 1，则有

$$\begin{vmatrix} \tilde{A}_{n-1,n-1} & \tilde{A}_{n,n-1} \\ \tilde{A}_{n-1,n} & \tilde{A}_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1+n+n-1+n} \tilde{A} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-2 \\ 1 & \cdots & n-2 \end{pmatrix} \det(\tilde{A})$$

接下来以 $\tilde{A}_{n,n}$ 为例，因为

$$\tilde{A}_{n,n} = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,n-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,n} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,k} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,n-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,l-1} & a_{i-1,n} & a_{i-1,l+1} & \cdots & a_{i-1,n-2} & a_{i-1,k} \\
a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,k+1} & \cdots & a_{n-1,l-1} & a_{n-1,n} & a_{n-1,l+1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,k} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,n-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,l-1} & a_{i+1,n} & a_{i+1,l+1} & \cdots & a_{i+1,n-2} & a_{i+1,k} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,ki-1} & a_{j-1,n-1} & a_{j-1,k+1} & \cdots & a_{j-1,l-1} & a_{j-1,n} & a_{j-1,l+1} & \cdots & a_{j-1,n-2} & a_{j-1,k} \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,n-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,n} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,k} \\
a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,k-1} & a_{j+1,n-1} & a_{j+1,k+1} & \cdots & a_{j+1,l-1} & a_{j+1,n} & a_{j+1,l+1} & \cdots & a_{j+1,n-2} & a_{j+1,k} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,k-1} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,k+1} & \cdots & a_{n-2,l-1} & a_{n-2,n} & a_{n-2,l+1} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,k} \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{i,n-1} & a_{i,k+1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,n} & a_{i,l+1} & \cdots & a_{i,n-2} & a_{i,k}
\end{vmatrix}$$

我们此时将第 k 列与第 $n-1$ 列对换，行列式改变 (-1)；将第 l 列不断与右边的列对换至最后一列，行列式改变 $(-1)^{n-1-l}$ $(l \to l+1 \to \cdots \to n-1)$；同理将第 i 行和第 $n-1$ 行对换，行列式改变 (-1)；将第 j 行不断与下面的行对换至最后一行，行列式改变 $(-1)^{n-1-j}$，经过这样操作后我们就将 $\tilde{A}_{n,n}$ 变为 $A_{j,l}$，因此

$$\tilde{A}_{n,n} = (-1)^{2(n-1)-j-l} A_{j,l} = (-1)^{j+l} A_{j,l}$$

同理我们有

$$\tilde{A}_{n-1,n-1} = (-1)^{i+k} A_{i,k}, \quad \tilde{A}_{n-1,n} = (-1)^{i+l} A_{i,l}, \quad \tilde{A}_{n,n-1} = (-1)^{j+k} A_{j,k}$$

且

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-2 \\ 1 & \cdots & n-2 \end{pmatrix} = (-1)^4 A \begin{pmatrix} 1 & \cdots & (i-1) & (i+1) & \cdots & (j-1) & (j+1) & \cdots & n \\ 1 & \cdots & (k-1) & (k+1) & \cdots & (l-1) & (l+1) & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$\det(\tilde{A}) = (-1)^{1+1} \det(A) = \det(A)$$

所以我们有

$$LHS = \begin{vmatrix} (-1)^{i+k} A_{i,k} & (-1)^{j+k} A_{j,k} \\ (-1)^{i+l} A_{i,l} & (-1)^{j+l} A_{j,l} \end{vmatrix} = (-1)^{k+l} \begin{vmatrix} (-1)^{i} A_{i,k} & (-1)^{j} A_{j,k} \\ (-1)^{i} A_{i,l} & (-1)^{j} A_{j,l} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j+k+l} \begin{vmatrix} A_{i,k} & A_{j,k} \\ A_{i,l} & A_{j,l} \end{vmatrix}$$

$$RHS = A \begin{pmatrix} 1 & \cdots & (i-1) & (i+1) & \cdots & (j-1) & (j+1) & \cdots & n \\ 1 & \cdots & (k-1) & (k+1) & \cdots & (l-1) & (l+1) & \cdots & n \end{pmatrix} \det(A)$$

所以一般情况得证 □

习题 3（P122 T2）求 λ 使得矩阵 A 的秩最小，其中

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1&4\\ \lambda&4&10&1\\ 1&7&17&3\\ 2&2&4&3\end{pmatrix}$$

证明 对 A 进行初等行、列变换可得

$$\begin{pmatrix}3&1&1&4\\ \lambda&4&10&1\\ 1&7&17&3\\ 2&2&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_1}\begin{pmatrix}1&3&1&4\\ 4&\lambda&10&1\\ 7&1&17&3\\ 2&2&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[c_4\to c_4-4c_1]{\substack{c_2\to c_2-3c_1\\ c_3\to c_3-c_1}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 4&\lambda-12&6&-15\\ 7&-20&10&-25\\ 2&-4&2&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3\to\frac{1}{2}c_3]{c_4\to c_4+\frac{5}{2}c_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 4&\lambda-12&3&0\\ 7&-20&-5&0\\ 2&-4&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4\to r_4-2r_1]{\substack{r_2\to r_2-4r_1\\ r_3\to r_3-7r_1}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 0&\lambda-12&3&0\\ 0&-20&-5&0\\ 0&-4&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\to r_2-3r_4]{r_3\to r_3-5r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 0&\lambda&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&-4&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&\lambda&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因此当 $\lambda=0$ 时，$\min\operatorname{rank}(A)=2$ □

习题 4（P122 T13） n 阶方阵的伴随方阵记为 A^*，证明：

(1) $\operatorname{rank}(A^*)=n$ 的充分必要条件 $\operatorname{rank}(A)=n$

(2) $\operatorname{rank}(A^*)=1$ 的充分必要条件 $\operatorname{rank}(A)=n-1$

(3) $\operatorname{rank}(A^*)=0$ 的充分必要条件 $\operatorname{rank}(A)<n-1$

(4) 当 $n>2$ 时，$(A^*)^*=(\det A)^{n-2}A$；当 $n=2$ 时，$(A^*)^*=A$

证明 (1)

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A)=n&\iff\det(A)\neq0\iff\det(AA^*)\neq0\\&\iff\det(A^*)\neq0\iff\operatorname{rank}(A^*)=n\end{aligned}$$

(2) $(\Longleftarrow)$：由于 $\operatorname{rank}(A)=n-1$，所以 A 有 $n-1$ 阶非零子式，即 A^* 中有至少一个元素非零，故 $\operatorname{rank}(A^*)\geq1$；另一方面由习题 2（T113 P10）知 A^* 的任意二阶子式均为零，故 $\operatorname{rank}(A^*)\leq1$，综上 $\operatorname{rank}(A^*)=1$

$(\Longrightarrow)$：由于 $\operatorname{rank}(A^*)=1$，所以 A^* 有至少一个非零元，即 A 有至少有个 $n-1$ 阶子式非零，所以 $\operatorname{rank}(A)\geq n-1$，而 $\operatorname{rank}(A)=n\iff\operatorname{rank}(A^*)=n$，所以 $\operatorname{rank}(A)$ 只能为 $n-1$

(3)

$$\operatorname{rank}(A^*)=0\iff A^*=O\iff A\text{的任意}n-1\text{阶子式均为零}\iff\operatorname{rank}(A)<n-1$$

(4) 若 A 不可逆，则 $\operatorname{rank}(A^*)\leq1$，进而 $\operatorname{rank}(A^*)^*=O$，即 $(A^*)^*=O=(\det A)^{n-2}A$；若 A 可逆，因为

$$\begin{cases}AA^*=\det(A)I_n\Longrightarrow\begin{cases}\det(A)\cdot\det(A^*)=\det(A)^n\Longrightarrow\det(A^*)=\det(A)^{n-1}\\(A^*)^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A\end{cases}\\A^*(A^*)^*=\det(A^*)I_n\Longrightarrow(A^*)^*=\det(A^*)(A^*)^{-1}I_n\end{cases}$$

所以

$$(A^*)^* = \det(A)^{n-1}\frac{1}{\det(A)}AI_n = \det(A)^{n-2}A$$

$\square$

习题 5（P134 T2）设 A, B 为 n 阶方阵，证明

$$\mathrm{rank}(AB - I_n) \le \mathrm{rank}(A - I_n) + \mathrm{rank}(B - I_n)$$

证明 我们首先证明 $\mathrm{rank}(X+Y) \le \mathrm{rank}(X) + \mathrm{rank}(Y)$，下面给出一个比较有启发性的证明：这需要利用 $\mathrm{rank}(XY) \le \min\{\mathrm{rank}(X), \mathrm{rank}(Y)\}$，因为

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \le \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$$

$$A + B = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{rank}(A+B) \le \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$$

回到本题，因为 $AB - I_n = AB - A + A - I_n = A(B - I_n) + (A - I_n)$，所以

$$\mathrm{rank}(AB - I_n) \le \mathrm{rank}(AB - A) + \mathrm{rank}(A - I_n) \le \mathrm{rank}(B - I_n) + \mathrm{rank}(A - I_n)$$

$\square$

习题 6（P134 T6）设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$，证明 $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A)$ 的充要条件是：存在 $C \in \mathbb{F}^{m\times n}$, s.t. $A = ABC$，并由此证明：如果 $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A)$，且方阵 AB 幂等，则方阵 BA 也幂等

证明 $(\Longleftarrow)$：若存在 $C \in \mathbb{F}^{m\times n}$, s.t. $A = ABC$，则

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(ABC) \le \mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(A) \Longrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AB)$$

$(\Longrightarrow)$：方法 I（需要用到下一题的结论，较为巧妙）

由下一题矩阵方程 $ABX = A$ 有解 C 当且仅当 $\mathrm{rank}(AB, A) = \mathrm{rank}(AB)$，所以我们只需证明 $\mathrm{rank}(AB, A) = \mathrm{rank}(A)$，因为 $(AB, A) = A(B, I_n)$，所以我们有

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(AB, A) = \mathrm{rank}(A(B, I_n)) \le \mathrm{rank}(A)$$

若 $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A)$ 且 AB 幂等，则 $\exists C$, s.t. $ABC = A$，所以

$$(BA)^2 = BABA = BABABC = B(ABAB)C = BABC = BA$$

即 BA 也幂等

方法 II（构造性证明，见习题课讲义） $\square$

评价 本题运用线性空间的语言可以非常快解决，我们很快就会学到

习题 7（P143 T4）设给定矩阵 $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{m\times p}$，未知矩阵 $X\in\mathbb{F}^{n\times p}$，证明矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件是 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,B)$，其中 (A,B) 是矩阵 A,B 并排而成的矩阵

证明 $(\Longrightarrow)$：将 A,X,B 按列分块为 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),X=(x_1,\cdots,x_p),B=(\beta_1,\cdots,\beta_p)$，其中 $\alpha_i\in\mathbb{R}^{m\times 1},x_i\in\mathbb{F}^{n\times 1},\beta_i\in\mathbb{F}^{m\times 1}$，则

$$AX=B\iff (Ax_1,\cdots,Ax_p)=(\beta_1,\cdots,\beta_p)$$

即 $AX=B$ 有解当且仅当 $Ax_1=\beta_1,\cdots,Ax_n=\beta_n$ 有解，由课本 3.6 节的定理 2 知，$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,\beta_i),\forall i$，即 $\operatorname{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\operatorname{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_i)$，即 $\forall i,\beta_i$ 可以被 A 的列向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 线性表示，设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 的一个极大无关组为 $\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}\}$，则它也是 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_p\}$ 的极大无关组，进而

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}=\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_p\}=\operatorname{rank}(A,B)$$

$(\Longleftarrow)$：由 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,B)$ 知，$\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}=\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_p\}$，即 $\forall i,\beta_i$ 可以被 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 线性表示，即

$$\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}=\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_i\}\Longrightarrow\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,\beta_i)$$

则 $\forall 1\le i\le p,Ax=\beta_i$ 有解，所以 $AX=B$ 有解 $\square$

习题 8（P151 T2）设 A,B,C 分别是 $m\times n,p\times q,m\times q$ 阶矩阵，X 是 $n\times p$ 阶未知矩阵，证明：矩阵方程 $AXB=C$ 有解的充分必要条件是 $(I_m-AA^-)C=0$ 和 $C(I_q-B^-B)=0$，并且当有解时，它的通解为

$$X=A^-CB^-+(I_n-A^-A)Y+Z(I_p-BB^-)+(I_n-A^-A)W(I_p-BB^-)$$

其中 Y,Z,W 为任意 $n\times p$ 阶矩阵

证明 $(\Longrightarrow)$：若矩阵方程 $AXB=C$ 有解 $X=X_0$，则

$$\begin{aligned}(I_m-AA^-)C&=(I_m-AA^-)AX_0B=AX_0B-AA^-AX_0B\\&=AX_0B-AX_0B=O\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C(I_q-B^-B)&=AX_0B(I_q-B^-B)=AX_0B-AX_0BB^-B\\&=AX_0B-AX_0B=O\end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$：若 $(I_m-AA^-)C=0,C(I_q-B^-B)=0$，则 $C=AA^-C,C=CB^-B$，我们取 $X_0=A^-CB^-$，则

$$AX_0B=A(A^-CB^-)B=(AA^-C)B^-B=CB^-B=C$$

即 $X_0=A^-CB^-$ 为矩阵方程 $AXB=C$ 的一个解

接下来证明 $X=A^-CB^-+(I_n-A^-A)Y+Z(I_p-BB^-)+(I_n-A^-A)W(I_p-BB^-)$ 为矩阵方程 $AXB=C$ 的通解，我们需要证明两点

- 上面的表达式确实为解
- 每个解都能写成上面的表达式

首先

$$\begin{aligned}AXB &= A[A^-CB^- + (I_n - A^-A)Y + Z(I_p - BB^-) + (I_n - A^-A)W(I_p - BB^-)]B\\ &= AX_0B + A(I_n - A^-A)YB + AZ(I_p - BB^-)B + A(I_n - A^-A)W(I_p - BB^-)B\\ &= O + (A - AA^-A)YB + AZ(B - BB^-B) + (A - AA^-A)W(B - BB^-B)\\ &= O + O + O + O = O\end{aligned}$$

即 X 确实是解，其次，对于任意矩阵方程 $AXB = C$ 的解 $X = X_0$，我们证明它均有通解的形式，取通解中的 $Y = Z = X_0, W = -X_0$，则

$$\begin{aligned}&A^-CB^- + (I_n - A^-A)X_0 + X_0(I_p - BB^-) + (I_n - A^-A)(-X_0)(I_p - BB^-)\\ =&A^-CB^- + X_0 - A^-AX_0 + X_0 - X_0BB^- - X_0 + A^-AX_0 + X_0BB^- - A^-CB^-\\ =&X_0\end{aligned}$$

即 X_0 确实可以写为通解的形式 □

习题 9（P163 T5）设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k \in \mathbb{F}^n$ 线性相关，$k \geq 2$，证明：对任意 $\alpha_{k+1} \in \mathbb{F}^n$，存在不全为零的纯量 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{F}$，使得向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k + \lambda_k\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 线性相关

证明 由题知 $\exists y_1, \cdots, y_k \in \mathbb{F}$ 不全为零，使得 $y_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + y_k\boldsymbol{\alpha}_k = 0$，设 $x_1, \cdots, x_k \in \mathbb{F}$ 满足

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_{k+1}) + \cdots + x_k(\boldsymbol{\alpha}_k + \lambda_k\boldsymbol{\alpha}_{k+1}) = 0 \cdots\cdots (*)$$

即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{\alpha}_k + (x_1\lambda_1 + \cdots + x_k\lambda_k)\boldsymbol{\alpha}_{k+1} = 0$$

我们取 $x_1 = y_1, \cdots, y_k = y_k$，代入上式得 $y_1\lambda_1 + \cdots + y_k\lambda_k = 0$，即我们只需证明可以取得合适的 $\lambda_i, 1 \leq i \leq k, \text{s.t. } y_1\lambda_1 + \cdots + y_k\lambda_k = 0$，则 $(x_1, \cdots, x_k) = (y_1, \cdots, y_k)$ 即为 $(*)$ 式的一组非零解，即向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_i + \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_{k+1}\}_{1 \leq i \leq k}$ 线性相关

我们可以不妨设 $y_1, \cdots, y_k$ 中非零的数为 $y_1, \cdots, y_t, 1 \leq t \leq k$，则我们只需取

$$\lambda_1 = \frac{1}{y_1}, \cdots, \lambda_{t-1} = \frac{1}{y_{t-1}}, \lambda_t = -\frac{t-1}{y_t}, \lambda_{t+1} = \cdots = \lambda_k = 0$$

则我们找到了满足题意的不全为零的纯量 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ □

习题 10（P163 T12）设 A 是 n 阶方阵，证明 $\operatorname{rank}(A^n) = \operatorname{rank}(A^{n+1}) = \operatorname{rank}(A^{n+2}) = \cdots$

证明 因为 $\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$，所以 $\operatorname{rank}(A^{k+1}) \leq \operatorname{rank}(A^k), \forall k \in \mathbb{N}$，考虑如下不等式

$$\operatorname{rank}(A^n) \leq \operatorname{rank}(A^{n-1}) \leq \cdots \leq \operatorname{rank}(A^2) \leq \operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank}(I_n) = n$$

若上面的不等式链全为严格不等号，即每个都是小于号，则 $\operatorname{rank}(A^n) = 0$，即 $A^n = O$，所以 $A^{n+1} = A^nA = O$，类似地可知 $A^{n+k} = A^{n+k-1}A = O$，所以 $0 = \operatorname{rank}(A^n) = \operatorname{rank}(A^{n+1}) = \cdots$

若上面的不等式链不全是严格不等号，即 $\exists k \in \{0, \cdots, n-1\}, \text{s.t. } \operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1})$，由 Frobenius 不等式 $\operatorname{rank}(ABC) \geq \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) - \operatorname{rank}(B)$，我们有

$$\operatorname{rank}(A^{k+2}) = \operatorname{rank}(AA^kA) \geq \operatorname{rank}(A^{k+1}) + \operatorname{rank}(A^{k+1}) - \operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1})$$

另一方面又因为 $\mathrm{rank}(A^{k+2}) \le \mathrm{rank}(A^{k+1})$，所以只能是 $\mathrm{rank}(A^{k+2}) = \mathrm{rank}(A^{k+1})$，类似推理可知 $\mathrm{rank}(A^k) = \mathrm{rank}(A^{k+1}) = \cdots$ □

习题 11（P168 T4）在数域 $\mathbb{F}$ 上所有二阶方阵构成的线性空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 中，求一组基 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$，使得对每个 j 都有 $A_j^2 = A_j$

解 可以取

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

容易验证 $A_j^2 = A_j, \forall j = 1,2,3,4$，下证它们线性无关，假设 $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_4, \mathrm{s.t.} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i A_i = 0$，即

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_4 \end{pmatrix} = O \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

所以它们线性无关，则它们构成 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 上的一组基 □

习题 12（P171 T4）在四维实向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的标准基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ 下，超球面的方程 $x_1^2 + \cdots + x_4^2 = 1$，设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,-1,-1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,1,-1), \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,-1,-1,-1)$，试求超球面在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的方程

解 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$，在 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$，首先 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ 到 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 的过渡矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

即 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)A$，因为 $\boldsymbol{\alpha} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{y}$，代入得

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\boldsymbol{x} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)A\boldsymbol{y} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y}$$

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 在超球面 $x_1^2 + \cdots + x_4^2 = 1$ 上，即 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T = 1$，将 $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y}$ 代入得

$$\boldsymbol{y}^T A^T A \boldsymbol{y} = 1 \overset{A^T A = 4I_4}{\Longrightarrow} y^T y = \frac{1}{4}$$

所以超球面在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的方程为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = \frac{1}{4}$ □

习题 13（P171 T5）在数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维行向量空间 $\mathbb{F}^n$ 中，给定 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{F}^n$，便可确定数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$，反之亦然。证明：$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的基的充要条件是方阵 A 可逆

证明 由于 $\dim(\mathbb{F}^n)=n$，所以

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}\text{是}\mathbb{F}^n\text{的基} &\overset{\dim(\mathbb{F}^n)=n}{\Longleftrightarrow} \{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}\text{线性无关} \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A)=n \\ &\Longleftrightarrow \det(A)\neq 0 \Longleftrightarrow A\text{可逆}\end{aligned}$$

□