

第十七周作业答案

涂嘉乐

2026 年 1 月 7 日

习题 1 (P347,T8) 设 n 阶正交方阵 O 的特征值不等于 -1 , 证明: 方阵 $I_n + O$ 可逆, 方阵 $K = (I_n - O)(I_n + O)^{-1}$ 是斜对称方阵, 且 $O = (I_n - K)(I_n + K)^{-1}$

证明 设 O 的特征值是 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则 $I_n + O$ 的特征值是 $\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_n + 1$, 由于 $\lambda_i \neq -1$, 所以

$$\det(I_n + O) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i + 1) \neq 0$$

即 $I_n + O$ 可逆; 因为

$$\begin{aligned} K^T &= [(I_n - O)(I_n + O)^{-1}]^T = [(I_n + O)^T]^{-1}(I_n - O)^T \\ &= (I_n + O^T)^{-1}(I_n - O^T) = [O^T(I_n + O)]^{-1}[O^T(O - I_n)] \\ &= (I_n + O)^{-1}OO^T(O - I_n) = (I_n + O)^{-1}(O - I_n) \\ &= (O - I_n)(I_n + O)^{-1} = -K \end{aligned}$$

其中第三行到第四行 $(I_n + O)^{-1}$ 和 $O - I_n$ 可交换是因为

$$\begin{aligned} (I_n + O)^{-1} \text{和} O - I_n \text{可交换} &\iff (I_n + O)^{-1}(O - I_n) = (O - I_n)(I_n + O)^{-1} \\ &\iff (O - I_n)(I_n + O) = (I_n + O)(O - I_n) \\ &\iff O^2 - I_n = O^2 - I_n \end{aligned}$$

所以 K 是斜对称方阵, 下面验证 $O = (I_n - K)(I_n + K)^{-1}$, 即 $O(I_n + K) = I_n - K$, 即验证 $OK + K = I_n - O$, 再次利用 $(I_n + O)^{-1}$ 和 $O - I_n$ 可交换得

$$\begin{aligned} OK + K &= (O + I_n)K = (O + I_n)(I_n - O)(I_n + O)^{-1} \\ &= (O + I_n)(I_n + O)^{-1}(I_n - O) = I_n - O \end{aligned}$$

故得证 □

评价 本题也可以通过课本 7.5 节定理 5 中所给的矩阵进行操作来证明

习题 2 (P353,T5) 设 n 维 Euclid 空间 V 的线性变换 \mathcal{A} 满足 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 且对任意 $\alpha \in V, \|\mathcal{A}(\alpha)\| \leq \|\alpha\|$, 证明: \mathcal{A} 是自伴的

证明 由 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ 知, \mathcal{A} 是投影变换 (此事在第十周作业第一题有记载), 因此存在 V 的子空间 U, W , s.t. $V = U \oplus W$, 对 $\forall v \in V$, 它有直和分解 $v = u + w$, 满足 $\mathcal{A}(v) = u$

Claim: $U^\perp = W$



Proof Of Claim : 注意到 $\dim U^\perp = \dim W = n - \dim U$, 因此我们只需证明 $W \subseteq U^\perp$, 假设不然, 则 $\exists w \in W, \text{s.t. } U$ 上的函数 $f_w(u) \stackrel{\text{def}}{=} \langle u, w \rangle$ 不恒为零, 则它的值域是 \mathbb{R} , 因为只要有一点 $\langle u, w \rangle \neq 0$, 将 u 替换为 tu , 可以由 $f_w(tu) = \langle tu, w \rangle = t \langle u, w \rangle$ 得到任意实数, 所以 $\exists u_0, \text{s.t. } f_w(u_0) = -\|w\|^2$, 即

$$\langle u_0, w \rangle = -\langle w, w \rangle \leq 0$$

考虑 $\alpha = u_0 + w$, 则 $\mathcal{A}(\alpha) = u_0$, 依题意有

$$\|u_0\|^2 \leq \|u_0 + w\|^2 = \|u_0\|^2 + 2\langle u_0, w \rangle + \langle w, w \rangle \implies \langle u_0, w \rangle \geq 0$$

结合上面两式可得 $-\langle w, w \rangle = \langle u_0, w \rangle = 0$, 即 $w = 0$, 但是此时 $f_w(u) = \langle u, w \rangle \equiv 0$, 这与 f_w 不恒为零的假设矛盾!

我们选取 U 的一组标准正交基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, W 的一组标准正交基 $\{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$, 由直和知 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 V 的一组标准正交基, 且由投影变换的定义知

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\alpha_i) = \alpha_i, & 1 \leq i \leq k \\ \mathcal{A}(\alpha_j) = 0, & k+1 \leq j \leq n \end{cases}$$

所以

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即 \mathcal{A} 在标准正交基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 下的方阵为对称阵, 即 \mathcal{A} 是自伴的

习题 3 (P353, T7) 设 \mathcal{A} 是 2 维 Euclid 空间 V 的斜自伴变换, 证明: 对 $\forall \alpha, \beta \in V$, 均有 $\langle \mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta) \rangle = (\det \mathcal{A}) \langle \alpha, \beta \rangle$

证明 若 \mathcal{A} 的特征值全为零, 则 \mathcal{A} 是零变换, 结论平凡成立; 否则 \mathcal{A} 的特征值为 $\pm ib, b \neq 0$, 由课本 P352 定理 9 知, 存在 V 的标准正交基 $\{\alpha_1, \alpha_2\}, \text{s.t.}$

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

设 $\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \mu_1 \alpha_2, \beta = \lambda_2 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2$, 则

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta) \rangle &= \langle \mathcal{A}(\lambda_1 \alpha_1 + \mu_1 \alpha_2), \mathcal{A}(\lambda_2 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2) \rangle \\ &= \langle -b\lambda_1 \alpha_2 + b\mu_1 \alpha_1, -b\lambda_2 \alpha_2 + b\mu_2 \alpha_1 \rangle \\ &= b^2 \lambda_1 \lambda_2 + b^2 \mu_1 \mu_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\det \mathcal{A}) \langle \alpha, \beta \rangle &= b^2 \langle \lambda_1 \alpha_1 + \mu_1 \alpha_2, \lambda_2 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 \rangle \\ &= b^2 (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2) \end{aligned}$$

故二者相等 □

为了解答 P365, T8, 我们需要 P365, T7 的结论, 此处我们一并证明

习题 4 (P365, T7) 设 $A \geq 0, B \geq 0$, 证明: $\det(A+B) \geq \det A + \det B$



证明 Case 1. A, B 均不可逆

此时 $RHS = 0$, 而对 $\forall x \in \mathbb{R}^n, x(A+B)x^T = xAx^T + xBx^T \geq 0$, 即 $A+B \geq 0 \implies \det(A+B) \geq 0 = \det A + \det B$

Case 2. A, B 至少有一者可逆

不妨设 B 可逆, 则 $B > 0$, 此时 $C \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{B}$ 存在 ($B = C^2$), 且 $C > 0$, 因为

$$\det(A+B) = \det(BB^{-1}A+B) = \det(B)\det(B^{-1}A+I_n)$$

因此我们只需证明

$$\det(I_n + B^{-1}A) \geq 1 + \det(B)^{-1} \det(A)$$

两边再同时乘以 $\det B$ 即可, 利用 $\det(I_n + XY) = \det(I_n + YX)$ 得

$$\det(I_n + B^{-1}A) = \det(I_n + C^{-1}C^{-1}A) = \det(I_n + C^{-1}AC^{-1})$$

因为 C^{-1} 正定 (见下面的注记), 且 C 也是对称方阵, 则对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$x(C^{-1}AC^{-1})x^T = (xC^{-1})A(xC^{-1})^T \geq 0$$

所以 $C^{-1}AC^{-1} \geq 0$, 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 $C^{-1}AC^{-1}$ 的所有特征值, 则它们均非负, 且 $1 + \lambda_1, \dots, 1 + \lambda_n$ 是 $I_n + C^{-1}AC^{-1}$ 的所有特征值, 故

$$\begin{aligned} \det(I_n + B^{-1}A) &= \det(I_n + C^{-1}AC^{-1}) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \\ &\geq 1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i = 1 + \det(C^{-1}AC^{-1}) = 1 + \det(B^{-1}A) \end{aligned}$$

两边同乘 $\det(B)$ 即得证 □

评价 S 正定 $\implies \exists P$ 可逆, s.t. $S = P^T P \implies S^{-1} = P^{-1}(P^T)^{-1}$, 取 $Q = (P^T)^{-1}$, 则 $S^{-1} = Q^T Q$, 故 S^{-1} 正定

习题 5 (P365, T8) 设 $S \geq 0$, 证明:

$$\det S \leq S \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & n \\ k+1 & k+2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

其中 $k = 1, 2, \dots, n$

证明 Case 1. 若 $\text{rank}(S) < n$

即 S 不可逆, 所以 $\det S = 0$, 由 S 半正定知, 它的所有主子式都是非负的, 即 $RHS \geq 0 = LHS$

Case 2. 若 $\text{rank}(S) = n$

此时 $S > 0$, 我们将 S 分块为

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{pmatrix}, \quad S_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

即证明 $\det S \leq \det S_{11} \det S_{22}$, 由 $S > 0$ 知, S 的 $1, 2, \dots, k$ 阶顺序主子式是正的, 所以 $S_{11} > 0$, 考虑



用 S_{11} 将 S_{12}, S_{12}^T 打掉, 即

$$\begin{pmatrix} I_k & \\ -S_{12}^T S_{11}^{-1} & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & -S_{11}^{-1} S_{12} \\ & I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & \\ & S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} \end{pmatrix}$$

设 $T = \begin{pmatrix} I_k & -S_{11}^{-1} S_{12} \\ & I_{n-k} \end{pmatrix}$, $\tilde{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & \\ & S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} \end{pmatrix}$, 则由 T 可逆知 $\tilde{S} = T^T S T$ 仍为正定方阵, 取 $x = (0, x_1), 0 \in \mathbb{R}^{1 \times k}, x_1 \in \mathbb{R}^{1 \times (n-k)}$, 由 \tilde{S} 正定知 $x \tilde{S} x^T > 0, \forall x_1 \neq 0$, 而

$$x \tilde{S} x^T = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & \\ & S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^T \end{pmatrix} = x_1 (S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}) x_1^T > 0$$

即 $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} > 0$, 由于 S_{11}^{-1} 也正定, 所以由定义可证 $S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}$ 半正定, 因此我们可以用上题的结论

$$\begin{aligned} \det(S_{22}) &= \det[(S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}) + (S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12})] \\ &\geq \det(S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}) + \det(S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}) \\ &\geq \det(S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}) \end{aligned}$$

第二行到第三行是因为 $\det(S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12})$ 行列式非负, 直接放掉, 所以

$$\begin{aligned} \det S &= \det \tilde{S} = \det S_{11} \det(S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}) \\ &\leq \det S_{11} \det S_{22} \end{aligned}$$

□

习题 6 (P365, T11) 设 S_1, S_2 是 n 阶实对称方阵, $S_1 \geq 0$, 且 $\det(S_1 + iS_2) = 0$, 其中 $i^2 = -1$, 证明: 存在非零的实向量 $x \in \mathbb{R}^n$, s.t. $x(S_1 + iS_2) = 0$

证明 由于 $\det(S_1 + iS_2) = 0$, 所以 $(S_1 + iS_2)y = 0$ 存在非零解, 即 $\exists y = u + vi \in \mathbb{C}^n, u, v \in \mathbb{R}^n$, s.t. $(S_1 + iS_2)y = 0$, 将 $y = u + vi$ 代入, 展开得

$$(S_1 u - S_2 v) + i(S_1 v + S_2 u) = 0 \implies \begin{cases} S_1 u - S_2 v = 0 \\ S_1 v + S_2 u = 0 \end{cases}$$

对第一式两边同时左乘 u^T ; 第二式两边同时左乘 v^T , 再将两式相加得

$$\begin{cases} u^T S_1 u - u^T S_2 v = 0 \\ v^T S_1 v + v^T S_2 u = 0 \end{cases} \xrightarrow{v^T S_2 v = v^T S_2 u} u^T S_1 u + v^T S_1 v = 0$$

即 $u^T S_1 u = v^T S_1 v = 0$

Claim: $S_1 u = S_1 v = 0$

Proof Of Claim: 由 $S_1 \geq 0$ 知, $C \stackrel{\text{def}}{=}} \sqrt{S_1} \geq 0$, 所以 $u^T C C u = \|Cu\|^2 = 0 \implies Cu = 0 \implies S_1 u = C C u = 0$, 同理 $S_1 v = 0$

由于 $y = u + vi$ 非零, 所以 u, v 不全为零, 不妨设 $u \neq 0$, 取 $x = u^T$, 则

$$u^T (S_1 + iS_2) = [(S_1 + iS_2)u]^T = 0$$

□



习题 7 (P375,T2) 设 $A > 0$, 且 B 为对称方阵, 证明: 多项式 $\det(\lambda A - B)$ 的根都是实数

证明 因为 $A > 0$, 所以存在可逆方阵 S , s.t. $A = S^T S$, 故

$$\begin{aligned}\det(\lambda A - B) &= \det(\lambda S^T S - S^T S(S^T S)^{-1} B) = \det(S^T S) \det(\lambda I_n - S^{-1}(S^T)^{-1} B) \\ &= \det(S^T S) \det(\lambda I_n - (S^{-1})^T B S^{-1})\end{aligned}$$

(第一行到第二行利用了 $\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA)$, 此处 $n = m$), 所以 $\det(\lambda A - B)$ 的就是 $\det(\lambda I_n - (S^{-1})^T B S^{-1})$ 的根, 即为 $(S^{-1})^T B S^{-1}$ 的特征值, 而它是对称方阵, 故特征值是实数 \square

习题 8 (P375,T13) 设 $0 \leq A \leq B$, 证明: $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$

证明 由半正定矩阵的等价命题, 我们只需证明 $\sqrt{B} - \sqrt{A}$ 的特征值均非负, 设 λ 是 $\sqrt{B} - \sqrt{A}$ 的特征值, α 是对应特征向量, 则

$$(\sqrt{B} - \sqrt{A})\alpha = \lambda\alpha$$

移项可得

$$\begin{cases} \sqrt{B}\alpha = (\sqrt{A} + \lambda I_n)\alpha & (1) \\ (\sqrt{B} - \lambda I_n)\alpha = \sqrt{A}\alpha & (2) \end{cases} \xrightarrow{\text{转置}} \begin{cases} \alpha^T \sqrt{B} = \alpha^T (\sqrt{A} + \lambda I_n) & (3) \\ \alpha^T (\sqrt{B} - \lambda I_n) = \alpha^T \sqrt{A} & (4) \end{cases}$$

(1)(3), (2)(4) 相乘得

$$\begin{cases} \alpha^T B \alpha = \alpha^T (\sqrt{A} + \lambda I_n)^2 \alpha = \alpha^T A \alpha + 2\lambda \alpha^T \sqrt{A} \alpha + \lambda^2 \alpha^T \alpha \\ \alpha^T A \alpha = \alpha^T (\sqrt{B} - \lambda I_n)^2 \alpha = \alpha^T B \alpha - 2\lambda \alpha^T \sqrt{B} \alpha + \lambda^2 \alpha^T \alpha \end{cases}$$

两式相减得

$$\alpha^T (B - A) \alpha = \lambda \alpha^T (\sqrt{A} + \sqrt{B}) \alpha$$

由于 $\sqrt{A} + \sqrt{B} \geq 0$, 我们如下讨论

Case 1. $\alpha^T (\sqrt{A} + \sqrt{B}) \alpha > 0$

由于 $B - A \geq 0$, 则 $LHS \geq 0$, 故 $\lambda \geq 0$

Case 2. $\alpha^T (\sqrt{A} + \sqrt{B}) \alpha = 0$

此时 $\alpha^T \sqrt{A} \alpha = \alpha^T \sqrt{B} \alpha = 0$, 同习题六 (P365,T11) 的断言可证 $\sqrt{A}\alpha = \sqrt{B}\alpha = 0$, 又因为 $(\sqrt{B} - \sqrt{A})\alpha = \lambda\alpha$, 所以 $\lambda\alpha = 0 \implies \lambda = 0$

综上 $\lambda \geq 0$, 即 $\sqrt{B} \geq \sqrt{A}$ \square

为了证明下题, 我们首先需要引理

引理 1 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶半正定实对称矩阵, 求证: 若 $a_{ii} = 0$, 则 A 的第 i 行、第 i 列的所有元素为零

证明 对 $\forall j \neq i$, 考虑 A 的第 i, j 行、列构成的主子式

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = a_{ii} a_{jj} - a_{ij}^2 = -a_{ij}^2$$

由 A 半正定知, 它非负, 所以只能是 $a_{ij} = 0$ \square



习题 9 (P375,T15) 证明: 两个 n 阶半正定对称方阵 S_1, S_2 可以同时相合于对角形, 即存在 n 阶可逆方阵 P , 使得 $P^T S_1 P, P^T S_2 P$ 都是对角方阵 (提示: 方阵 $S = S_1 + S_2$ 是半正定的)

证明 注意到 $S = S_1 + S_2$ 是半正定矩阵, 则 n 阶可逆矩阵 P s.t.

$$P^T(S_1 + S_2)P = \text{diag}(I_r, O)$$

设此时

$$P^T S_1 P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix} \quad P^T S_2 P = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^T & B_{22} \end{pmatrix}$$

则 $A_{22} + B_{22} = O$, 因为 $P^T S_1 P, P^T S_2 P$ 也是半正定矩阵, 所以它的第 ii 元非负, 特别地当 $r+1 \leq i \leq n$ 时, 因为 $(P^T S_1 P)_{ii} + (P^T S_2 P)_{ii}$ 是 $A_{22} + B_{22}$ 的对角元, 故为零, 由非负性知只能是 $(P^T S_1 P)_{ii} = (P^T S_2 P)_{ii} = 0, \forall r+1 \leq i \leq n$, 由引理知

$$P^T S_1 P = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad P^T S_2 P = \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

又因为 A_{11} 也是半正定阵, 所以 $\exists Q$ 正交阵, 使得

$$Q^T A_{11} Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \stackrel{\text{def}}{=} D$$

取 $Y = P \begin{pmatrix} Q \\ I_{n-r} \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} Y^T S_1 Y &= \begin{pmatrix} Q^T & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix} P^T S_1 P \begin{pmatrix} Q \\ I_{n-r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q^T & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I_{n-r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

另一方面, $P^T S_2 P = P^T(S_1 + S_2)P - P^T S_1 P = \text{diag}(I_r - A_{11}, O)$

$$\begin{aligned} Y^T S_2 Y &= \begin{pmatrix} Q^T & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix} P^T S_2 P \begin{pmatrix} Q \\ I_{n-r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q^T & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r - A_{11} & \\ & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I_{n-r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_r - D & \\ & O \end{pmatrix} = \text{diag}(1 - \lambda_1, \dots, 1 - \lambda_r, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

□

习题 10 (P375,T17) 设 $\mu \in \mathbb{R}, C$ 是 n 阶实方阵, $A = \mu I_n + iC$ 是 n 阶复正交方阵, 即 $AA^T = I_n = A^T A$, 其中 $i^2 = -1$, 证明 C 是斜对称的, 并且

(1) 当 $\text{rank}(C) < n$ 时, $A = \pm I_n$



(2) 当 $\text{rank}(C) = n$ 时, 存在 n 阶实正交方阵 O , 使得

$$O^T A O = \text{diag} \left[\begin{pmatrix} \mu & i\sqrt{\mu^2 - 1} \\ -i\sqrt{\mu^2 - 1} & \mu \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mu & i\sqrt{\mu^2 - 1} \\ -i\sqrt{\mu^2 - 1} & \mu \end{pmatrix} \right]$$

证明 将 $A^T A = I_n$ 代入得

$$(\mu I_n + iC^T)(\mu I_n + iC) = I_n$$

展开即

$$\mu^2 I_n - C^T C + i\mu(C^T + C) = I_n \implies \begin{cases} C^T C = (\mu^2 - 1)I_n \\ \mu(C^T + C) = O \end{cases}$$

若 $\mu = 0$, 则 $I_n = -C^T C$, 对比等式两边的迹, 左边为 n , 右边为 $-\sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{ij}^2 < 0$, 这显然不可能! 所以 $\mu \neq 0$, 故 $C^T + C = O$, C 是斜对称方阵

(1). 若 $\text{rank}(C) < n$, 由 $(\mu^2 - 1)I_n = C^T C$ 知, $\mu = \pm 1$, 否则左边秩为 n , 右边秩小于 n , 矛盾! 因此 $C^T C = O$, 进而 $C = O$, 故 $A = \mu I_n = \pm I_n$

(2). 若 $\text{rank}(C) = n$, 由 C 是可逆斜对称方阵, 可设它的特征值为 $\pm ia_1, \dots, \pm ia_s$, 且存在 $2s$ 阶正交方阵 O , 使得

$$C = O \text{diag} \left[\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & a_s \\ -a_s & 0 \end{pmatrix} \right] O^T$$

所以

$$C^T C = O \text{diag}(a_1^2, a_1^2, \dots, a_s^2, a_s^2) O^T = (\mu^2 - 1)I_n$$

所以 $\mu^2 - 1 = a_i^2, \forall 1 \leq i \leq s$, 因此 $a_i = \sqrt{\mu^2 - 1}, \forall i$, 代入 A 的表达式即得

$$O^T A O = \text{diag} \left[\begin{pmatrix} \mu & i\sqrt{\mu^2 - 1} \\ -i\sqrt{\mu^2 - 1} & \mu \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mu & i\sqrt{\mu^2 - 1} \\ -i\sqrt{\mu^2 - 1} & \mu \end{pmatrix} \right]$$

□

习题 11 (P375, T23) 设 A, B 为 n 阶实对称方阵, 且方阵 A 是正定的, 证明:

$$|\det(A + iB)| \geq \det A$$

证明 由 A 正定可设 $C = \sqrt{A}$, 即证明

$$|\det(C^2 + iB)| \geq \det C^2$$

而 $\det(C^2 + iB) = \det[C^2(I_n + i(C^{-1})(C^{-1})B)] = \det(C^2) \det(I_n + i(C^{-1})(C^{-1})B)$, 两边同时消去 $\det C^2$, 故只需证明

$$|\det(I_n + i(C^{-1})(C^{-1})B)| \geq 1$$

利用 $\det(I_n - XY) = \det(I_n - YX)$ 得

$$|\det(I_n + i(C^{-1})(C^{-1})B)| = |\det(I_n + i(C^{-1})B(C^{-1}))|$$



而 $S \stackrel{\text{def}}{=} (C^{-1})B(C^{-1})$ 也是对称阵, 它的特征值均为实数, 设为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则 $I_n + iS$ 的特征值为 $1 + i\lambda_1, \dots, 1 + i\lambda_n$, 故

$$\begin{aligned} |\det(I_n + i(C^{-1})(C^{-1})B)| &= |\det(I_n + iS)| = \left| \prod_{i=1}^n (1 + i\lambda_i) \right| \\ &= \prod_{i=1}^n |(1 + i\lambda_i)| = \prod_{i=1}^n \sqrt{1 + \lambda_i^2} \geq 1 \end{aligned}$$

□