第十六周作业答案

涂嘉乐

2025 年 12 月 31 日

习题 1 (P336,T2) 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的线性变换，$\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 可交换，$\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}^*$ 可交换，证明：$\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}^*$ 也可交换

证明 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 在 V 的一组标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 下的矩阵为 A,B，则 $\mathscr{A}^*$ 在这组基下的矩阵为 A^*，依题意有

$$AB=BA, AA^T=A^TA$$

下面我们证明 $AB^T=BA^T$，则 $\mathscr{A},\mathscr{B}^*$ 可交换（这实际上是课本 P340 的例 1），即证明 $AB^T-B^TA=0$，由先前做过的习题知 $\langle X,Y\rangle=\mathrm{tr}(XY^T)$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的内积，所以

(1) $\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)$
(2) $X=0 \iff \mathrm{tr}(XX^T)=0$
(3) $\mathrm{tr}(\cdot,\cdot)$ 具有双线性性

而

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\big((AB^T-B^TA)(AB^T-B^TA)^T\big) &= \mathrm{tr}\big((AB^T-B^TA)(BA^T-A^TB)\big)\\
&= \mathrm{tr}(AB^TBA^T)-\mathrm{tr}(AB^TA^TB)-\mathrm{tr}(B^TABA^T)+\mathrm{tr}(B^TAA^TB)\\
&= \mathrm{tr}(A^TAB^TB)-\mathrm{tr}(BAB^TA^T)-\mathrm{tr}(B^TBAA^T)+\mathrm{tr}(BB^TAA^T)\\
&= \mathrm{tr}(AA^TB^TB)-\mathrm{tr}(ABB^TA^T)-\mathrm{tr}(B^TBAA^T)+\mathrm{tr}(BB^TA^TA)\\
&= [\mathrm{tr}(AA^TB^TB)-\mathrm{tr}(B^TBAA^T)]+[\mathrm{tr}(BB^TA^TA)-\mathrm{tr}(BB^TA^TA)]\\
&= 0
\end{aligned}$$

所以 $AB^T-B^TA=0$，即 A,B^T 可交换，即 $\mathscr{A},\mathscr{B}^*$ 也可交换 □

习题 2 (P336,T3) 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的线性变换，证明：

$$\mathrm{Im}(\mathscr{A}^*)=\mathrm{Ker}(\mathscr{A})^\perp$$

证明 利用 $(U^\perp)^\perp=U$，我们只需证明 $\mathrm{Im}(\mathscr{A}^*)^\perp=\mathrm{Ker}(\mathscr{A})$，两边再同时取正交补即可

一方面，设 $\alpha\in\mathrm{Ker}(\mathscr{A})$，则对 $\forall\beta\overset{\text{def}}{=}\mathscr{A}^*(\gamma)\in\mathrm{Im}(\mathscr{A}^*)$，有

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,\mathscr{A}^*(\gamma)\rangle=\langle\mathscr{A}(\alpha),\gamma\rangle=\langle 0,\gamma\rangle=0,\quad\forall\beta\in\mathrm{Im}(\mathscr{A}^*)$$

所以 $\alpha\in\mathrm{Im}(\mathscr{A}^*)^\perp$，即 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})\subseteq\mathrm{Im}(\mathscr{A}^*)^\perp$

另一方面，设 $\alpha\in\mathrm{Im}(\mathscr{A}^*)^\perp$，则对 $\forall\gamma\in V,\beta\overset{\text{def}}{=}\mathscr{A}^*(\gamma)\in\mathrm{Im}(\mathscr{A}^*)$，有

$$0=\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,\mathscr{A}^*(\gamma)\rangle=\langle\mathscr{A}(\alpha),\gamma\rangle,\quad\forall\gamma\in V$$

特别地取 $\gamma=\mathscr{A}(\alpha)$，则 $0=\langle\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\alpha)\rangle\Longrightarrow\mathscr{A}(\alpha)=0$，即 $\alpha\in\mathrm{Ker}(\mathscr{A})$，即 $\mathrm{Im}(\mathscr{A}^*)^\perp\subseteq\mathrm{Ker}(\mathscr{A})$

至此我们证明了 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})=\mathrm{Im}(\mathscr{A}^*)^\perp$，两边同时取正交补得

$$\mathrm{Ker}(\mathscr{A})^\perp=\left(\mathrm{Im}(\mathscr{A}^*)^\perp\right)^\perp=\mathrm{Im}(\mathscr{A}^*)$$

□

习题 3 (P336,T5) 设 β,γ 是 n 维 Euclid 空间 V 的固定向量，证明：由 $\mathscr{A}(\alpha)=\langle\alpha,\beta\rangle\gamma$ 所定义的变换 $\mathscr{A}$ 是 V 的线性变换，其中 $\alpha\in V$，求 $\mathscr{A}$ 的伴随变换 $\mathscr{A}^*$

证明 对 $\forall x,y\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\lambda x+\mu y)&=\langle\lambda x+\mu y,\beta\rangle\gamma\\&=\lambda\langle x,\beta\rangle\gamma+\mu\langle y,\beta\rangle\gamma\\&=\lambda\mathscr{A}(x)+\mu\mathscr{A}(y)\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}$ 是线性变换，对 $\forall x,y\in V$

$$\begin{aligned}\langle\mathscr{A}(x),y\rangle=\big\langle\langle x,\beta\rangle\gamma,y\big\rangle&=\langle x,\beta\rangle\langle\gamma,y\rangle\\&=\big\langle x,\langle\gamma,y\rangle\beta\big\rangle\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}^*(y)=\langle\gamma,y\rangle\beta$（同上也可以证明它是线性变换） □

习题 4 (P336,T7) 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 是所有 n 阶实方阵的集合连同内积 $\langle X,Y\rangle=\mathrm{tr}(XY^T)$ 构成的 Euclid 空间，其中 $X,Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$，设 P 是固定 n 阶可逆方阵，由 $\mathscr{A}_P(X)=P^{-1}XP$ 所定义的变换 $\mathscr{A}_P$ 显然是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的线性变换，其中 $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$，求 $\mathscr{A}_P$ 的伴随变换 $\mathscr{A}_P^*$

解 对 $\forall X,Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\begin{aligned}\langle\mathscr{A}_P(X),Y\rangle=\big\langle P^{-1}XP,Y\big\rangle&=\mathrm{tr}(P^{-1}XPY^T)\\&=\mathrm{tr}(XPY^TP^{-1})=\big\langle X,(P^{-1})^TYP^T\big\rangle\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}_P^*(Y)=(P^T)^{-1}YP^T$ □

习题 5 (P342,T3) 方阵 A 与 A^TA 可交换，方阵 A 是否一定是规范的

证明 依题意有 $AA^TA=A^TAA$，要证明 A 是规范方阵，即证 $AA^T-A^TA=0$，还是同第一题一样，考虑计算 $\mathrm{tr}\big((AA^T-A^TA)(AA^T-A^TA)^T\big)$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\big((AA^T-A^TA)(AA^T-A^TA)^T\big)&=\mathrm{tr}\big((AA^T-A^TA)(AA^T-A^TA)\big)\\&=\mathrm{tr}(AA^TAA^T)-\mathrm{tr}(AA^TA^TA)-\mathrm{tr}(A^TAAA^T)+\mathrm{tr}(A^TAA^TA)\\&=\mathrm{tr}(A^TAAA^T)-\mathrm{tr}(AAA^TA^T)-\mathrm{tr}(AAA^TA^T)+\mathrm{tr}(A^TA^TAA)\\&=[\mathrm{tr}(AAA^TA^T)-\mathrm{tr}(AAA^TA^T)]+[\mathrm{tr}(A^TA^TAA)-\mathrm{tr}(AAA^TA^T)]\\&=0\end{aligned}$$

所以 $AA^T=A^TA$，故 A 是规范方阵 □

习题 6 (P342,T5) 证明：n 阶实方阵 A 为规范方阵 $\iff \exists f(\lambda)\in\mathbb{R}[\lambda]$, s.t. $A^T=f(A)$

证明 ($\Longleftarrow$) : 若 $A^T=f(A)$，则

$$AA^T=Af(A)=f(A)A=A^TA$$

($\Longrightarrow$) : 以下我们给出具体构造，将 A 看作复方阵，由 A 是规范方阵知，它酉相似于对角阵（课本 P392 定理 4)，即存在 n 阶酉方阵 U, s.t.

$$A=U^*\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t I_{n_t}\end{pmatrix}U \overset{\text{def}}{=} U^*DU$$

因为 $D^*=\operatorname{diag}(\overline{\lambda}_1 I_{n_1},\cdots,\overline{\lambda}_t I_{n_t})$，考虑

$$f_i(\lambda)=\prod_{j\neq i}\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j},\quad f(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda}_i f_i(\lambda)=\sum_{i=1}^{t}\overline{\lambda}_i\prod_{j\neq i}\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}$$

则 $f_i(\lambda_j)=\delta_{ij}, i\neq j\Longrightarrow f(\lambda_i)=\overline{\lambda}_i$，进而

$$\begin{aligned} f(A)&=f(U^*DU)=U^*f(D)U\\ &=U^*\begin{pmatrix}f(\lambda_1)I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_t)I_{n_t}\end{pmatrix}U\\ &=U^*\begin{pmatrix}\overline{\lambda}_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda}_t I_{n_t}\end{pmatrix}U\\ &=U^*D^*U=A^*\end{aligned}$$

设 $f(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\lambda^i$，设 $a_i=b_i+cd_i$，考虑 $g(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{n}b_i\lambda^i, h(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_i\lambda^i$，则 $f(\lambda)=g(\lambda)+ih(\lambda)$，故

$$f(A)=g(A)+ih(A)$$

但是 A 是实方阵，对比实部可得 $f(A)=g(A)$，所以取 $g(\lambda)\in\mathbb{R}[\lambda]$，则 $A^T=f(A)=g(A)$ □

习题 7 (P342,T6) 设 $\alpha=\beta+i\gamma$ 是实规范方阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量，其中 β,γ 是实向量，证明：

(1) α 是 A^T 的属于特征值 $\overline{\lambda}$ 的特征向量

(2) 当 $\lambda\notin\mathbb{R}$ 时，β,γ 正交，且范数相等

证明 (1). 定义 n 维 Euclid 空间上的线性变换

$$\begin{aligned}\mathscr{A}:V&\longrightarrow V\\ x&\longmapsto Ax\end{aligned}$$

则 $\mathscr{A}$ 在 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 下的矩阵为 A（其中 $e_1=(1,0,\cdots,0)$，其余类似），所以 $\mathscr{A}$ 是规范变换，且 $A^*(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)A^T$，即 $\mathscr{A}^*x=A^Tx$

依题意有 $\mathscr{A}\alpha = A\alpha = \lambda\alpha$，考虑上题中的 $A^T = f(A)$，则

$$A^T\alpha = f(A)\alpha = f(\lambda)\alpha \xlongequal{f(\lambda)=\overline{\lambda}} \overline{\lambda}\alpha$$

(2). 设 $\lambda = x + iy, y \neq 0$，则将 $\alpha = \beta + i\gamma, \lambda = x + iy$ 代入 $A\alpha = \lambda\alpha, A^T\alpha$ 可得

$$\begin{aligned} A(\beta + i\gamma) &= (x + iy)(\beta + i\gamma) & \qquad A^T(\beta + i\gamma) &= (x - iy)(\beta + i\gamma) \\ &= (x\beta - y\gamma) + i(x\gamma + y\beta) & &= (x\beta + y\gamma) + i(x\gamma - y\beta) \end{aligned}$$

对比实部和虚部可得

$$\begin{cases} A\beta = x\beta - y\gamma \\ A\gamma = x\gamma + y\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} A^T\beta = x\beta + y\gamma \\ A^T\gamma = x\gamma - y\beta \end{cases}$$

考虑 $B = \frac{1}{y}(A - xI)$，显然 B 也是规范方阵，定义线性变换

$$\begin{aligned} \mathscr{B} : V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto Bx \end{aligned}$$

则它是规范变换，且 $\mathscr{B}^*x = B^Tx$，又因为

$$\begin{cases} B\beta = \frac{1}{y}(A - xI)\beta = -\gamma \\ B\gamma = \frac{1}{y}(A - xI)\gamma = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} B^T\beta = \frac{1}{y}(A^T - xI)\beta = \gamma \\ B^T\gamma = \frac{1}{y}(A^T - xI)\gamma = -\beta \end{cases}$$

由 $\mathscr{B}$ 是规范变换知

$$\begin{aligned} \langle\gamma, \beta\rangle &= \left\langle\gamma, -B^T(\gamma)\right\rangle = -\langle\gamma, \mathscr{B}^*(\gamma)\rangle \\ &= -\langle\mathscr{B}(\gamma), \gamma\rangle = -\langle\beta, \gamma\rangle \end{aligned}$$

故 β, γ 正交，此外

$$||\beta||^2 = \langle\beta, \beta\rangle = \langle\mathscr{B}(\gamma), \beta\rangle = \langle\gamma, \mathscr{B}^*(\beta)\rangle = \left\langle\gamma, B^T\beta\right\rangle = \langle\gamma, \gamma\rangle = ||\gamma||^2$$

即 $||\beta|| = ||\gamma||$ □

习题 8 (P347,T2) 设 α, β 是 n 维 Euclid 空间 V 的向量，$||\alpha|| = ||\beta||$，证明：存在正交变换 $\mathscr{A}$, s.t. $\mathscr{A}(\alpha) = \beta$

证明 若 $\alpha = \beta = 0$，则命题平凡成立，以下假设 α, β 不为零

Case 1. 若 α, β 线性相关

则由 $||\alpha|| = ||\beta||$ 知，$\alpha = \pm\beta$，我们取 $\mathscr{A} = \mathscr{I}$ 或 $\mathscr{A} : x \mapsto -x$ 即可

Case 2. 若 α, β 线性无关

取 $e_1 = \frac{\alpha}{||\alpha||}, f_1 = \frac{\beta}{||\beta||}$，将 e_1 扩充为 V 的一组标准正交基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，将 f_1 扩充为 V 的一组标准正交基 $\{f_1, \cdots, f_n\}$，定义线性变换

$$\mathscr{A}(e_1, \cdots, e_n) = (f_1, \cdots, f_n)$$

则 $\mathscr{A}$ 把标准正交基映为标准正交基，故 $\mathscr{A}$ 是正交变换，且

$$\mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{A}(||\alpha||e_1) = ||\alpha||\mathscr{A}(e_1) = ||\alpha||f_1 = \beta$$

□

习题 9 (P347,T3) 设 α_1,α_2 与 β_1,β_2 是 n 维 Euclid 空间 V 的两对向量，$||\alpha_i||=||\beta_i||, i=1,2$，且向量 α_1,α_2 的夹角等于向量 β_1,β_2 的夹角，求证：存在正交变换 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}(\alpha_1)=\beta_1,\mathscr{A}(\alpha_2)=\beta_2$

证明 以下假设 α_i,β_i 均不为零，且 α_1,α_2 线性无关，否则退化到上题的情形，命题平凡成立

由 α_1,α_2 线性无关以及向量 α_1,α_2 的夹角等于向量 β_1,β_2 的夹角知，β_1,β_2 也线性无关，我们对 $\{\alpha_1,\alpha_2\},\{\beta_1,\beta_2\}$ 进行 Schmidt 正交化

$$\begin{cases}\gamma_1=\alpha_1\\ \gamma_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\gamma_1\rangle}{\langle\gamma_1,\gamma_1\rangle}\gamma_1\end{cases},\quad\begin{cases}e_1=\frac{\gamma_1}{||\gamma_1||}\\ e_2=\frac{\gamma_2}{||\gamma_2||}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\delta_1=\beta_1\\ \delta_2=\beta_2-\frac{\langle\beta_2,\delta_1\rangle}{\langle\delta_1,\delta_1\rangle}\delta_1\end{cases},\quad\begin{cases}f_1=\frac{\delta_1}{||\delta_1||}\\ f_2=\frac{\delta_2}{||\delta_2||}\end{cases}$$

则我们可以将 $\{e_1,e_2\},\{f_1,f_2\}$ 分别扩充为 V 的两组标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_n\},\{f_1,\cdots,f_n\}$，定义线性变换

$$\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(f_1,\cdots,f_n)$$

则 $\mathscr{A}$ 把标准正交基映为标准正交基，故 $\mathscr{A}$ 是正交变换，且

$$\mathscr{A}(\alpha_1)=\mathscr{A}(||\alpha_1||e_1)=||\beta_1||\mathscr{A}(e_1)=||\beta_1||f_1=\beta_1$$

由向量 α_1,α_2 的夹角等于向量 β_1,β_2 的夹角知，$||\gamma_2||=||\delta_2||$，所以

$$\mathscr{A}(\alpha_2)=\mathscr{A}\left(\gamma_2+\frac{\langle\alpha_2,\gamma_1\rangle}{\langle\gamma_1,\gamma_1\rangle}\gamma_1\right)=\mathscr{A}(||\gamma_2||e_2)+\frac{\langle\alpha_2,\gamma_1\rangle}{\langle\gamma_1,\gamma_1\rangle}\mathscr{A}(||\gamma_1||e_1)$$

$$=||\gamma_2||f_2+\frac{\langle\alpha_2,\gamma_1\rangle}{\langle\gamma_1,\gamma_1\rangle}||\gamma_1||f_1=||\delta_2||f_2+\frac{\langle\beta_2,\delta_1\rangle}{\langle\delta_1,\delta_1\rangle}\delta_1=\beta_2$$

□

习题 10 (P347,T4) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的两组向量，证明：存在满足 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\beta_i, 1\le i\le k$ 的正交变换 $\mathscr{A}$ 的充分必要条件是这两组向量的 Gram 方阵相等

证明 $(\Longrightarrow)$：由正交变换保内积知 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\langle\beta_i,\beta_j\rangle,\forall 1\le i,j\le k$，即它们的 Gram 方阵的对应元素相等，故 Gram 方阵相等

$(\Longleftarrow)$：由对应 Gram 方阵相等知，$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\langle\beta_i,\beta_j\rangle,\forall 1\le i,j\le k$，我们不妨假设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，否则可以退化为 $k-1$ 的情形，用数学归纳法即证，则此时由 P320,T6 知 $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 也线性无关

我们通过 Schmidt 正交化将 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$ 化为 $\{\xi_1,\cdots,\xi_k\}$，再归一得到 $\{e_1,\cdots,e_k\}$，对 $\{\beta_1,\cdots,\beta_k\}$ 同理进行 Schmidt 正交化得到 $\{\eta_1,\cdots,\eta_k\}$，再归一得到 $\{f_1,\cdots,f_k\}$，再将 $\{e_1,\cdots,e_k\},\{f_1,\cdots,f_k\}$ 分别扩张为 V 的两组标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_n\},\{f_1,\cdots,f_n\}$，定义线性变换

$$\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(f_1,\cdots,f_n)$$

则 $\mathscr{A}$ 把标准正交基映为标准正交基，故 $\mathscr{A}$ 是正交变换，回顾 Schmidt 正交化的过程，因为

$$\begin{cases}\xi_k = \alpha_k - \frac{\langle \alpha_k, \xi_{k-1}\rangle}{\langle \xi_{k-1}, \xi_{k-1}\rangle}\xi_{k-1} - \frac{\langle \alpha_k, \xi_{k-2}\rangle}{\langle \xi_{k-2}, \xi_{k-2}\rangle}\xi_{k-2} - \cdots - \frac{\langle \alpha_k, \xi_1\rangle}{\langle \xi_1, \xi_1\rangle}\xi_1 \\ \eta_k = \beta_k - \frac{\langle \alpha_k, \eta_{k-1}\rangle}{\langle \eta_{k-1}, \eta_{k-1}\rangle}\xi_{k-1} - \frac{\langle \alpha_k, \eta_{k-2}\rangle}{\langle \eta_{k-2}, \eta_{k-2}\rangle}\eta_{k-2} - \cdots - \frac{\langle \alpha_k, \eta_1\rangle}{\langle \eta_1, \eta_1\rangle}\eta_1\end{cases}$$

因为在计算 ξ_i, η_i 的模长时，出现的 $\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle$ 可以用等号等于 $\langle \beta_i, \beta_j\rangle$，所以不难看出 $||\xi_i|| = ||\eta_i||$，进而可以得到 $\mathscr{A}(\alpha_i) = \beta_i$ □