第十五周作业答案

涂嘉乐

2025 年 12 月 31 日

> **习题 1** (P320,T1) 设 $\mathbb{R}^2$ 是所有 2 维实行向量的集合连同标准内积构成的 2 维 Euclid 空间, $A=\begin{pmatrix}a_{ij}\end{pmatrix}$ 是 2 阶实对称方阵，定义 $f_A(x,y)=xAy^T$，其中 $x,y\in\mathbb{R}^2$，证明：二元实函数 $f_A(x,y)$ 是内积 $\Longleftrightarrow a_{11}>0,a_{22}>0,\det(A)>0$

证明 $(\Longrightarrow)$: 取 $e_1=(1,0),e_2=(0,1)$，由 $f_A(x,y)$ 是内积知

$$\begin{cases} f_A(e_1,e_1)=a_{11}>0 \\ f_A(e_2,e_2)=a_{22}>0 \end{cases}$$

再取 $x=(t,1),t\in\mathbb{R}$，则

$$f_A(x,x)=\begin{pmatrix}t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ 1\end{pmatrix}=a_{11}t^2+(a_{12}+a_{21})t+a_{22}>0,\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

进而关于 t 的二次函数判别式为负，即

$$(a_{12}+a_{21})^2-4a_{11}a_{22}<0\xRightarrow{a_{12}=a_{21}}a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$$

即 $\det(A)>0$

$(\Longleftarrow)$: 容易验证 f_A 满足对称性（对一个数取转置仍为这个数）和双线性性（矩阵乘法的双线性性），因此只需验证 $f_A(x,y)$ 满足非负性，假设存在 $0\neq x=(x_1,x_2)$, s.t. $f_A(x,x)\le 0$，由 $x\neq 0$，不妨设 $x_2\neq 0$，由线性性可不妨设 $x=(t,1)$，则

$$f_A(x,x)=a_{11}t^2+(a_{12}+a_{21})t+a_{22}\le 0$$

由 $a_{11}>0$ 知，该二次函数的判别式非负，即

$$(a_{12}+a_{21})^2-4a_{11}a_{22}\ge 0\xRightarrow{a_{12}=a_{21}}\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\le 0$$

这与 $\det(A)>0$ 矛盾！ $\square$

> **习题 2** (P320,T2) $\mathbb{R}^2$ 的意义同上题，设 $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^2$ 的标准内积记为
>
> $$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2$$
>
> 定义 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 如下：对于 $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$，令 $\mathscr{A}(x)=(-x_2,x_1)$，构造 $\mathbb{R}^2$ 的一个内积 $[x,y]$，使得对任意 $x\in\mathbb{R}^2$，均有 $[x,\mathscr{A}(x)]=0$

证明 集中注意力后发现：我们只需取 $\mathbb{R}^2$ 上的标准内积即可，因为

$$\langle (x_1,x_2),(-x_2,x_1)\rangle = -x_1x_2+x_1x_2=0, \quad \forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$$

$\square$

习题 3 (P320,T5) 证明：
(1) n 维 Euclid 空间 V 中向量 α,β 正交的充要条件是

$$||\alpha+\beta||^2=||\alpha||^2+||\beta||^2$$

(2) 设 $\alpha,\beta\in V, ||\alpha||=||\beta||$，则向量 $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 正交
(3)（平行四边形法则）设 $\alpha,\beta\in V$，则

$$||\alpha+\beta||^2+||\alpha-\beta||^2=2||\alpha||^2+2||\beta||^2$$

证明 (1). 因为

$$\begin{aligned}||\alpha+\beta||^2&=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle\\&=\langle\alpha,\alpha\rangle+2\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\beta\rangle\\&=||\alpha||^2+2\langle\alpha,\beta\rangle+||\beta||^2\end{aligned}$$

所以 α,β 正交 $\iff \langle\alpha,\beta\rangle=0 \iff ||\alpha+\beta||^2=||\alpha||^2+||\beta||^2$

(3) 因为

$$\begin{aligned}||\alpha+\beta||^2+||\alpha-\beta||^2&=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle+\langle\alpha-\beta,\alpha-\beta\rangle\\&=[\langle\alpha,\alpha\rangle+2\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\beta\rangle]+[\langle\alpha,\alpha\rangle-2\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\beta\rangle]\\&=2\langle\alpha,\alpha\rangle+2\langle\beta,\beta\rangle=2||\alpha||^2+2||\beta||^2\end{aligned}$$

(2) 因为

$$\begin{cases}||(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)||^2=||2\alpha||^2=4||\alpha||^2=2||\alpha||^2+2||\beta||^2\\||\alpha+\beta||^2+||\alpha-\beta||^2=2||\alpha||^2+2||\beta||^2\end{cases}$$

由 (1) 知 $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 正交 $\square$

习题 4 (P320,T6) 证明：n 维 Euclid 空间 V 中的向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是，它们的 Gram 方阵 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\big(\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\big)_{n\times n}$ 可逆，其中 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 是 V 的内积

证明 $(\Longleftarrow)$: 若 $\big(\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\big)_{n\times n}$ 可逆，则它的列向量组线性无关，即

$$\xi_1\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle\\\langle\alpha_2,\alpha_1\rangle\\\vdots\\\langle\alpha_n,\alpha_1\rangle\end{pmatrix},\cdots,\xi_n\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\\langle\alpha_2,\alpha_n\rangle\\\vdots\\\langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{pmatrix}$$

设 $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \text{s.t.} \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i = 0$，则

$$\left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j, \alpha_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle, \quad \forall 1 \le i \le n$$

因此

$$\lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_n \xi_n = \lambda_1 \begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_n \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_n \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j \langle \alpha_j, \alpha_1 \rangle \\ \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j \langle \alpha_j, \alpha_2 \rangle \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j \langle \alpha_j, \alpha_n \rangle \end{pmatrix} = 0$$

由 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 线性无关知，$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$，故 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关

($\Longrightarrow$)：假设 $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \text{s.t.} \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \xi_i = 0$，则

$$0 = \lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_n \xi_n = \lambda_1 \begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_n \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_n \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j \langle \alpha_j, \alpha_1 \rangle \\ \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j \langle \alpha_j, \alpha_2 \rangle \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j \langle \alpha_j, \alpha_n \rangle \end{pmatrix}$$

进而对 $\forall 1 \le i \le n$ 有

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = 0 \Longrightarrow \left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j, \alpha_i \right\rangle = 0$$

所以

$$\left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j, \alpha_i \right\rangle = 0$$

由内积的非负性知 $\sum\limits_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j = 0$，再由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关知 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$，进而 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 线性无关，故 $\left(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \right)_{n \times n}$ 可逆 □

习题 5 (P327,T1,Bessel 不等式) 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一组两两正交的单位向量，$\alpha \in V$，并记 $a_i = \langle \alpha, \alpha_i \rangle, i = 1, 2, \cdots, k$，证明

$$\sum_{i=1}^k |a_i|^2 \le ||\alpha||^2$$

并且向量 $\beta = \alpha - \sum\limits_{i=1}^k a_i \alpha_i$ 与每个向量 $\alpha_i, i = 1, 2, \cdots, k$ 都正交

证明 我们将 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 扩充为 V 的一组单位正交基（先扩充为一组基，再 Schmidt 正交化），设 α 在这组基下可表示为 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$ 则 $\lambda_i = \langle \alpha, \alpha_i \rangle$，即

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \alpha_i \rangle \alpha_i$$

所以

$$||\alpha||^2=\sum_{i=1}^{n}|\langle\alpha,\alpha_i\rangle|^2\geq\sum_{i=1}^{k}|\langle\alpha,\alpha_i\rangle|^2=\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2$$

$$\left\langle\alpha-\sum_{i=1}^{k}a_i\alpha_i,\alpha_i\right\rangle=\langle\alpha,\alpha_i\rangle-a_i=0\Longrightarrow\beta\perp\alpha_i,\forall 1\leq i\leq k$$

□

习题 6 (P327,T2) 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一组向量，证明下面命题等价

(1) $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 V 的标准正交基

(2) (Parseval 等式) 对 $\forall\alpha,\beta\in V$

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle\alpha,\alpha_i\rangle\langle\alpha_i,\beta\rangle$$

(3) 对 $\forall\alpha\in V$

$$||\alpha||^2=\sum_{i=1}^{n}|\langle\alpha,\alpha_i\rangle|^2$$

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2)：由 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 V 的标准正交基，同上题推理可知

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\langle\alpha,\alpha_i\rangle\alpha_i,\quad\beta=\sum_{i=1}^{n}\langle\beta,\alpha_i\rangle\alpha_i$$

因此

$$\begin{aligned}\langle\alpha,\beta\rangle&=\left\langle\sum_{i=1}^{n}\langle\alpha,\alpha_i\rangle\alpha_i,\sum_{j=1}^{n}\langle\beta,\alpha_j\rangle\alpha_j\right\rangle\\&=\sum_{i,j=1}^{n}\langle\alpha,\alpha_i\rangle\langle\alpha_j,\beta\rangle\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\\&=\sum_{i,j=1}^{n}\langle\alpha,\alpha_i\rangle\langle\alpha_j,\beta\rangle\delta_{ij}\\&=\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle\alpha,\alpha_i\rangle\langle\alpha_i,\beta\rangle\end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ (3)：取 $\beta=\alpha$，则

$$||\alpha||^2=\langle\alpha,\alpha\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle\alpha,\alpha_i\rangle\langle\alpha_i,\alpha\rangle=\sum_{i=1}^{n}|\langle\alpha,\alpha_i\rangle|^2$$

(3) $\Longrightarrow$ (1)：取 $\alpha=\alpha_j$，则

$$||\alpha_j||^2=\sum_{i=1}^{n}|\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle|^2=||\alpha_j||^2+\sum_{i\neq j}|\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle|^2$$

进而 $\forall j\neq i,\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=0$，我们需要排除某个 α_i 为零的情况，不妨设 $\alpha_1=0$，则 $\alpha_i\neq 0,\forall 2\leq i\leq n$，此时我们**断言**：$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关

Proof Of Claim : 设 $\sum\limits_{i=2}^{n}\lambda_i\alpha_i=0$，两边同时与 $\alpha_j, 2\le j\le n$ 作内积可得

$$0=\left\langle \alpha_j,\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\alpha_i\right\rangle=\lambda_j||\alpha_j||^2\Longrightarrow\lambda_j=0$$

进而它们线性无关，故我们可以将 $\{\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 扩充为 V 的一组正交基 $\{e_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，则

$$||e_1||^2=\sum_{i=1}^{n}|\langle e_1,\alpha_i\rangle|^2=|\langle e_1,0\rangle|^2+\sum_{i=2}^{n}|\langle e_1,\alpha_i\rangle|^2=0$$

这与 e_1 是一组基中的元素矛盾！因此 $\alpha_1\neq 0$，即 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 全不为零，且两两正交，重复刚才的断言可以证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，因此它为 V 的一组正交基，接下来只需证明它们的模长为 1

由它们是一组基知，对 $\forall\alpha\in V$，可设 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i\alpha_i$，则 $\langle\alpha,\alpha_i\rangle=\mu_i||\alpha_i||^2$，故利用 (2) 的条件以及直接展开可得

$$\begin{cases}||\alpha||^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i^2||\alpha_i||^2\\ ||\alpha||^2=\sum\limits_{i=1}^{n}|\langle\alpha,\alpha_i\rangle|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i^2||\alpha_i||^4\end{cases}$$

我们取 $\mu_j=0,\forall j\neq i,\mu_i=t,t\neq 0$，即 $\alpha=t\alpha_i$，则

$$t^2||\alpha_i||^2=t^2||\alpha_i||^4\Longrightarrow||\alpha_i||=1$$

所以 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 V 的标准正交基 □

为了证明 P327T6，我们首先证明 P327T5

> **习题 7** (P327,T5) 设 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一组标准正交基，向量 $\alpha_j\in V$ 在这组基下的坐标为 $x_j=(x_{j1},\cdots,x_{jn})^T, j=1,2,\cdots,n$，向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 的 Gram 方阵为 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\big(\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\big)_{n\times n}$，证明：
>
> $$\det\big(G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\big)=\det\big(x_{ij}\big)^2$$

证明 依题意有

$$\alpha_i=\xi_1x_{j1}+\cdots+\xi_nx_{jn}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)x_j$$

记 $X=\big(x_{ij}\big)_{n\times n}$，则

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}x_{11}&\cdots&x_{n1}\\ \vdots&&\vdots\\ x_{1n}&\cdots&x_{nn}\end{pmatrix}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)X^T$$

因为 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是一组标准正交基，所以它的 Gram 矩阵是单位阵，由课本 P315 定理 3 知

$$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(X^T)^TG(\xi_1,\cdots,\xi_n)X^T=XX^T$$

两边同时取行列式即证 □

习题 8 (P327,T6) 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一组基，对 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 施行 Gram-Schmidt 正交化得到的正交向量组记为 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，证明：

$$||\beta_j||^2=\frac{\deg G(\alpha_1,\cdots,\alpha_j)}{\det G(\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1})},\quad j=1,2,\cdots,n$$

其中约定零个向量的 Gram 方阵的行列式为 1

证明 我们有

$$\beta_k=\alpha_k-\frac{\langle\alpha_k,\beta_{k-1}\rangle}{\langle\beta_{k-1},\beta_{k-1}\rangle}\beta_{k-1}-\frac{\langle\alpha_k,\beta_{k-2}\rangle}{\langle\beta_{k-2},\beta_{k-2}\rangle}\beta_{k-2}-\cdots-\frac{\langle\alpha_k,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$$

写成矩阵形式即

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle} & \cdots & \frac{\langle\alpha_n,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\\ 0 & 1 & \cdots & \frac{\langle\alpha_k,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

将 β_i 进行单位化得到 $\xi_i=\frac{\beta_i}{||\beta_i||}$，则 $\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ 是 V 的标准正交基，且

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}||\beta_1|| & & & \\ & ||\beta_2|| & & \\ & & \ddots & \\ & & & ||\beta_n||\end{pmatrix}$$

代入上式即得

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}||\beta_1|| & & & \\ & ||\beta_2|| & & \\ & & \ddots & \\ & & & ||\beta_n||\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle} & \cdots & \frac{\langle\alpha_n,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\\ 0 & 1 & \cdots & \frac{\langle\alpha_k,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}||\beta_1|| & * & \cdots & *\\ & ||\beta_2|| & \cdots & *\\ & & \ddots & *\\ & & & ||\beta_n||\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $*$ 表示不重要的项，所以对于 $\forall 1\le j\le n$ 有

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}||\beta_1|| & * & \cdots & *\\ & ||\beta_2|| & \cdots & *\\ & & \ddots & *\\ & & & ||\beta_j||\end{pmatrix}\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_j\end{pmatrix}Y_j$$

利用 T5 的结论，由于 $\{\xi_1,\cdots,\xi_r\}$ 的“Gram 矩阵”为 I_r，则我们有

$$\frac{\det G(\alpha_1,\cdots,\alpha_j)}{\det G(\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1})}=\frac{\det^2 Y_j}{\det^2 Y_{j-1}}=\frac{\prod\limits_{i=1}^{j}||\beta_i||^2}{\prod\limits_{i=1}^{j-1}||\beta_i||^2}=||\beta_j||^2$$

□

习题 9 (P327,T7) 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一组向量，证明：

$$\det G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\le ||\alpha_1||^2||\alpha_2||^2\cdots||\alpha_n||^2$$

等号成立当且仅当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 两两正交或其中含有零向量；由此证明，如果 $A=\left(a_{ij}\right)$ 是 n 阶实方阵，那么

$$(\det A)^2\le\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$$

证明 我们首先排除两种平凡的情形：

Case 1. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中含有零向量，不妨设 $\alpha_1=0$，则 $\langle\alpha_1,\alpha_i\rangle=0,\forall 1\le i\le n$，所以 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的第一行全为零，故它的行列式为零，不等式平凡成立

Case 2. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，则由习题 4(P320,T6)知 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 不可逆，故行列式为零，不等式平凡成立

接下来可设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，因此它是 V 的一组基，我们对它进行 Gram-Schmidt 正交化后得到正交向量组 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，即

$$\beta_k=\alpha_k-\frac{\langle\alpha_k,\beta_{k-1}\rangle}{\langle\beta_{k-1},\beta_{k-1}\rangle}\beta_{k-1}-\frac{\langle\alpha_k,\beta_{k-2}\rangle}{\langle\beta_{k-2},\beta_{k-2}\rangle}\beta_{k-2}-\cdots-\frac{\langle\alpha_k,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1 \tag{1}$$

（特别地有 $\beta_1=\alpha_1$）所以

$$\begin{aligned}||\alpha_k||^2&=\left|\left|\frac{\langle\alpha_k,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1+\cdots+\frac{\langle\alpha_k,\beta_{k-1}\rangle}{\langle\beta_{k-1},\beta_{k-1}\rangle}\beta_{k-1}+\beta_k\right|\right|^2\\&=|\langle\alpha_k,\beta_1\rangle|^2+\cdots+|\langle\alpha_k,\beta_{k-1}\rangle|^2+||\beta_k||^2\\&\ge||\beta_k||^2\end{aligned} \tag{2}$$

（也可以理解为 β_k 是 α_k 在子空间 $V(\beta_1,\cdots,\beta_{k-1})$ 的正交投影，故 $||\beta_k||\le||\alpha_k||$），由上题结论知

$$\begin{aligned}\det G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)&=\det G(\alpha_1)\cdot\prod_{i=2}^{n}\frac{\det G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}{\det G(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})}\\&=||\beta_1||^2\cdot\prod_{i=2}^{n}||\beta_i||^2=||\beta_1||^2\cdots||\beta_n||^2\\&\le||\alpha_1||^2||\alpha_2||^2\cdots||\alpha_n||^2\end{aligned}$$

若等号成立,则 (2) 式中的不等号为等号,即 $\langle\alpha_k,\beta_i\rangle=0,\forall 1\le i\le k-1$,代入 (1) 式即 $\beta_k=\alpha_k,\forall 1\le k\le n$,即 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 两两正交；

反之，若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 两两正交，则

$$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}||\alpha_1||^2 & & \\ & \ddots & \\ & & ||\alpha_n||^2\end{pmatrix}\Longrightarrow \det G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\prod_{i=1}^n||\alpha_i||^2$$

考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积（对应分量相乘再相加），将 A 用行向量表示，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}(\det A)^2=\det A\det A^T&=\det\left[\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1^T & \alpha_2^T & \cdots & \alpha_n^T\end{pmatrix}\right]\\ &=\det\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{pmatrix}\\ &=\det G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\le\prod_{i=1}^n||\alpha_i||^2=\prod_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\end{aligned}$$

□

习题 10 (P327,T9) 设 O 是 n 阶正交方阵，而方阵 $A=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$，证明：方阵 OA 的特征值 λ_0 满足 $m\le|\lambda_0|\le M$，其中

$$m=\min\{|a_j|:1\le j\le n\},\quad M=\max\{|a_j|:1\le j\le n\}$$

评价 在本章语境下，内积为实内积，因此我们认为这里的 O 是实方阵

证明 设 $v=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 是 OA 的从属于特征值 λ_0 的特征向量，即 $OAv=\lambda_0 v$，两边同时取共轭转置可得（A^* 表示 A 的共轭转置）$v^*A^*O^*=\overline{\lambda}_0v^*$，由 O 是实方阵知，$O^*=O^T$，此外 $A^*=\mathrm{diag}(\overline{a}_1,\cdots,\overline{a}_n)$，所以

$$|\lambda_0|^2v^*v=v^*A^*O^*OAv=v^*A^*Av=\sum_{i=1}^n|x_i|^2|a_i|^2$$

而

$$\sum_{i=1}^n|x_i|^2m^2\le\sum_{i=1}^n|x_i|^2|a_i|^2\le\sum_{i=1}^n|x_i|^2M^2$$

即

$$m\sum_{i=1}^n|x_i|^2\le|\lambda_0|^2\sum_{i=1}^n|x_i|^2\le M\sum_{i=1}^n|x_i|^2$$

由 $v\neq 0$ 知 $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2\neq 0$，所以 $m\leq|\lambda_0|\leq M$ □

习题 11 (P327,T15) 设 U,W 是 n 维 Euclid 空间 V 的子空间，证明

$$(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp},\quad (U\cap W)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}$$

证明 (1). 根据定义显然有：若子空间 $A\subseteq B$，则 $B^{\perp}\subseteq A^{\perp}$，则

$$\begin{cases}U\subseteq U+W\Longrightarrow (U+W)^{\perp}\subseteq U^{\perp}\\ W\subseteq U+W\Longrightarrow (U+W)^{\perp}\subseteq W^{\perp}\end{cases}\quad\Longrightarrow (U+W)^{\perp}\subseteq U^{\perp}\cap W^{\perp}$$

另一方面，若 $v\in U^{\perp}\cap W^{\perp}$，则 $\forall u\in U,\forall w\in W,\langle v,u\rangle=\langle v,w\rangle=0$，则 $\forall u+w\in U+W$，有 $\langle v,u+w\rangle=\langle v,u\rangle+\langle v,w\rangle=0$，所以 $v\in(U+W)^{\perp}$，即 $U^{\perp}\cap W^{\perp}\subseteq(U+W)^{\perp}$，所以 $U^{\perp}\cap W^{\perp}=(U+W)^{\perp}$

(2). 因为 $(U^{\perp})^{\perp}=U$，所以

$$\begin{aligned}(U\cap W)^{\perp}&=\left((U^{\perp})^{\perp}\cap(W^{\perp})^{\perp}\right)^{\perp}\overset{(1)}{=}\left((U^{\perp}+W^{\perp})^{\perp}\right)^{\perp}\\&=U^{\perp}+W^{\perp}\end{aligned}$$

□

习题 12 (P327,T18) 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 是所有 n 阶实方阵集合连同内积 $\langle X,Y\rangle=\mathrm{tr}(XY^T)$ 构成的 Euclid 空间，其中 $X,Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$，求 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中由纯量方阵生成的子空间 U 的正交补 $U^{\perp}$

证明 因为 $U=\{cI_n:c\in\mathbb{R}\}$，$I_n$ 为它的基，即 $\dim U=1$，所以 $\dim U^{\perp}=n^2-\dim U=n^2-1$，因此我们只需找到 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中 n^2-1 个满足 $\langle I_n,X\rangle=0$ 的线性无关的方阵，因为

$$\langle I_n,X\rangle=\mathrm{tr}(X^T)=\mathrm{tr}(X)=0$$

我们只需找到 n^2-1 个迹为零的线性无关的矩阵，首先考虑 $\{E_{ij}:1\leq i,j\leq n,i\neq j\}$，它们的迹都为零，且共有 $n(n-1)$ 个，其次我们需要在对角元上做文章，考虑 $\{E_{ii}-E_{i+1,i+1}:1\leq i\leq n-1\}$，它们的迹也均为零，且有 $n-1$ 个

接下来证明 $\{E_{ij}:1\leq i,j\leq n,i\neq j\}\cup\{E_{ii}-E_{i+1,i+1}:1\leq i\leq n-1\}$ 线性无关，则它们就是 $U^{\perp}$ 的一组基，假设 $\exists\lambda_{ij},i\neq j,\mu_k,1\leq k\leq n-1$ 不全为零，使得

$$\sum_{i\neq j}\lambda_{ij}E_{ij}+\sum_{k=1}^{n-1}\mu_k(E_{kk}-E_{k+1,k+1})=0$$

上式可以表示为 $\{E_{ij}:1\leq i,j\leq n\}$ 的线性组合，其中 E_{ij} 的系数为

$$\begin{cases}\lambda_{ij},i\neq j\\ \mu_1,i=j=1\\ -\mu_{n-1},i=j=n\\ \mu_k-\mu_{k-1},2\leq i=j\leq n-1\end{cases}$$

由 $\{E_{ij}:1\leq i,j\leq n\}$ 线性无关知上面的系数全为零，解得 $\lambda_{ij}=0,\mu_k=0,\forall i\neq j,\forall k$，所以我们找到了

$U^\perp$ 的一组基，即

$$U^\perp = \mathrm{Span}\big(\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\} \cup \{E_{ii} - E_{i+1,i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}\big)$$

□

评价 实际上 $U^\perp$ 就是迹为零的方阵全体，由本题我们知道迹为零的方阵张成的空间维数为 n^2-1