线性变换 $\mathscr{B}$ 都可表为 $\mathscr{A}$ 的多项式. 证明: $\mathscr{A}$ 是循环变换.

P269 T12

12. 设 $\mathscr{A}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换. 证明: V 的每个非零向量都是 $\mathscr{A}$ 的循环向量的充分必要条件为, $\mathscr{A}$ 的特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 在 F 上不可约.

(1) $p(t)$

证明: 必要性, 由存在一个元素为循环, 任 $\alpha \in V$,

则 $\{\alpha, \mathscr{A}\alpha, \dots, \mathscr{A}^{n-1}\alpha\}$ 为 V 上一组基.

若 $\varphi(\lambda)$ 可约, 设 $\varphi(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda)$, $\deg f, g \geq 1$

则 $f(\mathscr{A})\alpha$ 非零, 若不然, $\{\alpha, \mathscr{A}\alpha, \dots, \mathscr{A}^{\deg f-1}\alpha\}$ 线性生成了 V

与 $\{\alpha, \mathscr{A}\alpha, \dots, \mathscr{A}^{n}\alpha\}$ 为 V 上一组基矛盾

故 $f(\mathscr{A})\alpha$ 非零, 故 $f(\mathscr{A})\alpha$ 循环向量

故 $\{f(\mathscr{A})\alpha, \mathscr{A}f(\mathscr{A})\alpha, \dots, \mathscr{A}^{n-1}f(\mathscr{A})\alpha\}$ 为一组基

而 $g(\mathscr{A})f(\mathscr{A})\alpha=0$ $\Rightarrow$ $\{f(\mathscr{A})\alpha, \mathscr{A}f(\mathscr{A})\alpha, \dots, \mathscr{A}^{\deg(g)-1}f(\mathscr{A})\alpha\}$ 线性生成 V, 与

$\Rightarrow \dim V \leq \deg(g) < n$ 矛盾!

充分性: 若特征多项式不可约 即 $\varphi(\lambda)$ 不可约

任 $\alpha \neq 0$, 考虑 α 生成的循环空间, 即 $V_\alpha := \mathrm{span}_F\{\alpha, \mathscr{A}\alpha, \dots, \mathscr{A}^{n-1}\alpha\}$ 为不变子空间

设 $\mathscr{A}|_{V_\alpha}$ 特征多项式为 $g(\lambda)$, 则 $g(\lambda) \mid \varphi(\lambda)$, 而 $\varphi(\lambda)$ 不可约

$\Rightarrow \deg g = \deg \varphi \Rightarrow V_\alpha = V$ 故 任 $\alpha \neq 0$, α 都是循环向量

P276. T1

习　题

1. 设 A 是 n 阶复方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是方阵 A 的所有不同特征值．证明：

(1) 存在正整数 m，使得 $\operatorname{rank} A^m=\operatorname{rank} A^{m+1}=\operatorname{rank} A^{m+2}=\cdots$；

(2) 设 m_j 是使 $\operatorname{rank}(A-\lambda_j I)^{m_j}=\operatorname{rank}(A-\lambda_j I)^{m_j+1}=\operatorname{rank}(A-\lambda_j I)^{m_j+2}=\cdots$ 的最小正整数．则方阵 A 的最小多项式 $d(\lambda)$ 为

$$d(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{m_t};$$

(3) 设 $(\lambda-\lambda_j)^l$ 是方阵 A 的属于特征值 λ_j 的初等因子，则 $l\leqslant m_j$；

(4) 设方阵 A 的初等因子组为

$$\begin{array}{llll}(\lambda-\lambda_1)^{m_{11}}, & (\lambda-\lambda_1)^{m_{12}}, & \cdots, & (\lambda-\lambda_1)^{m_{1k_1}},\\ (\lambda-\lambda_2)^{m_{21}}, & (\lambda-\lambda_2)^{m_{22}}, & \cdots, & (\lambda-\lambda_2)^{m_{2k_2}},\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ (\lambda-\lambda_t)^{m_{t1}}, & (\lambda-\lambda_t)^{m_{t2}}, & \cdots, & (\lambda-\lambda_t)^{m_{tk_t}},\end{array}$$

其中属于特征值 λ_j 且次数为 l 的初等因子 $(\lambda-\lambda_j)^l$ 的个数记为 n_{jl}，并约定，当 $(\lambda-\lambda_j)^l$ 不是方阵 A 的初等因子时，$n_{jl}=0$．则

$$n_{jl}=\operatorname{rank}(A-\lambda_j I)^{l+1}+\operatorname{rank}(A-\lambda_j I)^{l-1}-2\operatorname{rank}(A-\lambda_j I)^{l},$$

其中 $1\leqslant l\leqslant m_j$，$j=1,2,\cdots,t$．

证明：(1) 由于 $\operatorname{rank}(A)\geq\operatorname{rank}(A^2)\geq\operatorname{rank}(A^3)\geq\cdots\geq\operatorname{rank}(A^n)\geq\cdots\geq 0$

$\Rightarrow$ 由于 $\operatorname{rank}(A)$ 有限，$\Rightarrow \exists\, m$, s.t. $\operatorname{rank}A^m=\operatorname{rank}A^{m+1}=\operatorname{rank}A^{m+2}=\cdots$

(2) 由 Jordan 标准型知

$$A\sim J=\operatorname{diag}(J_{r_{11}}(\lambda_1),\ldots,J_{r_{1k_1}}(\lambda_1),\ldots,J_{r_{t1}}(\lambda_t),\ldots,J_{r_{tk_t}}(\lambda_t))$$

因 当 $j\leq k$ 时 $r_{ij}\geq r_{ik}$

故 A 的最小多项式为 $d(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_{11}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{r_{t1}}$

下证 $m_j=r_{j1}$，对于 $j=1,\ldots,t$。

由于 $\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^k=\operatorname{rank}(J-\lambda_jI)^k$，对于正整数 k 成立

易验证 $\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^{r_{j1}}=\operatorname{rank}((A-\lambda_jI)^{r_{j1}+1})=\cdots$，因此 由 m_j 的定义知

$r_{j1}\geq m_j$，若 $m_j\leq r_{j1}-1$，从而 $\operatorname{rank}((A-\lambda_jI)^{m_j})\geq\operatorname{rank}((A-\lambda_jI)^{r_{j1}-1})$

$>\operatorname{rank}((A-\lambda_jI)^{r_{j1}})=\operatorname{rank}((A-\lambda_jI)^{r_{j1}+1})=\cdots$ 矛盾！，因此 $m_j=r_{j1}$ for all j

且 $d(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{m_t}$

Remark: (2) 换个从 T 不变子空间分解更易看出：

$$V=\operatorname{Ker}(A-\lambda_1I)^{r_1}\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}(A-\lambda_tI)^{r_t}$$

而 当 $i=j$ 时 $A-\lambda_iI$ 作用在 $\operatorname{Ker}(A-\lambda_iI)$ 上幂零

设 $A|_{\operatorname{Ker}(A-\lambda_iI)}$ 的最小多项式为 $f_i(\lambda)$

故 $d(\lambda)=f_1(\lambda)\cdots f_t(\lambda)$，而 $\deg f_i(\lambda)=m_i$

(3) 我们证明了 最小多项式 $= d(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda-\lambda_t)^{r_t}$

而初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{e} \mid (\lambda-\lambda_i)^{r_i} \Rightarrow e \le r_i$

(4) 由于初等因子个数 = 特征值为 λ_j 的 e 阶 Jordan 块

我们计算 $(A-\lambda_j I)^{e-1}$, $(A-\lambda_j I)^{e}$, $(A-\lambda_j I)^{e+1}$

$$\begin{cases} \operatorname{rank}((A-\lambda_j I)^{e-1}) = \sum_{e \le k \le r_j} ((k-1)-(e-1)) + n_e + \sum_{i \ne j} (n_{i1}+\cdots+n_{ik_i}) \\ \operatorname{rank}((A-\lambda_j I)^{e}) = \sum_{e+1 \le k \le r_j} ((k-1)-e) + \sum_{i \ne j} (n_{i1}+\cdots+n_{ik_i}) \\ \operatorname{rank}((A-\lambda_j I)^{e+1}) = \sum_{e < k \le r_j} ((k-1)-(e-1)) + \sum_{i \ne j} (n_{i1}+\cdots+n_{ik_i}) \end{cases}$$

算一下， 即为 (4) 的结果

(4) 根据(3)中所确定的方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组，写出方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形.

2. 利用习题 1 的方法，求下列方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形：

P226, T2

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$； (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$； (4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & -3 \end{pmatrix}$； 相一次

(5) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$；

(6) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) 特征多项式 $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2$，从而 Jordan 标准形

A 有两个不同特征值 $0, -1$

对 $\lambda = 0$，计算 $n_1 = 1$ $(\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^2 = 2)$

因 $n_1 = \operatorname{rank}(A^2) + \operatorname{rank}(I) - 2\operatorname{rank}(A) = 1$

对于 $\lambda_2=-1$，算 $m_2=2$，$n_{21}=\operatorname{rank}((A+E)^2)+\operatorname{rank}(E)-2\operatorname{rank}(A+E)$
$=1+3-4=0$，$n_{22}=\operatorname{rank}((A+E)^3)+\operatorname{rank}(A+E)-2\operatorname{rank}((A+E)^2)$
$=1+2-2=1$

$\Rightarrow$ 初等因子组为 $\lambda, (\lambda+1)^2$

Jordan标准型为 $\operatorname{diag}(0, J_2(-1))$

(4) 由特征多项式 $\varphi(\lambda)=\lambda^3+5\lambda^2+13\lambda-7$

若知道 Cardano 公式，可以算出三个根

若不知道 Cardano 公式，算 $\varphi'(\lambda)$　$\varphi(\lambda)$与$\varphi'(\lambda)$互素

$\Rightarrow\varphi(\lambda)$无重根，$\Rightarrow\varphi(\lambda)$可对角化，因三特征值互不相同

故标准型 $J=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 即可

$$\lambda_k=-\frac{1}{3}\left(5+\xi^k C+\frac{-14}{\xi^k C}\right)$$ 其中 $\xi=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，

$C=\sqrt[3]{-262\pm\sqrt{7138}}$

这些由 Cardano 公式，由于大家没学三次方程求根，所以不用写这么精细

(5) $\varphi(\lambda)=\lambda^n+1$ 为特征多项式，$\varphi(\lambda)$有n个互异特征值

$$\lambda_{k+1}=\cos\left(\frac{1}{n}\pi+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{1}{n}\pi+k\frac{2\pi}{n}\right)\quad k=0,\dots,n-1$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. 设 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 与最小多项式 $d(\lambda)$ 分别为

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{e_1}(\lambda-\lambda_2)^{e_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_t},$$

$$d(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{m_t},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的全部不同特征值. 证明:线性变换 $(\mathscr{A}-\lambda_j\mathscr{I})^{e_j}$ 与 $(\mathscr{A}-\lambda_j\mathscr{I})^{m_j}$ 的核相等.

(二证法): 不用Jordan标准型: 由广义特征子空间分解: (空间第一分解定理)

$V=\ker(A-\lambda_1 I)^{e_1}\oplus\cdots\oplus\ker(A-\lambda_t I)^{e_t}$

$\supseteq \qquad\qquad \supseteq \qquad\qquad m_1\le e_1,\ \ldots,\ m_t\le e_t$

$V=\ker(A-\lambda_1 I)^{m_1}\oplus\cdots\oplus\ker(A-\lambda_t I)^{m_t}$

对于每个 i, 都有 $\ker(A-\lambda_i I)^{m_i}\subseteq\ker(A-\lambda_i I)^{e_i}$

因 上下两个直和分解都为 V 的直和分解

$\Rightarrow \ker(A-\lambda_i I)^{m_i}=\ker(A-\lambda_i I)^{e_i}$ for all i

P287, T1

1. 求下列 λ 矩阵的 Smith 标准形,并求出它们的行列式因子,不变因子和初等因子组:

(1) $\begin{bmatrix}\lambda(\lambda+1) & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}\lambda(\lambda-1) & 0 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2)\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5+\lambda\end{bmatrix}$; (6) $\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & \lambda & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{bmatrix}_{n\times n}$.

(3) $\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & \lambda-2 & 0 \\ \lambda-2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (\lambda-2)^2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3 \end{bmatrix}$

Smith标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3 \end{bmatrix}$

行列式因子：$1, 1, (\lambda-2)^3$

不变因子：$1, 1, (\lambda-2)^3$

初等因子：$(\lambda-2)^3$

(5) 相抵至Smith标准型 $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \lambda^5+5\lambda^4+4\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1 \end{bmatrix}$

只需证明 $\lambda^5+5\lambda^4+4\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1$ 分解成5个互异的复根即可

去算 $(\varphi(\lambda), \varphi'(\lambda)) = 1$

行列式因子：$1, 1, 1, 1, \varphi(\lambda)$

初等因子: $(\lambda-\lambda_1)$, $(\lambda-\lambda_2)$, $(\lambda-\lambda_3)$, $(\lambda-\lambda_4)$, $(\lambda-\lambda_5)$, 其中 λ_i 为 $P(\lambda)$ 的5个互异复根

(6) Smith标准型

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \lambda+1 & & & & \\ & & \lambda+1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda+1 & \\ & & & & & (\lambda-1)(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

行列式因子: $1,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)^2, \dots,\ (\lambda+1)^{n-2}(\lambda-1)(\lambda+1)$

不变因子: $1,\ \lambda+1,\ \lambda+1, \dots,\ \lambda+1,\ (\lambda-1)(\lambda+1)$

初等因子: $\underbrace{\lambda+1, \dots, \lambda+1,}_{n-1\text{项}}\ \lambda-1$

P287 T2

2. 证明:任意一个满秩 λ 方阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 都可以表为 $\boldsymbol{A}(\lambda)=\boldsymbol{P}(\lambda)\boldsymbol{Q}(\lambda)$,其中 $\boldsymbol{P}(\lambda)$ 是可逆 λ 方阵,$\boldsymbol{Q}(\lambda)$ 是上三角 λ 方阵,而且它的对角元都是首一多项式,对角线以上的元素都是次数小于同一列的对角元的次数的多项式.并证明这种表法唯一.

证明: 存在性: 由于 A 满秩, 故 A 的第一列不全为0,

则 A 可以通过 Smith 标准型证明步骤,

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & B(\lambda) \\ 0 & \\ \vdots & A_1(\lambda) \\ 0 & \end{bmatrix} \qquad a_{11}(\lambda)\neq 0$$

由 A 满秩 $\Rightarrow$ A_1 满秩

数学归纳法:

当 $n=1$ 时, 显然结论成立

设当 $n=k$ 时, 结论成立

当 $n>1$ 时

$A \in M_{n\times n}(K[\lambda])$ 则由刚才讨论知

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} a_1(\lambda) & \beta(\lambda) \\ 0 & A_1(\lambda) \end{bmatrix}$$ 且 $A_1(\lambda)$ 满秩

由归纳假设，$\exists$ 可逆矩阵 Q_1 st $Q_1 A_1(\lambda)$ 是结论中要求形式，$\exists$ 可逆矩阵 $P(\lambda)$ st

$$P(\lambda)A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & & * \\ & a_{22}(\lambda) & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

对 a_{ij} $(j>i)$ 用初等行变换 用对角元带余除法 即可

$\Rightarrow$ $\exists$ 可逆矩阵 $P(\lambda)$，st $P(\lambda)A(\lambda)$ 为要求中形式，故存在性证毕

唯一性：若 $\exists$ 可逆矩阵 $R(\lambda)$，st $A(\lambda)=R(\lambda)S(\lambda)$，其中 $S(\lambda)$ 为上三角且对角元为首一多项式，且对角线以上元素次数小于对角元次数.

此时 $A(\lambda)$ 有两种表达

$A(\lambda)=P(\lambda)Q(\lambda)=R(\lambda)S(\lambda)$，其中 $P(\lambda)$ 可逆，$Q(\lambda)$ 为要求中的一种上三角矩阵

$\Rightarrow$ $Q(\lambda)=P^{-1}(\lambda)R(\lambda)S(\lambda)$ 令 $C(\lambda)=P^{-1}(\lambda)R(\lambda)$

$\Rightarrow$ $|Q(\lambda)| = C\,|S(\lambda)|$ 其中 $C \in K[\lambda]$，$C \in F$ 时

$\Rightarrow$ $\sum q_{ii}(\lambda) = \sum s_{ii}(\lambda)$ …… ①

我们把 $C(\lambda)$ 精细求一下：

、 由于 $Q(\lambda)=C(\lambda)S(\lambda)$, $Q(\lambda)$上三角, $S(\lambda)$上三角 $\Rightarrow C(\lambda)$ 上三角

由此可知 $q_{ii}(\lambda)=C_{ii}(\lambda)S_{ii}(\lambda)$, $\Rightarrow \deg q_{ii}(\lambda) \geq \deg S_{ii}(\lambda)$

而由①知 $C_{ii}(\lambda)=c_i$(非零常数)

由 $q_{ii}(\lambda)$ $S_{ii}(\lambda)$首一, $\Rightarrow C_{ii}=1 \Rightarrow q_{ii}(\lambda)=S_{ii}(\lambda)$

由此我们说明了 $Q(\lambda)$的对角元与 $S(\lambda)$对角元相同 下证上三角部分也相同

$q_{12}(\lambda)=C_{11}(\lambda)S_{12}(\lambda)+C_{12}(\lambda)S_{22}(\lambda)$, 当 C_{12}非0时, $\deg(q_{12}(\lambda)) \geq \deg(S_{22}(\lambda))$

$\Rightarrow C_{12}(\lambda)=0$

由相同试可得 $C_{12}(\lambda)=C_{13}(\lambda) \cdots =C_{1n}(\lambda)=0 \Rightarrow S_{1i}(\lambda)=q_{1i}(\lambda)$ $i>1$

由此继续考察 $q_{23}(\lambda) \Rightarrow C_{23}=0$, 再算

$\Rightarrow C_{23}(\lambda)=C_{24}(\lambda) \cdots =C_{2n}(\lambda)=0 \Rightarrow S_{2i}(\lambda)=q_{2i}(\lambda) \cdots i>2$

$\Rightarrow \cdots$ $S_{n-1,n}(\lambda)=q_{n-1,n}(\lambda)$

$\Rightarrow C$ 为对角阵, 且由 $C_{ii}=1 \Rightarrow C$ 单位阵

$\Rightarrow P(\lambda)=Q(\lambda)$ 且 $Q(\lambda)=S(\lambda)$ #

P287. T3

3. 证明:对 n 阶 Hermite 方阵 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$, λ 方阵 $\boldsymbol{H}_1+\lambda\boldsymbol{H}_2$ 的不变因子都是实系数多项式.

证明: 我们用行列式因子算:

$D_i=\{$所有i阶子式的最大公因式$\}$

由 Binet-Cauchy 公式 $\Rightarrow \exists\, a_{j_1\cdots j_i}^{i_1\cdots i_i}(\lambda)$ 使得 $D_i=\sum_{\substack{1\le i_1<i_2\cdots<i_i \\ 1\le j_1<j_2\cdots<j_i}} a_{j_1\cdots j_i}^{i_1\cdots i_i}(\lambda)\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_i \\ j_1 \cdots j_i \end{pmatrix}$

而 H 是 Hermite 即 $\bar{H}^T=H$

则 $\begin{pmatrix} i_1\cdots i_n \\ j_1\cdots j_n \end{pmatrix}=\overline{\begin{pmatrix} j_1\cdots j_n \\ i_1\cdots i_n \end{pmatrix}}$

$$\Rightarrow \overline{D_i(\lambda)} = \sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_j \\ 1\le j_1<j_2<\cdots<j_j}} \overline{a_{i_1\cdots i_j}(\lambda)\, A_{j_1\cdots j_j}(\lambda)\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_j \\ i_1 & \cdots & i_j\end{pmatrix}}$$

故 $Re\,D_i(\lambda)$ 可由所有子式表出，其 $Re(D_i(\lambda))$ 为 $D_i(\lambda)$ 实部

而 $Re(D_i(\lambda)) \mid D_i(\lambda)$ 且 $Re\,D_i(\lambda)$ 首项系数为1 $\Rightarrow Re(D_i(\lambda)) = D_i(\lambda)$

$\Rightarrow D_i(\lambda)$ 实系数，$\Rightarrow$ 行列式因子实系数

$\Rightarrow$ 不变因子 $d_i(\lambda) = \dfrac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}$ 也实系数， #

P293 T1:

1. 求下列方阵的 Jordan 标准形.

(1) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$;　(4) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha\neq 0$;

(5) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 3 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$;　(6) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$;　(8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$;

(9) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^2_{n\times n}$;　(10) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \cdots\cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}_{n\times n}$, $n\geqslant 3$;

1.(2): 计算 $\lambda I - A$，得 Smith 标准形

A 的 Smith 标准形为 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^3 \end{bmatrix}$

初等因子组为 $(\lambda-1)^3$ $\Rightarrow$ Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) Smith标准形为 $(1, \lambda-2, (\lambda-2)^2)$

初等因子组为 $\lambda-2, (\lambda-2)^2 \Rightarrow J=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(6) Smith标准形为 $\mathrm{diag}(1,1,1,(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2)$

$\Rightarrow J=\mathrm{diag}(J_2(1), J_2(-1))$

(9) 仍然考虑计算 Smith标准型.

Claim: $\begin{cases} \mathrm{diag}(1,\dots,1,\lambda^{\frac{n}{2}},\lambda^{\frac{n}{2}}) & n\text{为偶} \\ \mathrm{diag}(1\dots1,\lambda^{\frac{n-1}{2}},\lambda^{\frac{n+1}{2}}) & n\text{为奇} \end{cases}$

用归纳法: 当 $n=2$ 或 3 时, 是显然的

假设当 $n=2k$ 时 $\exists$ 可逆λ矩阵 $P(\lambda)$ $Q(\lambda)$ s.t. $P(\lambda)(\lambda I_{2k}-A_{2k})Q(\lambda)=\mathrm{diag}(1,\dots,1,\lambda^k,\lambda^k)$

则 $\mathrm{diag}(P(\lambda),1)(\lambda I_{2k+1}-A_{2k+1})\,\mathrm{diag}(Q(\lambda),1)$

$$=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda^k & & -1 \\ & & & & \lambda^k & 0 \\ & & & & & \lambda \end{bmatrix} := S(\lambda)$$

由于 $P(\lambda)$ 与 $Q(\lambda)$ 不改变最后一行与最后一列

$\Rightarrow P_{2k-1}(-1)\,Q_{2k+1,2k}(\lambda)\,S(\lambda)\,P_{2k-1,2k+1}(\lambda^k)$

给出 A_{2k+1} 的 Smith标准型 $\mathrm{diag}(1,\dots,1,\lambda^k,\lambda^{k+1})$

从 $n=2k+1$ 至 $n=2k+2$ 是类似的

故 A 的 Jordan标准型显然

$$\begin{cases} \operatorname{diag}(J_{\frac{n}{2}}^{(0)}, J_{\frac{n}{2}}^{(0)}) & n\text{为偶} \\ \operatorname{diag}(J_{\frac{n}{2}}^{(0)}, J_{\frac{n}{2}}^{(0)}) & n\text{为奇} \end{cases}$$

(10)：(9)为(10)的特殊情形，即 $\alpha=0$

将(9)的证明过程中将 $\operatorname{diag}(1,\dots,1,\lambda^k,\lambda^k)$ 换成 $\operatorname{diag}(1,\dots,1,e^{\alpha}\lambda^k, e^{\alpha}\lambda^k)$

将
$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda^k & \\ & & & & \lambda^k \\ & & & & & \lambda \end{bmatrix}$$
换成
$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & e^{\alpha}\lambda^k & \\ & & & & e^{\alpha}\lambda^k \\ & & & & & \lambda \end{bmatrix}$$
即可

$\Rightarrow$ Jordan标准形，$J = \begin{cases} \operatorname{diag}(J_{\frac{n}{2}}^{(\alpha)}, J_{\frac{n}{2}}^{(\alpha)}) & n\text{为偶} \\ \operatorname{diag}(J_{\frac{n}{2}}^{(\alpha)}, J_{\frac{n}{2}}^{(\alpha)}) & n\text{为奇} \end{cases}$

P294. T3

3. 证明：一组两两可交换的可对角化方阵可以用同一个可逆方阵相似于对角形.

想法：先证明两个交换时，即 A, B 交换 且 A, B 都可对角化时

A可对角化 $\Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}$ 其 $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ 为 A 的全部特征值的特征子空间

由于 A, B 交换 $\Rightarrow$ A的特征子空间为 B 不变子空间，又因 B 可对角化

$\Rightarrow$ B 在 V_{λ_i} 上可对角化，$\Rightarrow$ 故在每个 V_{λ_i} 上存在基 s.t. A, B 在此组基下对角化 对于 V_{λ_i}

而在每个 V_{λ_i} 上都这样取基即可

故对于两个交换情形是对的

对于多个情形，也同样使用上次作业的此题证明形式

8. 设 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 可交换. 证明：线性变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 具有公共特征向量. 进而证明：设 I 是下标集合，V 的线性变换集合 $\{\mathscr{A}_\nu : \nu\in I\}$ 中任意两个线性变换 $\mathscr{A}_{\nu_1}$ 与 $\mathscr{A}_{\nu_2}$ 可交换，则线性变换 $\mathscr{A}_\nu, \nu\in I$ 具有公共特征向量.

证明：设 $\{A_i\}_{i\in I}$ 两两交换，且每个都可对角化

我们对空间 V 的维数做归纳：

若 $\dim V=1$，显然 V 上任何一个非0向量都为特征向量

设 $\dim V<n$ 正确

当 $\dim V=n$ 时

取一个 $i_0\in I$，V 对 A_{i_0} 的特征空间分解 $V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_t}$

① 若 $t\geq 2$，则 $\dim V_{\lambda_1}<n, \cdots, \dim V_{\lambda_t}<n$

由于 $\{A_i\}_{i\in I}$ 两两交换 $\Rightarrow$ $V_{\lambda_1},\cdots,V_{\lambda_t}$ 为所有 $\{A_i\}_{i\in I}$ 的不变子空间

$\Rightarrow$ 每个 $\{A_i\}_{i\in I}$ 都在 $V_{\lambda_1},\cdots,V_{\lambda_t}$ 上可对角化

运用到 $\dim<n$ 情形，故在 $V_{\lambda_1},\cdots,V_{\lambda_t}$ 上一组基，

st 每个 $\{A_i\}_{i\in I}$ 在此基上为对角阵

② 若找不到 $i_0\in I$，st A_{i_0} 有两个不相同特征值

则表明 $\forall i$，V 都为 A_i 的特征空间

此时随便取一组基，A_i 都为对角阵 #

P294 T5

5. 证明：方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角形的充分必要条件为，它的初等因子都是一次的.

证明：直接用 Jordan 标准形

必要性：若 A 相似于对角阵

每个对角元素 为一个 Jordan块 ⇒ 初等因子为 $(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_1), (\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_2), \ldots (\lambda-\lambda_t)\ldots(\lambda-\lambda_t)$

其中 $\lambda_1 \ldots \lambda_t$ 为 A 的所有特征值

充分性，若初等因子为1次 $(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_1),(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_t)\ldots(\lambda-\lambda_t)$

，该Jordan块

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_t \\ & & & & & & & & \lambda_t \end{pmatrix}$$

对角阵

P274.T7

7. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是 1. 证明方阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意次幂都与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

证法1:（用P276.T1去算各阶初等因子换）（较为繁琐）

$$A \sim \begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_t(1) \end{pmatrix}$$

其中 $J_i(1)$ 为 1阶特征值为1的 Jordan块

$$A^s \sim \begin{pmatrix} J_1^s(1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_t^s(1) \end{pmatrix}$$

我们只需证明 $J_i^s(1) \sim J_i(1)$

令 $\Delta = J_{(n)}^k(1) - I_{(n)} = \sum_{j=1}^{\min(k,n-1)} C_k^j N_{(n)}^j$，其中 C_k^j 为二项式系数

$$N_{(n)}^j = \begin{array}{c} \text{j位置} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & \ddots & & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{n阶} \end{array}$$

⇒ Δ 有 n 重特征值 0，当 $l \geq 1$ 时

$$\Rightarrow \Delta^l = N_{(n)}^l \left(C_k^1 I_{(n)} + \cdots + C_k^{\min(k,n-1)} N_{(n)}^{\min(k,n-1)-1} \right)^l$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(\Delta^l) = \operatorname{rank}(N_{(n)}^l) = \begin{cases} n-l & l < n \\ 0 & l \geq n \end{cases}$$

因此 n 为满足 $\operatorname{rank}(\Delta^l) = \operatorname{rank}(\Delta^{l+1}) = \cdots$ 最小整数

且 Δ 最小多项式为 $d(\lambda) = \lambda^n$

我们算初等因子 λ^l:

$$n_l = \operatorname{rank}(\Delta^{l+1}) + \operatorname{rank}(\Delta^{l-1}) - 2\operatorname{rank}(\Delta^l)$$

$$= \begin{cases} (n-l-1) + (n-l+1) - 2(n-l) = 0 & 1 \leq l < n \\ 0 + 1 - 0 = 1 & l = n \end{cases}$$

⇒ λ^n 为 Δ 的唯一初等因子 ⇒ Δ 相似于 $J_n(1) - I_{(n)}$

⇒ $J_{(n)}^k(1) \sim J_{(n)}(1)$

证法二(用行列式因子)：

$$J_n^k(1) = \begin{bmatrix} 1 & C_k^1 & C_k^2 & \cdots & C_k^t & & & \\ & 1 & C_k^1 & C_k^2 & & \ddots & & \\ & & 1 & C_k^1 & C_k^2 & & C_k^t & \\ & & & 1 & C_k^1 & C_k^2 & & \\ & & & & 1 & C_k^1 & C_k^2 & \\ & & & & & \ddots & C_k^1 & C_k^2 \\ & & & & & & \ddots & C_k^1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $t = \min(k, n-1)$

对于 $J_{3^k}(1)$ 的行列式因子 $D_1=D_2\cdots=D_{3^k-1}=1$ $D_{3^k}=(\lambda-1)^{3^k}$

而 $J_3(1)$ 的行列式因子显然也为上述几个

$J_3(1)=\begin{bmatrix}1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&1\end{bmatrix}$ $D_1=D_2\cdots=D_{3-1}=1$ $D_3=(\lambda-1)^3$

Remark: 由此方法可以证明得到 $J_n(a)\sim(J_n(a))^2$ (当 $a\neq0$ 时) 也只需计算行列式因子即可

P304 7:

1. 设 $i_1\ i_2\ \cdots\ i_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 把 n 阶单位方阵 $I_{(n)}$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 行分别调到第 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 行得到的方阵称为置换方阵. 证明:置换方阵相似于对角形.

[redacted]

证明: 记 P 为置换矩阵, 则 $P^{n!}=Id$

$\Rightarrow f(x)=x^{n!}-1$ 为 P 的一个零化多项式

而 $f(x)$ 无重根 $\Rightarrow$ P 的最小多项式无重根 $\Rightarrow$ 可对角化

P304. T4:

相似.

4. 已知 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 和 $d(\lambda)$ 分别为

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda+7)^2,\quad d(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+7).$$

求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形.

由于最小多项式 $d(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$ 故 不变因子 $(\lambda-2)^2(\lambda+7)$

现 Smith 标准型 为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & (\lambda-2)(\lambda+7) & \\ & & & & (\lambda-2)^2(\lambda+7) \end{bmatrix}$$

这种可能

故 初等因子为 $\lambda-2$ $(\lambda-2)^2$ $\lambda+7$ $(\lambda+7)$

$$\Rightarrow J=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

P304. T5.

求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆方阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^k$ 相似, k 是正整数. 证明: 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是单位根.

设 $\lambda_1 \cdots \lambda_s$ 为 A 的所有特征值 (互不相同)

则 $\lambda_1^k \cdots \lambda_s^k$ 为 A 的所有特征值.

若 $\exists\, i\neq j$ st $\lambda_i^k=\lambda_j^k$ 则 A^k 的互不相同特征值个数 $<s$

但 A 相似于 A^k 即 A^k 也有 s 个互不相同特征值 也为 $\lambda_1 \cdots \lambda_s$

这表明 当 $i\neq j$ 时 $\lambda_i^k\neq\lambda_j^k$ 否则 A^k 特征值个数 $<s$
互不相同的

故 $\lambda_1^k, \lambda_2^k \cdots \lambda_s^k$ 为 $\lambda_1 \cdots \lambda_s$ 的一个置换

若 $\lambda_i^k=\lambda_i$ 由可逆 $\Rightarrow \lambda^{k-1}=0$ $\Rightarrow$ λ 单位根

若不然：不妨设 $\lambda_2=\lambda_1^k$，$\lambda_2^k\neq\lambda_2$ ⇒ 若 $\lambda_2^k=1$ ⇒ $\lambda_1^{k^2}=1$ ⇒ λ_1 单位根

若不然，令 $\lambda_3=\lambda_2^k$ 再做…. 由于有限个元 $\lambda_\alpha^k=\lambda_1$

故 $\exists\, b\in\mathbb{Z}^+$ s.t. $\lambda_1^b=\lambda_1$ ⇒ $\lambda_1^{b-1}=1$ ⇒ λ_1 单位根

对 λ_2 做 …、对 λ_t 做 也同理可以证明 $\lambda_2,\dots,\lambda_t$ 也为单位根.

的多项式.

8. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆. 证明: $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^2$ 的充分必要条件是, 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的初等因子都是一次的.

P305: T8

证：

$$A=\begin{pmatrix} J_{1,1}(0) &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && J_{1,d_1}(0) &&&&& \\ &&& J_{2,1}(\lambda_1) &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& J_{2,d_2}(\lambda_1) && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& J_{t,1}(\lambda_{t-1}) \\ &&&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&&& J_{t,d_t}(\lambda_t)\end{pmatrix}$$

其中 λ_1 非0，λ_t 非0

记 $J_{i,j}$ 的阶数为 n_{ij}

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{d_i}\operatorname{rank}J_{i,j}$$

而易证明 $\operatorname{rank}(J_{ij})$ 满秩

$$\operatorname{rank}(J_{ij}(0))=\begin{cases} n_{ij}-1 & n_{ij}\geq 1\\ 0 & 0\end{cases}$$

$$\operatorname{rank}(A^2)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{d_i}\operatorname{rank}J_{ij}^2=\sum_{i=2}^{t}\sum_{j=1}^{d_i}\operatorname{rank}J_{ij}+\sum_{j=1}^{d_1}\operatorname{rank}J_{1j}^2(0)$$

$$=\sum\begin{cases} n_{ij}-2 & n_{ij}\geq 2\\ 0, & 其它\end{cases}+\sum_{i=2}^{t}\sum_{j=1}^{d_i}\operatorname{rank}J_{ij}$$

比较两边把 $\sum_{i=2}^{t}\sum_{j=1}^{d_i}J_{ij}$ 去掉

故 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(A^2)$ ⟺ $n_{ij}=1$ ⟺ 特征值0的初等因子1次

相似于对角形，但不实相似于对角形.

2. 设 $2k$ 维实线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式 $d(\lambda)$ 为 $d(\lambda)=(\lambda^2+a\lambda+b)^k$，其中 a,b 为实数，且 $a^2-4b<0$. 证明：存在 V 的基，使得线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的方阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & -a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & -a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \cdots\cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b & -a \end{pmatrix}.$$

(P304. T2)

模

(方法一)：证明：我们证明 $A \sim \begin{bmatrix} 0 & -b & & & & & & \\ 1 & -a & & & & & & \\ & 1 & 0 & -b & & & & \\ & & 1 & -a & & & & \\ & & & 1 & 0 & -b & & \\ & & & & 1 & -a & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & 0 & -b \\ & & & & & & 1 & -a \end{bmatrix}$

找基

由于 最小多项式为特征多项式 故 A为循环变换

$\Rightarrow \exists$ 向量 α_1, s.t. α_1为A的循环向量, V为循环空间

故 $\{\alpha_1, A\alpha_1, A^2\alpha_1, \ldots, A^{2k-1}\alpha_1\}$ 为一组基

考虑 $\{\alpha_1, A\alpha_1, \underbrace{A^2\alpha_1+aA\alpha_1+b\alpha_1}_{\alpha_2}, A(\alpha_2), \underbrace{A^2\alpha_2+aA\alpha_2+b\alpha_2}_{\alpha_3}, A\alpha_3, \ldots, \underbrace{A^2\alpha_{k-1}+aA\alpha_{k-1}+b\alpha_{k-1}}_{\alpha_k}, A\alpha_k\}$

仍然为一组V的基

事实上该组基为：

Claim: $\{\alpha_1, A\alpha_1, (A^2+aA+b)\alpha_1, A(A^2+aA+b)\alpha_1, \ldots, (A^2+aA+b)^s\alpha_1, A(A^2+aA+b)^s\alpha_1, \ldots, (A^2+aA+b)^{k-1}\alpha_1, A(A^2+aA+b)^{k-1}\alpha_1\}$

这个 claim 可以用数学归纳法证明

即证明 $\alpha_i = (A^2+aA+b)^{i-1}\alpha_1$

当 $i=1$ 时显然成立

$\alpha_s = (A^2+aA+b)^{s-1}\alpha_1$

$A\alpha_s = A(A^2+aA+b)^{s-1}\alpha_1$

$\alpha_{s+1} = A^2\alpha_s + aA\alpha_s + b\alpha_s = (A^2+aA+b)(A^2+aA+b)^{s-1}\alpha_1 = (A^2+aA+b)^s\alpha_1$

故上述基为

$\{\alpha_1, A\alpha_1, (A^2+aA+b)\alpha_1, A(A^2+aA+b)\alpha_1, \dots, (A^2+aA+b)^s\alpha_1, A(A^2+aA+b)^s\alpha_1, \dots, (A^2+aA+b)^{k-1}\alpha_1, A(A^2+aA+b)^{k-1}\alpha_1\}$

而 $(A^2+aA+b)^k\alpha_1=0$ 即 $(A^2+aA+b)(A^2+aA+b)^{k-1}\alpha_1=0$

代入得

$$A\left(A(A^2+aA+b)^{k-1}\alpha_1\right)+a\left(A(A^2+aA+b)^{k-1}\alpha_1\right)+b(A^2+aA+b)^{k-1}\alpha_1=0$$

故在此基下矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & -b & & & & \\ 1 & -a & & & & \\ & 1 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & -b \\ & & & & 1 & -a \end{bmatrix} = A$$

由于 A 与 A^T 复相似，由 A 为实矩阵，$\Rightarrow$ A 与 A^T 实相似

故 V 上存在基 s.t. 在基下矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -b & -a & 1 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & -b & -a & 1 & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & -b & -a & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & -b & -a & 1 \\ & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & -b & -a \end{bmatrix}$$

证法二：(用行列式因子)

由于 A 最小多项式为 $(\lambda^2+a\lambda+b)^k$

在 $\mathbb{C}$ 上分解为 $(\lambda-\tau)^k(\lambda-\bar{\tau})^k$ $\quad \tau=-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}i$

故 A 在 $\mathbb{C}$ 上的 Jordan 标准型为：$\mathrm{diag}\,(J_k(\varepsilon), J_k(\bar{\varepsilon}))$

$\Rightarrow$ 行列式因子：$D_1 = \cdots = D_{2k-1} = 1$，$D_{2k} = (\lambda^2 + a\lambda + b)^k$

我们计算
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -b & -a & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -b & -a & \ddots & & \\ & & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -b & -a \end{bmatrix}$$
的行列式因子。

注意到，取红色的 1 时可以直接算出 $D_1 = D_2 \cdots = D_{2k-1} = 1$，

而 D_{2k} 也即整个行列式，用 Laplace 展开

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{vmatrix}_2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ -b & -a & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -b & -a \end{vmatrix}_{2k-2}$$

用数学归纳法 $(\lambda^2 + a\lambda + b)^k$

故两矩阵的行列式因子相同，故复相似

而两矩阵是实的，故也实相似