第十一周、第十二周作业答案

(P247. T1)(2)

1. 设 n 阶复方阵 A 满足 $A^k = I_{(n)}$，k 为正整数. 证明：方阵 A 相似于对角方阵.

想法：用最小多项式无重根 $\Leftrightarrow$ 可对角化

证明：由 $A^k = I_n$ 知，在 $\mathbb{C}$ 上有

$f(x) = x^k - 1$ 为一个零化多项式

而 $f'(x) = kx^{k-1}$　　$(f'(x), f(x)) = 1$

故 $f(x)$ 无重根，而最小多项式 $m(x) \mid f(x)$

$\Rightarrow$ $m(x)$ 无重根，故 A 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化

(P247. T2)

2. 如果方阵 N 满足 $N^k = 0$，k 为正整数，则方阵 N 称为幂零方阵. 使得 $N^k = 0$ 的最小正整数 k 称为幂零方阵 N 的**幂零指数**. 证明：幂零指数为 n 的 n 阶幂零复方阵 N 相似于

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

想法：考虑 $\{\alpha, A\alpha, \ldots, A^{n-1}\alpha\}$

证明：由于 N 指数为 k，取线性空间 K^n，线性变换为 A

其中 A 在 K^n 标准基下矩阵为 N，则 A 为幂零指数为 n 的幂零变换

$\Rightarrow$ $\exists\ \alpha \in K^n$, s.t. $A^{k-1}\alpha \neq 0$ 但 $A^k\alpha = 0$

下证 $\{\alpha, A\alpha, \ldots, A^{n-1}\alpha\}$ 为一组基

由于 $\{\alpha, A\alpha, \ldots, A^{n-1}\alpha\}$ 个数为 n

故只需证明它们线性无关即可

若 $k_0\alpha+k_1A\alpha+\cdots+k_{n-1}A^{n-1}\alpha=0$

两边用 A^{n-1} 作用 $\Rightarrow$ $k_0A^{n-1}\alpha=0$ 而 $A^{n-1}\alpha\neq0\Rightarrow k_0=0$

再用 A^{n-2} 作用 $\Rightarrow k_1=0$

⋮

再用 A 作用 $\Rightarrow k_{n-1}=0$ 故 $\alpha, A\alpha, \ldots, A^{n-1}\alpha$ 线性无关

故 $\alpha, A\alpha, \ldots, A^{n-1}\alpha$ 为一组基

故在 $\alpha, A\alpha, \ldots, A^{n-1}\alpha$ 基下，矩阵为 $\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{bmatrix}$

(特征值为0 Jordan块!)

(P247, T3)

$(0\ \ 0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 0)_{n\times n}$

3. 由于方阵 A 的 $\mathrm{tr}(A)$ 是方阵在相似下的不变量，因此定义线性变换 $\mathscr{A}: V\to V$ 在 V 的某组基下的方阵 A 的 $\mathrm{tr}(A)$ 为线性变换 $\mathscr{A}$ 的 $\mathrm{tr}(\mathscr{A})$. 证明：如果 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathrm{tr}(\mathscr{A})=0$，则存在 V 的一组基，使得线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的方阵的主对角元

都是0

证：对 n 归纳

当 $n=1$ 时 显然成立

当 n 时成立，当 $A\in F^{(n+1)\times(n+1)}$ 时：

(1) 若 $a_{11}=0$ 则 $A=\begin{pmatrix}0 & \beta^T\\ \alpha & B\end{pmatrix}$

此时 $\mathrm{tr}A=0\Rightarrow \mathrm{tr}(B)=0$，由归纳假设

$\exists$ 可逆阵 P，$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}0 & *\\ * & \ddots\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & * \\ * & \begin{pmatrix}0 & * \\ * & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

(2) 若 $a_{11}\neq 0$，且 ∃ $a_{i1}\neq 0$, for some $2\le i\le n+1$,

此时 取 $Q = I_{(n+1)} - a_{i1}^{-1} a_{11} E_{i1}$

此时 QAQ^{-1} 适用于(1) 故当 $n+1$ 时成立.

(3) $a_{11}\neq 0$, ∃ $a_{1j}\neq 0$, $2\le j\le n+1$, 用(2)的方法 化为(1)

(4) $a_{11}\neq 0$, 且 $2\le i\le n+1$, $2\le j\le n+1$, $a_{i1}=a_{1j}=0$, 因 $a_{11}\neq 0$, $tr(A)=0$

$\Rightarrow$ ∃ $2\le k\le n+1$, st $a_{11}-a_{kk}\neq 0$, 设 $Q=I_{(n+1)}+E_{1k}$

$\Rightarrow$ QAQ^{-1} 的$(1,1)$位置 $a_{11}\neq 0$, $(k,1)$位置为 $a_{11}-a_{kk}\neq 0$

$tr(QAQ^{-1})=0$ 化为(2)

以上表明，在4种情形下，A均可相似为 $\begin{bmatrix}0 & * \\ * & 0\end{bmatrix}$

(P247.T7)

明：线性变换 $\mathscr{A}$ 在 U 上的限制 $\mathscr{A}|_U$ 也是可对角化的.

7. 取定 n 阶复方阵 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，定义线性变换 $\mathscr{A}_1:\mathbf{C}^{n\times n}\to\mathbf{C}^{n\times n}$ 与 $\mathscr{A}_2:\mathbf{C}^{n\times n}\to\mathbf{C}^{n\times n}$ 如下：

$$\mathscr{A}_1(X) = AX,\quad X\in\mathbf{C}^{n\times n},$$
$$\mathscr{A}_2(X) = AX - XA,\quad X\in\mathbf{C}^{n\times n}.$$

如果方阵 A 可对角化，问线性变换 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 是否也可对角化？

可以对角化,

若 $A=P\Lambda P^{-1}$ $\quad P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 可逆, $\Lambda=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$,

设 $\{E_{ij}, 1\le i\le n, 1\le j\le n\}$ 为 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 标准基, 定义

$F_{ij}=PE_{ij}P^{-1}$ $\Rightarrow$ F_{ij} 为 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 一组基

且有 $\mathcal{A}_1(F_{ij}) = P\Lambda P^{-1}PE_{ij}P^{-1} = \lambda_i F_{ij}$

$\mathscr{A}_2(F_{ij}) = P\Lambda E_{ij}P^{-1} - PE_{ij}\Lambda P^{-1} = (\lambda_i-\lambda_j)PE_{ij}P^{-1} = (\lambda_i-\lambda_j)F_{ij}$

故证明 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 在基 $\{F_{ij}\}$ 下都可对角化.

(P259, T3)

是特征向量.

③ 证明：n 维复线性空间 V 的非零向量都是线性变换 $\mathscr{A}$ 的根向量的充分必要条件是，线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值都相同.

证明：充分性：若 $\mathscr{A}$ 的特征值相同，

则 $\mathscr{A}$ 特征多项式为 $f(x) = (x-a)^n$ $\quad a \in \mathbb{C}$

特征根空间分解定理 $V = \ker(aI-\mathscr{A})^n$

必要性：设 $f(x) = (x-\lambda_1)^{r_1} \cdots (x-\lambda_t)^{r_t}$ 为 $\mathscr{A}$ 特征多项式，$\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ 两两不同

由特征根空间分解定理

$V = \ker(\lambda_1 I-\mathscr{A})^{r_1} \oplus \cdots \oplus \ker(\lambda_t I-\mathscr{A})^{r_t}$

若任何一个向量都为根向量 则 $t=1$ $\Rightarrow f(x) = (x-\lambda)^n$ #

(P219, T4)

4. 设 W 是数域 F 上 n 维线性空间 V 到自身的所有线性映射构成的线性空间，$\mathscr{A} \in W$，且 $\rho(\mathscr{A}) = k$. 定义线性映射 $\mathscr{T}_{\mathscr{A}}: W \to W$ 如下：设 $\mathscr{X} \in W$，令 $\mathscr{T}_{\mathscr{A}}(\mathscr{X}) = \mathscr{A}\mathscr{X}$. 求 $\rho(\mathscr{T}_{\mathscr{A}})$ 与 $\nu(\mathscr{T}_{\mathscr{A}})$.

结论：$\rho(\mathscr{T}_{\mathscr{A}}) = nk$ $\quad \nu(\mathscr{T}_{\mathscr{A}}) = n(n-k)$

证明：由于 在 V 中取一组基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$

$\forall \mathscr{A}, \mathscr{B} \in W$ $\quad \mathscr{A}, \mathscr{B}$ 在基下矩阵为 A, B,

则有 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 在 $\{e_1 \ldots e_n\}$ 下矩阵为 AB

由于 $\phi: W \to M_n(F)$ 是线性空间同构

其中 $\phi(A) = A$ 即在 $E_{11}\dots$ 的基下矩阵

只需证明

$$F_A: M_n(F) \to M_n(F) \quad \text{这个线性映射秩为 } nk \text{ 即可}$$
$$F_A(X) = AX$$

注意 $M_n(F)$ 中有天然一组基 E_{ij}，E_{ij} 为第 (i,j) 位置为 1

其余位置为 0 的矩阵

$$\text{而}\quad AE_{ij} = \begin{array}{c} \text{j位置} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \text{ 且 } M_n(F) = \begin{pmatrix} * & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$$

即列空间直和

$AE_{ij} \subset Col(j)$，$Col(j)$ 为 $M_n(F)$ 的 j 列空间

$$\text{故}\quad \rho(F_A) = \dim(\mathrm{Im} F_A) = \dim(\mathrm{Im}(F_A(\mathrm{span}_F(E_{11}, E_{21}, \dots E_{n1}))) + \dim(\mathrm{Im}(F_A(\mathrm{span}_F(E_{12}, E_{22}, \dots E_{n2}))) + \cdots + \dim(\mathrm{Im}(F_A(\mathrm{span}_F(E_{1n}, E_{2n}, \dots E_{nn})))$$

(由于每一项都映至不同的直和项!!)

而 $\dim(\mathrm{Im}(F_A(\mathrm{span}_F(E_{1j}, E_{2j}, \dots E_{nj})))$ 为 A 的列向量线性组合出来的空间维数

而 $\mathrm{rank}(A) = k$ 故 A 列空间维数为 k

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(F_A(\mathrm{span}_F(E_{1j}, \dots E_{nj}))) = k$$

故 $\rho(F_A) = nk$，由维数定理 $\nu(F_A) = n(n-k)$

8. 设 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 可交换. 证明：线性变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 具有公共特征向量. 进而证明：设 I 是下标集合，V 的线性变换集合 $\{\mathscr{A}_\nu : \nu\in I\}$ 中任意两个线性变换 $\mathscr{A}_{\nu_1}$ 与 $\mathscr{A}_{\nu_2}$ 可交换，则线性变换 $\mathscr{A}_\nu$，$\nu\in I$ 具有公共特征向量.

证明：若 A, B 交换，则 A 的特征子空间为 B 不变子空间

由于 A 为复线性变换，必有特征子空间，记为 V_λ

且 V_λ 为 B 不变子空间，而 B 为 V_λ 上复线性变换

故有特征向量 v, s.t. $B(v)=\lambda' v$. 而 $v\in V_\lambda$

$\Rightarrow$ v 为 A, B 公共特征向量

我们用归纳法证明：

当 $n=1$ 时，显然成立.

当 $n<k$ 时成立

当 $n=k$ 时

取 A_{ν_0} $\nu_0\in I$，的一个特征子空间 V_λ

则 V_λ 为 A_ν, $\nu\in I$ 的不变子空间

若 $V_\lambda\neq V$，则 $\dim V_\lambda<n$

由归纳假设 V_λ 中有公共特征向量.

若 $V_\lambda=V$ 则换 $\nu_0\in I$, s.t. $V_\lambda\neq V$，这样可以做到

若不然，$\forall\,\nu\in I$ $V_\lambda=V$，则 $\forall\, v\in V$，

v 为全体 A_ν 的公共特征向量

综上 A_ν $\nu\in I$ 有公共特征向量

(P258.T3)

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{M}$ 是 k 阶方阵，$k\leqslant n$，且存在 $n\times k$ 列满秩矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PM}$. 证明：方阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值一定是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证明：设 λ 是 M 的特征值且 $x\in F^k$ 为 λ 的特征向量，即 $Mx=\lambda x$，$x\neq 0$

在 $AP=PM$ 两边同时乘 x 得到 $APx=PMx=\lambda Px$，记 Px 为 y

则上式化为 $Ay=\lambda y$，由 $\operatorname{rank}(P)=k \Rightarrow$ 解空间 $V_P:\{x\in F^k \mid Px=0\}$

维数为 $k-k=0$ 因此，由 $x\neq 0$ 可知，$y=Px\neq 0$ $\Rightarrow y$ 为 A 的特征值 λ

的特征向量

(P268.5)

5. 设 $\mathscr{A}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换. 如果存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_0\in V$，使得由向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 生成的循环的子空间 $C_0=V$，则 $\mathscr{A}$ 称为循环变换，向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 称为 $\mathscr{A}$ 的循环向量. 证明：$\mathscr{A}$ 为循环变换的充分必要条件是，存在 V 的基，使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的方阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

由此证明，$\mathscr{A}$ 为循环变换的充分必要条件是，$\mathscr{A}$ 的最小多项式等于 $\mathscr{A}$ 的特征多项式. 注：形如

$\boldsymbol{A}$ 的方阵称为友方阵.

证明：必要性：

Claim：$\{\alpha_0, A\alpha_0, \ldots, A^{n-1}\alpha_0\}$ 为一组基

我们只需证明它们线性无关即可，因为 $\dim V=n$，

若 $\{\alpha_0, A\alpha_0, \ldots, A^{s-1}\alpha_0\}$ $s<n$ 时无关

$\{\alpha_0, A\alpha_0, \ldots, A^{s-1}\alpha_0, A^s\alpha_0\}$ 线性相关

则 $A^s\alpha_0$ 可以被 $\{\alpha_0, A\alpha_0, \ldots, A^{s-1}\alpha_0\}$ 表出

设为 $A^s\alpha_0=k_0\alpha_0+k_1A\alpha_0+\ldots+k_{s-1}A^{s-1}\alpha_0$

这表明 $\{\alpha_0, \ldots, A^{s-1}\alpha_0\}$ 为 α_0 生成的循环空间维数 $<n$

而 α_0 生成的循环空间维数为 n，矛盾！

故 $\{\alpha_0, A\alpha_0, \dots, A^{n-1}\alpha_0\}$ 为一组基

则 $A^n(\alpha_0) = A(A^{n-1}\alpha_0) = -a_0\alpha_0 - a_1 A\alpha_0 - \dots - a_{n-1}A^{n-1}\alpha_0$

故 A 在基 $\{\alpha_0, A\alpha_0, \dots, A^{n-1}\alpha_0\}$ 下矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & 1 \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

充分性：若 $\exists$ 一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ s.t

在此基下矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$

则 $A(\alpha_1) = \alpha_2$, $A(\alpha_2) = \alpha_3$, …, $A(\alpha_{n-1}) = \alpha_n$, $A(\alpha_n) = -a_0\alpha_1 - a_1\alpha_2 - \dots - a_{n-1}\alpha_n$

而由 α_1 生成的循环空间为 $\{\alpha_1, A\alpha_1, A^2\alpha_1, \dots, A^{n-1}\alpha_1, A^n\alpha_1, \dots, A^k\alpha_1\}$

而 $A^n(\alpha_1) = A(\alpha_n)$ 可以由 $\{\alpha_1, A\alpha_1, \dots, A^{n-1}\alpha_1\}$ 表出

故 α_1 生成的循环空间为 $\mathrm{span}\{\alpha_1, A\alpha_1, \dots, A^{n-1}\alpha_1\} = V$

#

对于第二问：（这里用 Jordan 标准型比较好办法，但我仍想走一遍

Jordan 标准型是自己的基

① 根子空间分解

② 循环空间分解

必要性：若 A 为循环变换，由上一问知

$\exists$ 循环向量 α_1，在一组基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 下矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

它的特征多项式为：$f(\lambda)=$

$$\begin{vmatrix} \lambda & & & & a_0 \\ -1 & \lambda & & & \vdots \\ & -1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \lambda & \\ & & & -1 & \lambda+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

按最后一列展开

$= \lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0$

由于最小多项式 $m(x) \mid f(x)$，$\deg m(x) \leq \deg f(x)$，

若 $\deg m(x) < f(x)$，

设 $m(x)= x^s+b_{s-1}x^{s-1}+\dots+b_1x+b_0$

$m(A)=0 \Rightarrow (m(A))(\alpha_1) \to (A^s+b_{s-1}A^{s-1}+\dots+b_1A+b_0I)(\alpha_1)=0$

$\Rightarrow \alpha_{s+1}+b_{s-1}\alpha_s+\dots+b_1\alpha_2+b_0\alpha_1=0$

$\Rightarrow \alpha_{s+1}=-b_{s-1}\alpha_s-\dots-b_1\alpha_2-b_0\alpha_1$，由 $s<n$ 和 $s+1\leq n$

这说明此空间可以由 $\{\alpha_1, A\alpha_1, \dots, A^{s}\alpha_1\}$ 线性生成

从而 $\dim V<n$ 矛盾!!

故友矩阵 A 的最小多项式为特征式

充分性：(也是类似的说法)

若最小多项式 $m(x)=$ 特征多项式 $f(x)$

设 $m(x)=f(x)= x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$

唯一因式分解

$p_1^{r_1}(x)\dots p_t^{r_t}(x)$，$p_1,\dots,p_t$ 为两两不同不可约多项式

根子空间分解：$V = \ker(p_1^{r_1}(A)) \oplus \ker(p_2^{r_2}(A)) \oplus \cdots \oplus \ker(p_t^{r_t}(A))$

注意：其中每个 $\ker(p_i^{r_i}(A))$ 为 A 不变子空间

考虑对于每个 i，$A|_{\ker(p_i^{r_i}(A))}$ 为 $\ker(p_i^{r_i}(A))$ 上的线性变换

由于根子空间分解定理证明过程，知

当 $j \neq i$ 时 $p_j(A)$ 为 $\ker(p_i^{r_i}(A))$ 上可逆线性变换

(回忆一下证明过程，用到 Bezout 等式)

由于 $m(x)$ 为 A 的最小多项式

故 $p_i^{r_i}(x)$ 为 $A|_{\ker(p_i^{r_i}(A))}$ 上最小多项式

我们 claim：对于每个 i，$A|_{\ker(p_i^{r_i}(A))}$ 为循环变换

令 $A_i := A|_{\ker(p_i^{r_i}(A))}$

$V_i := \ker(p_i^{r_i}(A))$ 即 V_i 为 A 的关于 $p_i^{r_i}(x)$ 的根子空间

取 V_i 一组基 $\{w_1, \ldots, w_s\}$

由于 $p_i^{r_i}(x)$ 为 A_i 的最小多项式

$\Rightarrow$ w_j 的最小多项式为 $p_i^{e_j}(x)$ $(1 \le j \le s)$ $e_j \le r_i$

若对于每个 $1 \le j \le s$，$e_j < r_i$，即对于这组基上每个元素 w_j 上的最小多项式不为 $p_i^{r_i}(x)$ 的话，

故 $e_1, \ldots, e_s$ 中最大的记为 e，则 $e < r_i$

$\Rightarrow$ $(p_i^{e}(A))(k_1 w_1 + \cdots + k_s w_s) = 0$ 故 A_i 的最小多项式整除 $p_i^{e}(A)$

而 A_i 最小多项式为 $p_i^{r_i}(x)$

$r_i > e$，矛盾

故一定存在 $\alpha_i \in V_i$，st α_i 为 V_i 上的循环向量

现由于 $V = \ker(p_1^{n_1}(\mathcal{A})) \oplus \ker(p_2^{n_2}(\mathcal{A})) \oplus \cdots \oplus \ker(p_t^{n_t}(\mathcal{A}))$

$\quad\quad\quad\quad\| \quad\quad\quad\quad \| \quad\quad\quad\quad\quad\quad \|$

$\quad\quad\quad\quad V_1 \quad\quad\quad\quad V_2 \quad \cdots \quad\quad\quad V_t$

同刚刚证明对于每个 V_i 都为循环空间,

即对于每个 V_i,都有循环向量 $\alpha_i \in V_i$,

令 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t$,下证 α 为 $\mathcal{A}$ 的一个循环向量

Claim: α 为一个循环向量

设 $\alpha \in V$ 的最小化零多项式为 $\varphi(x)$

则 $\varphi(x) \mid m(x)$,设 $\varphi(x) = p_1^{e_1}(x) \cdots p_t^{e_t}(x)$

若 $e_i < n_i$,

$(\varphi(\mathcal{A}))(\alpha) = \varphi(\mathcal{A})(\alpha_1) + \varphi(\mathcal{A})\alpha_2 + \cdots + \varphi(\mathcal{A})(\alpha_i) + \cdots + \varphi(\mathcal{A})(\alpha_t)$

考虑到 $\varphi(\mathcal{A})(\alpha_i) = (p_1^{e_1}(\mathcal{A}) \cdots p_t^{e_t}(\mathcal{A}))(\alpha_i)$

$= (p_1^{e_1}(\mathcal{A}) \cdots \widehat{p_i^{e_i}(\mathcal{A})} \cdots p_t^{e_t}(\mathcal{A}))((p_i^{e_i}(\mathcal{A}))(\alpha_i))$

由于 $(p_i^{e_i}(\mathcal{A})(\alpha_i)) \neq 0$ (因 α_i 为 V_i 上循环向量)

所以当 $j \neq i$ 时 $p_j^{e_j}(\mathcal{A})$ 在 V_i 上为可逆线性变换

故上式不为 0

由于 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_t$ 为 $\mathcal{A}$ 不变子空间直和

且 $(\varphi(\mathcal{A}))(\alpha_i) \in V_i$

故与 $\varphi(x)$ 为 α 的零化多项式矛盾!

故 $e_i = n_i \Rightarrow \alpha$ 的最小多项式为 $m(x)$

于是，我们证明了：在空间 V 上，一定有非零元素 $\alpha\in V$，

s.t. α 的最小多项式为 $m(x)$

由此，可知 $\{\alpha, \mathscr{A}\alpha, \dots, \mathscr{A}^{n-1}(\alpha)\}$ 线性无关

（若不然，α 的最小多项式次数严格小于 $\deg m(x)$）

由于 $\dim V = n$ 故 $\{\alpha, \mathscr{A}\alpha, \dots, \mathscr{A}^{n-1}\alpha\}$ 为一组基，

在此基下矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ 证明 #

P259 T7

7.（Fitting）设 $\mathscr{A}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换．证明：存在线性变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 V_1 与 V_2，使得 $V=V_1\oplus V_2$，并且线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V_1 上的限制 $\mathscr{A}|_{V_1}$ 是可逆的，而在 V_2 上的限制 $\mathscr{A}|_{V_2}$ 是幂零的．简单地说，任意线性变换 $\mathscr{A}$ 都可以分解为可逆线性变换 $\mathscr{A}|_{V_1}$ 与幂零交换 $\mathscr{A}|_{V_2}$ 的直和．（注意，如果数域 F 是复数域，则本题可用空间第一分解定理加予证明．这里要求给出一个不用空间第一分解定理的证明．）

这里如果“寻求大炮”一下，可以用 Jordan 标准型去“杀鸡用牛刀”

$$J=\begin{bmatrix} \begin{matrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1\end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix}\lambda_2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2\end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix}\lambda_n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{matrix} \end{bmatrix}$$

若$\lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_t$都不为零，则 J为可逆阵

若$\exists\lambda_i$，$\lambda_i=0$，把 所有 $\lambda_i=0$的Jordan块拿出来，根据空间，为A零直空间，剩余的可逆的

我们给出一个不用Jordan标准型的证明

证明：考虑 $\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(A^2)\ldots\mathrm{rank}(A^k)\ldots$

①若$\exists k$ s.t. $\mathrm{rank}(A^k)=0$，则 $A^k=0$，即A为零变换 则证完

② 若 $\mathrm{rank}A^k=\mathrm{rank}(A^{k+1})=\mathrm{rank}(A^{k+2})\ldots$

由于 $\mathrm{Im}(A^{k+1})\subseteq \mathrm{Im}(A^k)$，$\Rightarrow A^k=A^{k+1}=A^{k+2}=\ldots$

$\Rightarrow A^k$为幂等变换

$\Rightarrow V=\mathrm{Im}(A^k)\oplus\ker(A^k)$

对于 $\mathrm{Im}(A^k)$，由于 $\dim(A(\mathrm{Im}A^k))=\mathrm{rank}(A^{k+1})=\mathrm{rank}(A^k)=\dim(\mathrm{Im}(A^k))$

故 A在$\mathrm{Im}(A^k)$上为可逆的

A在$\ker(A^k)$上幂零（因$A^k(\ker A^k)=0$）

(P159 T10)

10. 设数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式为 $d(\lambda)=p_1^{m_1}(\lambda)p_2^{m_2}(\lambda)\cdots p_t^{m_t}(\lambda)$，其中 $p_1(\lambda),p_2(\lambda),\cdots,p_t(\lambda)$是数域 F 上互不相同的首一不可约多项式. 并设 W_j 是线性变换 $p_j^{m_j}(\mathscr{A})$的核. 证明：

(1) $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_t$；

(2) 线性变换 $\mathscr{A}$ 在 W_j 上的限制 $\mathscr{A}|_{W_j}$ 的最小多项式为 $p_j^{m_j}(\lambda)$，$j=1,2,\cdots,t$.

(1) 可以逐字逐句重复空间第一分解证明

(2) 注意到，当 $i \neq j$ 时 $p_i^{r_i}(\mathcal{A})$ 在 W_j 上为可逆线性变换

故 $\mathcal{A}|_{W_i}$ 上最小多项式必为 $p_i^{l_i}(x)$ 且 $l_i \le r_i$

若 $l_i < r_i$，则 $\left(p_i^{l_i}(\mathcal{A})\right)(W_i) = 0$

$\Rightarrow \left(p_1^{r_1} \cdots p_{i-1}^{r_{i-1}} p_i^{l_i} p_{i+1}^{r_{i+1}} \cdots p_t^{r_t}\right)(V) = 0$

故有零化多项式 $\underbrace{p_1^{r_1} \cdots p_{i-1}^{r_{i-1}} p_i^{l_i} p_{i+1}^{r_{i+1}} \cdots p_t^{r_t}}$ 零化了 $\mathcal{A}$

与 $\mathcal{A}$ 最小多项式为 $p_1^{r_1} \cdots p_i^{r_i} \cdots p_t^{r_t}$ 矛盾!

故 $\mathcal{A}|_{W_i}$ 上最小多项式为 $p_i^{r_i}(x)$

(2) 求线性变换 $\mathcal{A}|_{W_1}$ 与 $\mathcal{A}|_{W_2}$ 分别在所求基下的方阵 $A_j, j = 1,2$.

12. 设 3 维实向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在标准基下的方阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

求可对角化线性变换 $\mathscr{D}$ 与幂零变换 $\mathscr{N}$，使得 $\mathscr{A} = \mathscr{D} + \mathscr{N}$，且 $\mathscr{D}\mathscr{N} = \mathscr{N}\mathscr{D}$.

(P258. T12)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

证明：求特征多项式：$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$

方法一：到这里，直接可用 Jordan 标准型，取某组基，在此基下矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathscr{D} \qquad \mathscr{N}$

方法二:(不用Jordan标准型)

令 $W_1 = \ker((\mathcal{A}-2)^2) \oplus \ker(\mathcal{A}-1)$

解 $(A-2I)X=0$ 得一个特征向量 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

解 $(A-I)X=0$ 得一个特征向量 $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

解 $(A-2I)^2X=0$ 得到一个解 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ker((\mathcal{A}-2)^2) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\ker((\mathcal{A}-I)) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$

令 $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\2&1&2\end{pmatrix}$ 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

即在基 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ 下，矩阵为 $\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}=B$

记B为上述矩阵，则 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

记 D 为 $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

N 为 $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

则 $DN=ND$ #

(P268. T4)

项式.

4. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维复线性空间 V 的 k 次幂零变换，且 V 分解为循环子空间 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 的直和. $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 中维数为 j 的子空间的个数记为 n_j, $j=1,2,\cdots,k$. 证明：

(1) $\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{A}))=n_2+2n_3+\cdots+(k-1)n_k$；

(2) $n_j=\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{A}^{j+1}))+\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{A}^{j-1}))-2\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{A}^{j}))$, $j=1,2,\cdots,k$；

(3) V 本身是非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 生成的循环子空间的充分必要条件是，$\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{A}^j))=n-j$, $j=1,2,\cdots,n$.

证明(1) 由于 $V=C_1\oplus\cdots\oplus C_k$ 为幂零变换的循环子空间分解

且 每个循环子空间为 A 不变子空间

即 $\mathrm{Im}(A)=(\mathrm{Im}A)(C_1)\oplus\cdots\oplus(\mathrm{Im}A)(C_k)$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}A)=\sum_{i=1}^{k}\dim(\mathrm{Im}A)(C_i)$ ······ ①

而对于 $A|_{C_i}$ 下有一组基, s.t. 矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$

故 $\dim(\mathrm{Im}A)(C_i)=(\dim(C_i)-1)=$

故根据① 得 $\dim(\mathrm{Im}A)=n_2+2n_3+\cdots+(k-1)n_k$

(2) 这是个数"数"问题

接上, 我们在第一问中, 每个 C_i, $A|_{C_i}$ 下矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$

则 $A^2|_{C_i}$ 矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

⋮

$A^j|_{C_i}$ 矩阵为 $\begin{array}{c} \\ \\ j\rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ 0 & & \ddots & & & \\ 1 & & & \ddots & & \\ 0 & \ddots & 1 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\phantom{A^j|_{C_i}\text{ 矩阵为 }}\uparrow j$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}A^j)=\sum\dim(\mathrm{Im}(A^j|_{C_i}))=n_{j+1}+2n_{j+2}+\cdots+(k-j)n_k$

$\dim(\mathrm{Im}A^{j+1})=\sum\dim(\mathrm{Im}(A^{j+1}|_{C_i}))=n_{j+2}+2n_{j+3}+\cdots+(k-j-1)n_k$

$$\dim(\ker \mathscr{A}^{j+1}) = \sum \dim(\ker \mathscr{A}^{j+1}|_{V_i}) = n_j + 2n_{j+1} + \cdots + (k-j+1)n_k$$

代进去 $\Longrightarrow \dim(\ker \mathscr{A}^{j+1}) + \dim(\ker \mathscr{A}^{j-1}) - 2\dim(\ker \mathscr{A}^{j}) = n_j$

(P269.T8)

8. 证明：如果数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的二次幂 $\mathscr{A}^2$ 为循环变换，则 $\mathscr{A}$ 本身也是循环变换. 反之是否成立？

证明：若 $\mathscr{A}^2$ 为循环变换

则 $\exists\, \alpha \in V$, s.t. $\{\alpha, \mathscr{A}^2\alpha, \ldots, \mathscr{A}^{2n-2}\alpha\}$ 线性张成 V

而 $\{\alpha, \mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}^2\alpha, \mathscr{A}^3\alpha, \ldots, \mathscr{A}^{2n-1}\alpha, \mathscr{A}^{2n-2}\alpha\} \supseteq \{\alpha, \mathscr{A}^2\alpha, \ldots, \mathscr{A}^{2n-2}\alpha\}$

故它也线性张成 V $\Rightarrow$ $\mathscr{A}$ 也循环

反之不成立：考虑 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 上的幂零变换 φ，φ 为坐标平移.

$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$，则 φ 在标准基下矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Jordan块

若 φ^2 也循环，由于 φ^2 是幂零的，故 φ^2 在某组基下矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(\varphi^2) = n-1$ 而 我们算 $\varphi^2 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & \ddots & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\operatorname{rank}(\varphi^2) = n-2 \neq n-1$

故矛盾!! 故 反之不成立!

(P269. T10)

$\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 是循环向量.

10. 设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的可交换的线性变换，且 $\mathscr{A}$ 是循环变换. 证明：存在多项式 $f(\lambda)\in F[\lambda]$，使得 $\mathscr{B}=f(\mathscr{A})$.

证明：设 α_0 为 A 循环向量，则 $\{\alpha_0, A\alpha_0, \dots, A^{n-1}(\alpha_0)\}$ 为一组基.

$B(\alpha_0)=b_0\alpha_0+b_1A\alpha_0+\dots+b_{n-1}A^{n-1}(\alpha_0)=f(A)\alpha_0$,

其中 $f(x)=b_0+b_1x+\dots+b_{n-1}x^{n-1}$

下证 $B=f(A)$：

由 $AB=BA$，对于 $\forall j\in\{1,2,\dots,n-1\}$

有 $B(A^j\alpha_0)=A^j(B\alpha_0)=A^jf(A)\alpha_0=f(A)(A^j\alpha_0)$

$\Rightarrow \forall \alpha=\mu_0\alpha_0+\mu_1A\alpha_0+\dots+\mu_{n-1}A^{n-1}(\alpha_0)\in V$

$\Rightarrow B(\alpha)=\mu_0B(\alpha_0)+\mu_1B(A\alpha_0)+\dots+\mu_{n-1}B(A^{n-1}(\alpha_0))$

$=\mu_0f(A)(\alpha_0)+\mu_1f(A)(A\alpha_0)+\dots+\mu_{n-1}f(A)A^{n-1}\alpha_0$

$=f(A)(\mu_0\alpha_0+\mu_1A\alpha_0+\dots+\mu_{n-1}A^{n-1}(\alpha_0))=f(A)(\alpha)$

故 $B=f(A)$ #