第十周作业答案

涂嘉乐

2025 年 11 月 23 日

习题 1 (P223,T3) 设数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上子空间 U,W 的直和，则对 $\forall\alpha\in V$，存在唯一一堆向量 $\alpha\in U,\beta\in V,\text{s.t. }\alpha=\beta+\gamma$，定义映射 $\mathscr{A}:V\to V$ 如下

$$\begin{aligned}\mathscr{A}:V&\longrightarrow V\\ \alpha=\beta+\gamma&\longmapsto\beta\end{aligned}$$

映射 $\mathscr{A}$ 称为 V 沿子空间 W 在 U 上的投影变换，证明

(1) 投影变换是线性变换

(2) 线性变换 $\mathscr{B}:V\to V$ 是投影变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{B}$ 是幂等变换，即 $\mathscr{B}$ 满足 $\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$

(3) 线性变换 $\mathscr{B}:V\to V$ 是投影变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{I}-\mathscr{B}$ 是投影变换，其中 $\mathscr{I}$ 是单位映射

证明 (1). 对 $\forall\alpha_1,\alpha_2\in V$，设 $\alpha_i=\beta_i+\gamma_i,i=1,2$ 为直和分解，则

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2)&=\mathscr{A}((\lambda\beta_1+\mu\beta_2)+(\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2))\\&=\lambda\beta_1+\mu\beta_2=\lambda\mathscr{A}(\alpha_1)+\mu\mathscr{A}(\alpha_2)\end{aligned}$$

所以投影变换是线性变换

(2).($\Longrightarrow$) : 若 $\mathscr{B}$ 是投影变换，则 $\exists V$ 的子空间 $U,W,\text{s.t. }V=U\oplus W$，且对 $\forall\alpha\in V,\alpha=\beta+\gamma,\beta\in U,\gamma\in W$，有 $\mathscr{B}(\alpha)=\beta$，由于 β 的直和分解为 $\beta=\beta+0$，所以

$$\mathscr{B}^2(\alpha)=\mathscr{B}(\beta)=\beta,\quad\forall\alpha\in V\Longrightarrow\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$$

($\Longleftarrow$) : 假设 $\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$, 由第九周作业的 P219,T3 知, $\text{Im}(\mathscr{B})\cap\text{Ker}(\mathscr{B})=\{0\}$, 这说明 $\text{Im}(\mathscr{B})+\text{Ker}(\mathscr{B})$ 是直和，注意到 $\text{Im}(\mathscr{B})\oplus\text{Ker}(\mathscr{B})=\text{Im}(\mathscr{B})+\text{Ker}(\mathscr{B})\subseteq V$，且

$$\dim V=\dim(\text{Im}(\mathscr{B}))+\dim(\text{Ker}(\mathscr{B}))\xlongequal{\text{直和}}\dim(\text{Im}(\mathscr{B})\oplus\text{Ker}(\mathscr{B}))$$

这就推出 $V=\text{Im}(\mathscr{B})\oplus\text{Ker}(\mathscr{B})$，所以对 $\forall\alpha\in V$，存在唯一的 $\beta\in\text{Ker}(\mathscr{B}),\gamma\in\text{Im}(\mathscr{B}),\text{s.t. }\alpha=\beta+\gamma$，又因为 $\gamma\in\text{Im}(\mathscr{B})$，我们可设 $\gamma=\mathscr{B}(\delta)$，则

$$\mathscr{B}(\alpha)=\mathscr{B}(\beta)+\mathscr{B}(\gamma)=\mathscr{B}(\gamma)=\mathscr{B}^2(\delta)\overset{\mathscr{B}^2=\mathscr{B}}{=}\mathscr{B}(\delta)=\gamma$$

所以 $\mathscr{B}$ 是投影变换

(3). 由 (2) 知，只需证明 $\mathscr{B}$ 是幂等变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{I}-\mathscr{B}$ 是幂等变换

($\Longrightarrow$) : 若 $\mathscr{B}$ 是幂等变换，则

$$(\mathscr{I}-\mathscr{B})^2=\mathscr{I}-2\mathscr{B}+\mathscr{B}^2=\mathscr{I}-2\mathscr{B}+\mathscr{B}=\mathscr{I}-\mathscr{B}$$

$(\Longleftarrow)$：若 $\mathscr{I}-\mathscr{B}$ 是幂等变换，则 $(\mathscr{I}-\mathscr{B})^2=\mathscr{I}-2\mathscr{B}+\mathscr{B}^2=\mathscr{I}-\mathscr{B}\Longrightarrow\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$ □

习题 2 (P223,T8) 设 $\mathscr{A}:V\to V$ 与 $\mathscr{B}:V\to V$ 是幂等变换，即 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A},\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$，证明

(1) $\operatorname{Im}(\mathscr{A})=\operatorname{Im}(\mathscr{B})\iff\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B},\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$

(2) $\operatorname{Ker}(\mathscr{A})=\operatorname{Ker}(\mathscr{B})\iff\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{A},\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{B}$

证明 (1).$(\Longleftarrow)$：因为 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}$，所以 $\forall\beta\in\operatorname{Im}(\mathscr{B}),\exists\gamma\in V,\text{s.t. }\beta=\mathscr{B}(\gamma)=\mathscr{A}(\mathscr{B}(\gamma))\in\operatorname{Im}(\mathscr{A})$，所以 $\operatorname{Im}(\mathscr{B})\subseteq\operatorname{Im}(\mathscr{A})$，同理由 $\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$ 知 $\operatorname{Im}(\mathscr{A})\subseteq\operatorname{Im}(\mathscr{B})$，故二者相等

$(\Longrightarrow)$：若 $\operatorname{Im}(\mathscr{A})=\operatorname{Im}(\mathscr{B})$，对 $\forall\alpha\in V$，由于 $\mathscr{A}(\alpha)\in\operatorname{Im}(\mathscr{A})=\operatorname{Im}(\mathscr{B})$，所以 $\exists\beta\in V,\text{s.t. }\mathscr{A}(\alpha)=\mathscr{B}(\beta)$，所以

$$\mathscr{A}(\alpha)=\mathscr{B}(\beta)\xlongequal{\mathscr{B}^2=\mathscr{B}}\mathscr{B}^2(\beta)=\mathscr{B}(\mathscr{A}(\alpha))=\mathscr{B}\mathscr{A}(\alpha),\quad\forall\alpha\in V$$

$$\mathscr{B}(\beta)=\mathscr{A}(\alpha)\xlongequal{\mathscr{A}^2=\mathscr{A}}\mathscr{A}^2(\alpha)=\mathscr{A}(\mathscr{B}(\beta))=\mathscr{A}\mathscr{B}(\beta),\quad\forall\beta\in V$$

所以 $\mathscr{A}=\mathscr{B}\mathscr{A},\mathscr{B}=\mathscr{A}\mathscr{B}$

(2).$(\Longleftarrow)$：若 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{A}$，则 $\forall\alpha\in\operatorname{Ker}(\mathscr{A}),\mathscr{B}(\alpha)=\mathscr{B}(\mathscr{A}(\alpha))=0$，所以 $\alpha\in\operatorname{Ker}(\mathscr{B})\Longrightarrow\operatorname{Ker}(\mathscr{A})\subseteq\operatorname{Ker}(\mathscr{B})$，同理由 $\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{B}$ 知 $\operatorname{Ker}(\mathscr{B})\subseteq\operatorname{Ker}(\mathscr{A})$，故二者相等

$(\Longrightarrow)$：对 $\forall\alpha\in V,\mathscr{A}(\alpha-\mathscr{A}(\alpha))=\mathscr{A}(\alpha)-\mathscr{A}^2(\alpha)=0$，所以 $\alpha-\mathscr{A}(\alpha)\in\operatorname{Ker}(\mathscr{A})$，由上题知 $V=\operatorname{Ker}(\mathscr{A})\oplus\operatorname{Im}(\mathscr{A})$，故

$$\alpha=[\alpha-\mathscr{A}(\alpha)]+\mathscr{A}(\alpha)$$

为 α 在 $V=\operatorname{Ker}(\mathscr{A})\oplus\operatorname{Im}(\mathscr{A})$ 下的直和分解，同理 α 在 $V=\operatorname{Ker}(\mathscr{B})\oplus\operatorname{Im}(\mathscr{B})$ 有直和分解

$$\alpha=[\alpha-\mathscr{B}(\alpha)]+\mathscr{B}(\alpha)$$

由于 $\alpha-\mathscr{B}(\alpha)\in\operatorname{Ker}(\mathscr{B})=\operatorname{Ker}(\mathscr{A})$，所以 $\mathscr{A}(\alpha-\mathscr{B}(\alpha))=0$，同理 $\mathscr{B}(\alpha-\mathscr{A}(\alpha))=0$，因此

$$\mathscr{A}(\alpha)=\mathscr{A}([\alpha-\mathscr{B}(\alpha)]+\mathscr{B}(\alpha))=\mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha),\quad\forall\alpha\in V$$

$$\mathscr{B}(\alpha)=\mathscr{B}([\alpha-\mathscr{A}(\alpha)]+\mathscr{A}(\alpha))=\mathscr{B}\mathscr{A}(\alpha),\quad\forall\alpha\in V$$

所以 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{A},\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{B}$ □

习题 3 (P223,T11) 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2=0$，证明：方阵 A 相似于方阵

$$\begin{pmatrix}0 & M_{r\times(n-r)}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

证明 设 $\mathbb{F}^n$ 的一组基为 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，定义线性变换

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

设 $\operatorname{rank}(A)=r$，由 $\dim(\operatorname{Im}(\mathscr{A}))=\operatorname{rank}(A)$ 知，可设 $\operatorname{Im}(\mathscr{A})$ 的一组基为 $\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$，将它扩充为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基 $\{\beta_1,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n\}$，由于 $A^2=0$，所以

$$\mathscr{A}^2(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A^2=0$$

即 $\mathscr{A}^2=0$，因此对 $\operatorname{Im}(\mathscr{A})$ 的基 $\beta_i, 1\le i\le r, \exists\gamma_i\in\mathbb{F}^n, \text{s.t. } \beta_i=\mathscr{A}(\gamma_i)$，所以

$$\mathscr{A}(\beta_i)=\mathscr{A}(\mathscr{A}(\gamma_i))=\mathscr{A}^2(\gamma_i)=0,\quad 1\le i\le r$$

另一方面，对于 $r+1\le i\le n$，由于 $\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$ 是 $\operatorname{Im}(\mathscr{A})$ 的一组基，所以可设 $\mathscr{A}(\beta_i)=\sum\limits_{j=1}^{r}\lambda_j^{(i)}\beta_j$，所以在基 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 下我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\beta_1,\cdots,\beta_n)&=(0,\cdots,0,\sum_{j=1}^{r}\lambda_j^{(r+1)}\beta_j,\cdots,\sum_{j=1}^{(n)}\lambda_j^{(i)}\beta_j)\\&=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\lambda_1^{(r+1)}&\cdots&\lambda_1^{(n)}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&\lambda_r^{(r+1)}&\cdots&\lambda_r^{(n)}\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

习题 4 (P229,T3) 设 $\mathscr{A}:V\to V$ 是线性变换，$0\ne\alpha\in V$，证明：V 中向量

$$\alpha,\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}^2(\alpha),\cdots,\mathscr{A}^k(\alpha),\cdots$$

生成的子空间 U 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，设 $\dim U=r$，证明：$\{\alpha,\mathscr{A}(\alpha),\cdots,\mathscr{A}^{r-1}(\alpha)\}$ 是 U 的基，求 $\mathscr{A}|_U$ 在这组基下的方阵

证明 设 $\beta\in U$，则 $\exists\{i_1,\cdots,i_n\}\subseteq\mathbb{N}^*,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{F},\text{s.t.}$

$$\beta=\lambda_1\mathscr{A}^{i_1}(\alpha)+\cdots+\lambda_n\mathscr{A}^{i_n}(\alpha)\Longrightarrow\mathscr{A}(\beta)=\lambda_1\mathscr{A}^{i_1+1}(\alpha)+\cdots+\lambda_n\mathscr{A}^{i_n+1}(\alpha)\in U$$

所以 U 是 $\mathscr{A}$-不变子空间

由于 $\dim U=r$，要证 $\{\alpha,\mathscr{A}(\alpha),\cdots,\mathscr{A}^{r-1}(\alpha)\}$ 是 U 的基，只需证明它们线性无关，这里我们需要之前学过的一个定理：$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$ 线性相关 $\iff\exists 2\le m\le k,\text{s.t. }\alpha_m$ 可被 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}\}$ 线性表示

假设 $\{\alpha,\mathscr{A}(\alpha),\cdots,\mathscr{A}^{r-1}(\alpha)\}$ 线性相关，则 $\exists 1\le k\le r-1,\text{s.t. }\mathscr{A}^k(\alpha)$ 可被 $\{\alpha,\mathscr{A}(\alpha),\cdots,\mathscr{A}^{k-1}(\alpha)\}$ 线性表示，即 $\exists\lambda_0,\cdots,\lambda_{k-1}\in\mathbb{F},\text{s.t. }\mathscr{A}^k(\alpha)=\lambda_0\alpha+\lambda_1\mathscr{A}(\alpha)+\cdots+\lambda_{k-1}\mathscr{A}^{k-1}(\alpha)$，因此

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^{k+1}(\alpha)&=\lambda_0\mathscr{A}(\alpha)+\cdots+\lambda_{k-2}\mathscr{A}^{k-1}(\alpha)+\lambda_{k-1}\mathscr{A}^k(\alpha)\\&=\lambda_0\mathscr{A}(\alpha)+\cdots+\lambda_{k-2}\mathscr{A}^{k-1}(\alpha)+\lambda_{k-1}[\lambda_0\alpha+\lambda_1\mathscr{A}(\alpha)+\cdots+\lambda_{k-1}\mathscr{A}^{k-1}(\alpha)]\end{aligned}$$

即 $\mathscr{A}^{k+1}(\alpha)$ 可被 $\{\alpha,\cdots,\mathscr{A}^{k-1}(\alpha)\}$ 线性表示，由数学归纳法知 $\forall m\in\mathbb{N}^*,\mathscr{A}^m(\alpha)$ 均可被 $\{\alpha,\cdots,\mathscr{A}^{k-1}(\alpha)\}$ 线性表示，进而 $\dim(U)\le k\le r-1$，这与题设矛盾！因此 $\{\alpha,\mathscr{A}(\alpha),\cdots,\mathscr{A}^{r-1}(\alpha)\}$ 线性无关，是 U 的一组基 □

习题 5 (P229,T5) 设 V 是 n 维复线性空间，$\mathscr{A}:V\to V$ 是线性变换，证明：V 的每个子空间都是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 $\iff\mathscr{A}$ 为纯量变换，即 $\mathscr{A}=\lambda\mathscr{I},\lambda\in\mathbb{C}$

证明 $(\Longleftarrow)$：设 $U\subseteq V$ 是子空间，设 U 的一组基为 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$，则

$$\mathscr{A}(a_1\alpha_1+\cdots+a_r\alpha_r)=\lambda a_1\alpha_1+\cdots+\lambda a_r\alpha_r\in U$$

所以 U 是 $\mathscr{A}$-不变子空间

$(\Longrightarrow)$：任取 V 的一组基 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，则 $V_i\overset{\text{def}}{=}\operatorname{Span}\{\beta_i\}=\{a\beta_i|a\in\mathbb{C}\}$ 是 V 的子空间，由于它是 $\mathscr{A}$-不变子空间，所以 $\exists\lambda_i\in\mathbb{C},\text{s.t. }\mathscr{A}(\beta_i)=\lambda_i\beta_i$，所以

$$\mathscr{A}(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

接下来证明 $\lambda_i=\lambda_j,\forall i\neq j$，考虑 V 的子空间 $V_{ij}\overset{\text{def}}{=}\operatorname{Span}\{\beta_i+\beta_j\}=\{a(\beta_i+\beta_j)|a\in\mathbb{C}\}$，由它是 $\mathscr{A}$-不变子空间知，$\exists\lambda_{ij}\in\mathbb{C},\text{s.t. }\mathscr{A}(\beta_i+\beta_j)=\lambda_{ij}(\beta_i+\beta_j)$，又因为 $\mathscr{A}(\beta_i+\beta_j)=\lambda_i\beta_i+\lambda_j\beta_j$，所以

$$(\lambda_i-\lambda_{ij})\beta_i+(\lambda_j-\lambda_{ij})\beta_j=0\Longrightarrow\lambda_i=\lambda_j=\lambda_{ij}$$

即 $\forall i\neq j,\lambda_i=\lambda_j$，所以 $\mathscr{A}(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\lambda I_n$ 为纯量变换 □

习题 6 (P239,T11) 证明：准对角方阵的最小多项式等于每个对角块的最小多项式的最小公倍式

证明 设 $A=\operatorname{diag}(A_1,\cdots,A_k),\mathrm{d}_i(\lambda)$ 为对角块 A_i 的最小多项式，记 $\mathrm{d}(\lambda)=\operatorname{lcm}(\mathrm{d}_1(\lambda),\cdots,\mathrm{d}_k(\lambda))$，则 $\exists m_i(\lambda),\text{s.t. }\mathrm{d}(\lambda)=\mathrm{d}_i(\lambda)m_i(\lambda)$，所以

$$\mathrm{d}(A)=\begin{pmatrix}\mathrm{d}(A_1)&&\\&\ddots&\\&&\mathrm{d}(A_k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_1(A_1)\mathrm{d}_i(A_1)&&\\&\ddots&\\&&m_k(A_k)\mathrm{d}_k(A_k)\end{pmatrix}=0$$

设 A 的最小多项式为 $\mathrm{d}_0(\lambda)$，由上知 $\mathrm{d}_0(\lambda)\mid\mathrm{d}(\lambda)$，又因为

$$0=\mathrm{d}_0(A)=\begin{pmatrix}\mathrm{d}_0(A_1)&&\\&\ddots&\\&&\mathrm{d}_0(A_k)\end{pmatrix}\Longrightarrow\mathrm{d}_0(A_i)=0,\forall 1\leq i\leq k$$

所以 $\mathrm{d}_i(\lambda)\mid\mathrm{d}_0(\lambda),1\leq i\leq k\Longrightarrow\mathrm{d}(\lambda)=\operatorname{lcm}(\mathrm{d}_1(\lambda),\cdots,\mathrm{d}_k(\lambda))\mid\mathrm{d}_0(\lambda)$，又因为 $\mathrm{d}(\lambda),\mathrm{d}_0(\lambda)$ 均首一，所以 $\mathrm{d}_0(\lambda)=\mathrm{d}(\lambda)$ □

习题 7 (P239,T13(1)) 求下列方阵的特征多项式与最小多项式

$$A=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\end{pmatrix}$$

解 特征多项式:

$$\varphi_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & \lambda-a_{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按最后一行展开}}\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-\cdots-a_1\lambda-a_0$$

最小多项式:考虑 e_i 为只有第 i 个元素为 1,其余元素为零的行向量,则

$$e_1A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=e_2$$

类似计算可得

$$e_1A^2=e_2A=e_3,\cdots,e_1A^{n-1}=e_{n-1}A=e_n$$

$$e_1A^n=e_nA=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}$$

设 $\mathrm{d}(\lambda)$ 为 A 的最小多项式,假设 $\deg(\mathrm{d}(\lambda))\leq n-1$,则存在不全为零的 $a_0,\cdots,a_{n-2}\in\mathbb{C}$, s.t. $\mathrm{d}(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{n-2}\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}$,由 $\mathrm{d}(A)=0$ 知

$$\begin{aligned}0=e_1\mathrm{d}(A)&=a_0e_1+a_1e_1A+\cdots+a_{n-2}e_1A^{n-2}+e_1A^{n-1}\\&=a_0e_1+a_1e_2+\cdots+a_{n-2}e_{n-1}+e_n\end{aligned}$$

由 $e_1,\cdots,e_n$ 线性无关知 $a_0=\cdots=a_{n-2}=0$,这与它们不全为零的假设矛盾,进而 $\deg(\mathrm{d}(\lambda))=n$,即 $\mathrm{d}(\lambda)=\varphi_A(\lambda)$ □

习题 8 (P239,T16) 取方阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,定义映射 $\mathscr{A}:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n}$ 如下:设 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$,则令 $\mathscr{A}(X)=AX$,证明:线性映射 $\mathscr{A}$ 的最小多项式等于方阵 A 的最小多项式

证明 考虑 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的一组基 $\{E_{ij}\}_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$,记 $A=\begin{pmatrix}a_{ij}\end{pmatrix}$,则

$$AE_{ij}=a_{1i}E_{1j}+\cdots+a_{ni}E_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}E_{kj}$$

集中注意力，我们适当调整基 $\{E_{ij}\}_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ 的顺序，则 $\mathscr{A}$ 可表示为

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}(E_{11},E_{21}\cdots,E_{n1},\cdots,E_{1n},E_{2n}\cdots,E_{nn})\\=&(E_{11},E_{21}\cdots,E_{n1},\cdots,E_{1n},E_{2n}\cdots,E_{nn})\begin{pmatrix}\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{matrix}&&\\&\ddots&\\&&\ddots&\\&&&\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{matrix}\end{pmatrix}\\=&(E_{11},E_{21}\cdots,E_{n1},\cdots,E_{1n},E_{2n}\cdots,E_{nn})\begin{pmatrix}A&&\\&\ddots&\\&&A\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由前面的 P239,T11 知，$\mathscr{A}$ 的最小多项式等于 $\begin{pmatrix}A&&\\&\ddots&\\&&A\end{pmatrix}$ 的最小多项式，等于 A 的最小多项式 □

习题 9 (P239,T17) 设 $\mathscr{A}:V\to V$ 是线性变换，$U_1,\cdots,U_k$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$，证明：线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式等于 $\mathscr{A}|_{U_1},\cdots,\mathscr{A}|_{U_k}$ 的最小多项式的最小公倍式

证明 这题翻译成矩阵语言就是前面的 P239,T11，设 U_i 的一组基为 $\{\alpha_1^{(i)},\cdots,\alpha_{n_i}^{(i)}\}$，设 $\mathscr{A}|_{U_i}$ 在这组基下的矩阵为 A_i，即 $\mathscr{A}|_{U_i}(\alpha_1^{(i)},\cdots,\alpha_{n_i}^{(i)})=(\alpha_1^{(i)},\cdots,\alpha_{n_i}^{(i)})A_i$，由直和知

$$\{\alpha_1^{(1)},\cdots,\alpha_{n_1}^{(1)},\cdots,\alpha_1^{(k)},\cdots,\alpha_{n_k}^{(k)}\}$$

是 V 的一组基，且 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_k)$

因为 $\mathscr{A}|_{U_i}$ 的最小多项式就是 A_i 的最小多项式，$\mathscr{A}$ 的最小多项式就是 $\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_k)$ 的最小多项式，由 P239,T11 知 $\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_k)$ 的最小多项式为 $A_1,\cdots,A_k$ 的最小多项式的最小公倍式 □

习题 10 (P248,T6) 设 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 可对角化，且 U 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，证明：线性变换 $\mathscr{A}$ 在 U 上的限制 $\mathscr{A}|_U$ 也是可对角化的

证明 由题知，存在 V 的一组基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, s.t. $\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，我们设 $\dim(U)=r$，设 $\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$ 为 U 的一组基，将它扩充为 V 的一组基 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，则由 U 是 $\mathscr{A}$-不变子空间知

$$\mathscr{A}(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\&A_{22}\end{pmatrix}$$

其中 A_{11} 是 $\mathscr{A}|_U$ 在基 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 下的 $r\times r$ 阶方阵，设基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，则 P 可逆，且

$$P\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ & A_{22}\end{pmatrix}P^{-1}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

考虑 P 的前 r 列构成的子矩阵 $\tilde{P}$，由 P 可逆知，它的前 r 列线性无关，故 $\operatorname{rank}(\tilde{P})=r$，进而存在某 r 行，使得 $\tilde{P}$ 的这 r 个行向量线性无关，设它们的行指标为 $i_1,\cdots,i_r$，我们可以通过行变换（交换行）将这 r 行换到第 $1,2,\cdots,r$ 行，即存在置换矩阵 Q（可以表示为初等交换行矩阵的复合）s.t. $Q\tilde{P}$ 的前 r 个行向量线性无关

$$P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix},\quad \tilde{P}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nr}\end{pmatrix},\quad Q\tilde{P}=\begin{pmatrix}p_{i_1,1} & p_{i_1,2} & \cdots & p_{i_1,r}\\ p_{i_2,1} & p_{i_2,2} & \cdots & p_{i_2,r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_{i_r,1} & p_{i_r,2} & \cdots & p_{i_r,r}\\ * & * & * & *\end{pmatrix}$$

考虑 $(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)Q=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则 $(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)$ 实际上就是 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 进行重新排序，因此 $\mathscr{A}$ 在 $(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)$ 下仍可对角化，即存在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的对应重排 $\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_n$, s.t.

$$\mathscr{A}(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)\operatorname{diag}(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_n)$$

因为 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P=(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)QP$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\beta_1,\cdots,\beta_n)&=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ & A_{22}\end{pmatrix}\\ &=(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)QP\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ & A_{22}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故

$$\mathscr{A}(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=(\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n)QP\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ & A_{22}\end{pmatrix}(QP)^{-1}$$

即

$$QP\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ & A_{22}\end{pmatrix}=\operatorname{diag}(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_n)QP$$

将 QP 写为分块形式 $QP=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}$，由前分析以及矩阵乘法规则知 X_{11} 就是 $Q\tilde{P}$ 的前 $r\times r$ 阶子矩阵，故 X_{11} 可逆

$$\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ & A_{22}\end{pmatrix}=\operatorname{diag}(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_n)\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}$$

对比上式两端的左上角分块可得

$$X_{11}A_{11}=\operatorname{diag}(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_r)X_{11}$$

设 $(\gamma_1,\cdots,\gamma_r)=(\beta_1,\cdots,\beta_r)X_{11}^{-1}$，则它是 U 的另一组基，且

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\gamma_1,\cdots,\gamma_r)&=\mathscr{A}(\beta_1,\cdots,\beta_r)X_{11}^{-1}=(\beta_1,\cdots,\beta_r)A_{11}X_{11}^{-1}\\&=(\gamma_1,\cdots,\gamma_r)X_{11}A_{11}X_{11}^{-1}=(\gamma_1,\cdots,\gamma_r)\mathrm{diag}(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_r)\end{aligned}$$

即 $\mathscr{A}|_U$ 也可对角化 $\square$