# 第一、二周作业答案

涂嘉乐

2025 年 9 月 27 日

以下是第一、二周作业的参考答案，本次作业难度较大，大家不会做也千万不要自我怀疑与放弃，以学会知识为最终目标，大家都是最棒的

**习题 1** (P66 T5) 给定 $n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$，证明

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \cdots & a_{3n}-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix} = \sum_{1\le i,j\le n} A_{ij}$$

**证明** 注意到除去第一行外每一行都减去了 $\boldsymbol{\alpha}=(a_{11},\cdots,a_{1n})$，我们希望还原为 $A$ 的样子，使用升阶法

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \cdots & a_{3n}-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ 0 & a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \cdots & a_{3n}-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\forall 3\le l\le n+1]{r_l+r_1} \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 1 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 1 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对上式右边按第一行展开，再对展开后的每一个子行列式按第一列展开即得所证 □

**习题 2** (P66 T8) 给定 $n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$，证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z\det A - \sum_{1\le i,j\le n} A_{ij}x_iy_j$$

**证明** 记 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T, Y=(y_1,\cdots,y_n)$，则所求行列式即 $\begin{vmatrix} A & X \\ Y & z \end{vmatrix}$，利用行列式的某一列可加性，我们将最后一列写为 $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ z \end{pmatrix}$，所以

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A & X \\ Y & z \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ Y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & X \\ Y & 0 \end{vmatrix} \\
&= z\det A + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{\text{按最后一行展开}} z\det A + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1+i} y_i \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} & x_n \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{\text{按最后一列展开}} z\det A + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1+i} y_i \sum_{j=1}^n (-1)^{j+n} x_i M_{ij} \\
&= z\det A - \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+j} x_iy_jM_{ij} = z\det A - \sum_{i,j=1}^n x_iy_jA_{ij}
\end{aligned}$$

□

**习题 3** (P66 T9) 设 $b_{ij}=(a_{i1}+\cdots+a_{in})-a_{ij}, 1\le i,j\le n$，证明

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

如果 $b_{ij}=(a_{i1}+\cdots+a_{in})-ka_{ij}, 1\le k\le n, 1\le i,j\le n$，结论又怎样？

**证明** 直接考虑 $b_{ij}=(a_{i1}+\cdots+a_{in})-ka_{ij}, 1\le k\le n, 1\le i,j\le n$ 的情形

解法 I：我们记 $s_i=a_{i1}+\cdots+a_{in}$，注意到每列中有相同的 $(s_1,\cdots,s_n)^T$，则我们可以使用升阶法

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} s_1-ka_{11} & s_1-ka_{12} & \cdots & s_1-ka_{1n} \\ s_2-ka_{21} & s_2-ka_{22} & \cdots & s_2-ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n-ka_{n1} & s_n-ka_{n2} & \cdots & s_n-ka_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & s_1-ka_{11} & s_1-ka_{12} & \cdots & s_1-ka_{1n} \\ s_2 & s_2-ka_{21} & s_2-ka_{22} & \cdots & s_2-ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_n-ka_{n1} & s_n-ka_{n2} & \cdots & s_n-ka_{nn} \end{vmatrix} \\
&\xlongequal[2\le i\le n+1]{\text{第 } i \text{ 列减去第 } 1 \text{ 列}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ s_1 & -ka_{11} & -ka_{12} & \cdots & -ka_{1n} \\ s_2 & -ka_{21} & -ka_{22} & \cdots & -ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & -ka_{n1} & -ka_{n2} & \cdots & -ka_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-k)^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{k} & \frac{1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} \\ s_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ s_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\xlongequal[2\le i\le n+1]{\text{第 } 1 \text{ 列减第 } i \text{ 列}} (-k)^n \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (1-\frac{n}{k})(-k)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

解法 II（需要集中注意力）：注意到 $b_{ij}$ 为矩阵 $A$ 的第 $i$ 行的除去第 $j$ 个元素 $a_{ij}$ 的全体元素相加，这样的效果能通过除去第 $j$ 个元素为 $1-k$，其余元素为 1 的列向量 $(1,\cdots,1,1-k,1,\cdots,1)$ 产生，即

$$
\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1-k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-k & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1-k \end{pmatrix}
$$

两边同时取行列式即可得证，即我们只需计算矩阵 $K$ 的行列式（可以通过初等变换来求，以下是一个较为简单的方法），其中

$$K=\begin{pmatrix}1-k & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-k & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \ddots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1-k\end{pmatrix}$$

而注意到

$$K=\begin{pmatrix}1-k & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-k & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \ddots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}-kI_n$$

记 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)^T$ 利用 $\lambda^n\det(\lambda I_m-AB)=\lambda^m\det(\lambda I_n-BA)$ 知

$$\det(K)=(-1)^n\det(-K)=(-1)^n\det(kI_n-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})=(-1)^n|k-\alpha\alpha^T|=(-1)^n(k-n)k^{n-1}$$

整理即证 □

**习题 4** 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是正整数，证明 $n$ 阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

能被 $1^{n-1}2^{n-2}\cdots(n-2)^2(n-1)$ 整除

**证明** 我们首先证明下面的引理

**引理 1** 设 $f_k(x)$ 是 $k$ 次多项式，$1\le k\le n-1$，则

$$\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_{n-1}(a_1)\\ 1 & f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_{n-1}(a_2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_{n-1}(a_n)\end{vmatrix}$$

Proof Of Claim : 设 $f_{n-1}(a_1)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，则将范德蒙行列式的第 $n-1$ 列乘以 $a_{n-2}$ 加到最后一列，第 $n-2$ 行乘以 $a_{n-3}$ 加到最后一列，以此类推，这样我们就将最后一列变成了 $(f_{n-1}(a_1),\cdots,f_{n-1}(a_n))^T$，同理再对倒数第二列，倒数第三列 $\cdots$ 进行操作，引理得证

回到本题，考虑组合数

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\Longrightarrow n(n-1)\cdots(n-k+1)=k!\binom{n}{k}$$

我们可以扩充组合数的定义，对于任意正整数 $a$，定义

$$\binom{a}{k}=\frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$$

因此 $k!\binom{a}{k}$ 为关于 $a$ 的 $k$ 次多项式，所以我们可以使用引理

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1(a_1-1) & \cdots & a_1(a_1-1)\cdots(a_1-(n-1)+1)\\ 1 & a_1 & a_1(a_2-1) & \cdots & a_1(a_2-1)\cdots(a_2-(n-1)+1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n(a_n-1) & \cdots & a_n(a_n-1)\cdots(a_n-(n-1)+1)\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}1 & 1!\binom{a_1}{1} & 2!\binom{a_1}{2} & \cdots & (n-1)!\binom{a_1}{n-1}\\ 1 & 1!\binom{a_2}{1} & 2!\binom{a_2}{2} & \cdots & (n-1)!\binom{a_2}{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1!\binom{a_n}{1} & 2!\binom{a_n}{2} & \cdots & (n-1)!\binom{a_n}{n-1}\end{vmatrix}\\ &=\prod_{i=1}^{n-1}i!\begin{vmatrix}1 & \binom{a_1}{1} & \binom{a_1}{2} & \cdots & \binom{a_1}{n-1}\\ 1 & \binom{a_2}{1} & \binom{a_2}{2} & \cdots & \binom{a_2}{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \binom{a_n}{1} & \binom{a_n}{2} & \cdots & \binom{a_n}{n-1}\end{vmatrix}\overset{\text{def}}{=}\prod_{i=1}^{n-1}i!\cdot A\end{aligned}$$

而 $RHS$ 中行列式 $A$ 的计算为整数的运算，故为整数，因此 $\prod\limits_{i=1}^{n-1}i!\ \Big|\ \Delta$ □

**习题 5** (P83 T1(5)) 计算行列式

$$\begin{vmatrix}x & a & a & \cdots & a & a\\ -a & x & a & \cdots & a & a\\ -a & -a & x & \cdots & a & a\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ -a & -a & -a & \cdots & x & a\\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x\end{vmatrix}$$

**解** 解法 I：考虑

$$f(t)=\begin{vmatrix}1 & t & t & t & \cdots & t & t\\ 1 & x & a & a & \cdots & a & a\\ 1 & -a & x & a & \cdots & a & a\\ 1 & -a & -a & x & \cdots & a & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 1 & -a & -a & -a & \cdots & x & a\\ 1 & -a & -a & -a & \cdots & -a & x\end{vmatrix}=xt+y$$

其中 $x,y$ 待定（由行列式的定义式知，上面的行列式最高只含 $t$ 的一次项），且 $f(0)$ 即为所求行列式，

接下来考虑 $f(a)$ 和 $f(-a)$

$$f(a)=\begin{vmatrix}1 & a & a & a & \cdots & a & a\\ 1 & x & a & a & \cdots & a & a\\ 1 & -a & x & a & \cdots & a & a\\ 1 & -a & -a & x & \cdots & a & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 1 & -a & -a & -a & \cdots & x & a\\ 1 & -a & -a & -a & \cdots & -a & x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[2\le i\le n+1]{\text{第 1 行减第 } i \text{ 行}}\begin{vmatrix}1 & a & a & a & \cdots & a & a\\ 0 & x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -2a & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -2a & -2a & x-a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & -2a & -2a & -2a & \cdots & x-a & 0\\ 0 & -2a & -2a & -2a & \cdots & -2a & x-a\end{vmatrix}$$

$$=(x-a)^n$$

类似操作可得 $f(-a)=(x+a)^n$，因此可以解得 $f(0)=\frac{f(a)+f(-a)}{2}=\frac{(x-a)^2+(x+a)^2}{2}$

解法 II：记所求行列式为 $\Delta_n$，利用行列式的某一列可加性，将最后一列进行拆分

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}x & a & a & \cdots & a & 0\\ -a & x & a & \cdots & a & 0\\ -a & -a & x & \cdots & a & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ -a & -a & -a & \cdots & x & 0\\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x-a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & a & a & \cdots & a & a\\ -a & x & a & \cdots & a & a\\ -a & -a & x & \cdots & a & a\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ -a & -a & -a & \cdots & x & a\\ -a & -a & -a & \cdots & -a & a\end{vmatrix}$$

$$=(x-a)\Delta_{n-1}+\begin{vmatrix}x & a & a & \cdots & a & a\\ -a & x & a & \cdots & a & a\\ -a & -a & x & \cdots & a & a\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ -a & -a & -a & \cdots & x & a\\ -a & -a & -a & \cdots & -a & a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[1\le i\le n]{\text{第 } i \text{ 列加最后一列}}(x-a)\Delta_{n-1}+\begin{vmatrix}x+a & 2a & 2a & \cdots & 2a & a\\ 0 & x+a & 2a & \cdots & 2a & a\\ 0 & 0 & x+a & \cdots & 2a & a\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+a & a\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}$$

$$=(x-a)\Delta_{n-1}+a(x+a)^{n-1}$$

这样我们就得到了 $\Delta_n$ 的递推公式，接下来求 $\Delta_n$（好多同学写出来递推公式之后都把最终的表达式求错了，有点可惜）

Case 1. 当 $x=a$ 时，$\Delta_n=2^{n-1}a^n$

Case 2. 当 $x\neq a$ 时，我们有

$$\frac{\Delta_n}{(x-a)^n}=\frac{\Delta_{n-1}}{(x-a)^{n-1}}+\frac{a}{x-a}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{n-1}$$

又因为 $\Delta_1=x$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_n}{(x-a)^n}&=\frac{x}{x-a}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\Delta_k}{(x-a)^k}-\frac{\Delta_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}\right)\\&=\frac{(x-a)^2+(x+a)^2}{2}\end{aligned}$$

解法 II$'$：我们刚才是将最后一列进行拆分，如果我们将最后一行进行拆分，我们可以得到（大家自己试一试）

$$\Delta_n=(x+a)\Delta_{n-1}-a(x-a)^{n-1}$$

所以

$$\begin{cases}\Delta_n=(x-a)\Delta_{n-1}+a(x+a)^{n-1}\\ \Delta_n=(x+a)\Delta_{n-1}-a(x-a)^{n-1}\end{cases}$$

联立即可解得

$$\Delta_n=\frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}$$

□

**习题 6** (P83 T1(19)) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & 1 & & & & \\ -n & x-2 & 2 & & & \\ & -(n-1) & x-4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & n-1 & \\ & & & -2 & x-2n+2 & n \\ & & & & -1 & x-2n \end{vmatrix}$$

**解** 记所求 $n+1$ 阶行列式为 $\Delta_{n+1}(x)$ 注意到每一列元素相加均为 $x-n$，因此我们可以先考虑将从第二行开始的每一行都加到第一行，再将从第三行开始的每一行都加到第二行，不断重复上述操作（将第 $i+1$ 行开始的每一行加到第 $i$ 行），则

$$\Delta_{n+1}(x)=\begin{vmatrix} x-n & x-n & x-n & \cdots & x-n & x-n \\ -n & x-2 & 2 & & & \\ & -(n-1) & x-4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & n-1 & \\ & & & -2 & x-2n+2 & n \\ & & & & -1 & x-2n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-n & x-n & x-n & \cdots & x-n & x-n \\ -n & x-(n+1) & x-n & x-n & x-n & x-n \\ & -(n-1) & x-4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & n-1 & \\ & & & -2 & x-2n+2 & n \\ & & & & -1 & x-2n \end{vmatrix}$$

$$=\cdots\cdots\cdots$$

$$=\begin{vmatrix} x-n & x-n & x-n & \cdots & x-n & x-n \\ -n & x-(n+1) & x-n & \cdots & x-n & x-n \\ & -(n-1) & x-(n+2) & \ddots & x-n & x-n \\ & & \ddots & \ddots & x-n & x-n \\ & & & -2 & x-(2n-1) & x-n \\ & & & & -1 & x-2n \end{vmatrix}$$

接下来，我们将第 $n+1$ 列减去第 $n$ 列，将第 $n$ 列减去第 $n-1$ 列，$\cdots\cdots$，将第 2 列减去第 1 列，则

$$\Delta_{n+1}(x)=\begin{vmatrix} x-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -n & x-1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & -(n-1) & x-3 & \ddots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & n-2 & 0 \\ & & & -2 & x-(2n-3) & n-1 \\ & & & & -1 & x-(2n-1) \end{vmatrix}$$

$$=(x-n)\Delta_n(x-1)$$

因此所求行列式为

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1}(x)&=(x-n)\Delta_n(x-1)=(x-n)[(x-1)-(n-1)]\Delta_{n-1}(x-2)\\&=(x-1)^n\Delta_1(x-n)=(x-n)^{n+1}\end{aligned}$$

□

**习题 7** (P98 T3) 求出所有和 $A$ 可交换的方阵

(1) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

**解** (1) 简化计算：$B$ 与 $A$ 可交换 $\iff$ $B$ 与 $A-\lambda I_n$ 可交换，$\forall\lambda\in\mathbb{R}$，因此我们只需求与 $A'=A-I=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\3&1&1\end{pmatrix}$ 可交换的方阵即可，设 $B=(b_{ij})$，对比 $A'B=BA'$ 的各元素可得

$$B=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a-3b&0\\3c&c&a+c\end{pmatrix}$$

(2) 设 $B=(b_{ij})$，对比 $AB=BA$ 的各元素可得

$$B=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&a&b&c\\c&d&a&b\\b&c&d&a\end{pmatrix}$$

□

**习题 8** (P98 T9) 如果方阵 $A$ 满足 $A^2=I$，则称 $A$ 为对合，求出所有二阶对合方阵

**证明** 设 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，直接计算可得

(1) $A=\pm I_2$

(2) $A=\mathrm{diag}(1,-1),\mathrm{diag}(-1,1)$

(3) $A=\begin{pmatrix}a&b\\\frac{1-a^2}{b}&-b\end{pmatrix}$， $a\neq\pm1,b\neq0$

**习题 9** (P98 T18) 设 $n$ 阶方阵 $A$ 的每一行上恰有 2 个元素为 1，而其它元素为零，$J$ 是元素全为 1 的 $n$ 阶方阵，求出所有适合 $A^2+2A=2J$ 的 $n$ 阶方阵 $A$

**解** 首先由题意知 $A$ 的每一行元素求和均为 2，而对 $A$ 右乘 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)^T$ 可以产生对每一行元素

求和的效果，故我们有

$$A\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\2\\\vdots\\2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}$$

再对 $A^2+2A=2J$ 两边同时右乘 $\boldsymbol{\alpha}$ ，即

$$A^2\boldsymbol{\alpha}+2A\boldsymbol{\alpha}=2J\boldsymbol{\alpha}$$

$LHS=2A\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\alpha}=8\boldsymbol{\alpha}, RHS=2n\boldsymbol{\alpha}$，故 $8=2n\implies n=4$

***Claim:*** $A$ 的对角元全为零

考虑 $A^2$ 的第 $ii$ 元，它是 $A$ 的第 $i$ 行与第 $i$ 列做内积所得，即

$$(A^2)_{ii}=a_{i1}a_{1i}+a_{i2}a_{2i}+a_{i3}a_{3i}+a_{i4}a_{4i}\geq a_{ii}^2$$

假设存在 $i\in\{1,2,3,4\}$, s.t. $a_{ii}=1$，对比 $A^2+2A=2J$ 两边的第 $ii$ 元可得 $(LHS)_{ii}\geq 1+2=3$，而 $(RHS)_{ii}=2$，矛盾！故断言得证

因此 $A$ 的第一行只能是 $(0,1,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1)$，结合 $A^2+2A=2J$ 以及断言，$A$ 只能是以下三种情况

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

□

**习题 10** (P87 T6) 把 $n$ 阶行列式

$$Y=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

展开成 $\lambda$ 的多项式，并用行列式 $\det A$ 的子式表示它的关于 $\lambda$ 的各次幂的系数，其中 $A=(a_{ij})$

**引理 2** 设 $n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的元素都是变量 $x$ 的可微函数，则

$$\frac{\mathrm{d}(\det(A))}{\mathrm{d}x}=\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}x}A_{ij}$$

其中 $A_{ij}$ 是 $a_{ij}$ 的代数余子式

**解** 设展开的多项式为 $f(\lambda)$，将 $f(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 处展开得

$$f(\lambda)=\lambda^n+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\lambda^{n-1}+\cdots+\frac{f''(0)}{2!}\lambda^2+\frac{f'(0)}{1!}\lambda+f(0)$$

所以

$$f'(\lambda)=\sum_{1\le i,j\le n}\frac{\mathrm{d}Y_{ij}}{\mathrm{d}\lambda}A_{ij}=\sum_{1\le i\le n}A_{ii}^{Y}(\lambda)$$

其中 $A_{ii}^{Y}(\lambda)$ 表示 $Y=\lambda I-A$ 的第 $ii$ 元的代数余子式，记 $A_{ij}$ 为 $A$ 的第 $ij$ 元的代数余子式，将 $\lambda=0$ 代入，而它是 $n-1$ 阶的，故 $A_{ii}^{Y}(0)=(-1)^{n-1}A_{ii}$，故

$$f'(0)=\sum_{1\le i\le n}A_{ii}^{Y}(0)=(-1)^{n-1}\sum_{1\le i\le n}A_{ii}(0)$$

类似地，继续求导，令 $\lambda=0$ 可得

$$f''(0)=\sum_{1\le i\le n}\left.\frac{\mathrm{d}A_{ii}^{Y}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}=2!(-1)^{n-2}\sum_{1\le i_1<i_2\le n}A\begin{pmatrix}i_1 & i_2\\ i_1 & i_2\end{pmatrix}$$

两点解释：

- 系数 $(-1)^{n-2}$：因为作为矩阵，$A\begin{pmatrix}i_1 & i_2\\ i_1 & i_2\end{pmatrix}$ 与 $A^{Y}\begin{pmatrix}i_1 & i_2\\ i_1 & i_2\end{pmatrix}$ 差一个负号，而它们是 $n-2$ 阶的，故取行列式时差 $(-1)^{n-2}$
- 系数 $2!$ 是因为 $A\begin{pmatrix}i_1 & i_2\\ i_1 & i_2\end{pmatrix}$ 它表示 $A$ 去除第 $i_1,i_2$ 行，第 $i_1,i_2$ 列所得矩阵的代数余子式，而它可以先去掉第 $i_1$ 行、列，也可以先去掉第 $i_2$ 行、列，故 $A\begin{pmatrix}i_1 & i_2\\ i_1 & i_2\end{pmatrix}$ 出现了 $2!$ 次（类似地，之后的 $k!$ 也是如此）

如此下去，我们可以得到

$$f^{(k)}(0)=k!(-1)^{n-k}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}$$

则 $\lambda^k$ 项的系数为 $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ □

**习题 11** (P104 T4(3)) 计算行列式

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2\\ n^2 & 1^2 & 2^2 & \cdots & 1^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & 1^2\end{vmatrix}$$

**解** 记 $f(x)=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)^2x^k$，由课上习题可知所求行列式为

$$\det(A)=\prod_{i=0}^{n-1}f(\omega^i)$$

其中 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$

这题我觉得求到这里就可以了，接下来演示一下怎么求 $f(x)$ 的表达式，因为

$$1+x+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

两边同时求导

$$1+2x+\cdots+nx^{n-1}=\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'$$

两边同时乘以 $x$，再同时求导得

$$1^2+2^2x+\cdots+n^2x^{n-1}=\frac{(-2n^2-2n+1)x^{n+1}+n^2x^{n+2}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}$$

□

**习题 12** (P104 T4(4)) 计算行列式

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

**解** 记

$$K=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-1} \\ -1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

则 $K^2=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-2} \\ -I_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix},\cdots K^n=-I_n$，记 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为 $x^n+1=0$ 的 $n$ 个根(更确切地说，$\xi_k=e^{\frac{(2k-1)2\pi i}{2n}}$)，

考虑

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\ \xi_1&\xi_2&\xi_3&\cdots&\xi_n\\ \xi_1^2&\xi_2^2&\xi_3^2&\cdots&\xi_n^2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \xi_1^{n-1}&\xi_2^{n-1}&\xi_3^{n-1}&\cdots&\xi_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

则容易验证

$$B^{-1}KB=\begin{pmatrix}\xi_1&&&&\\&\xi_2&&&\\&&\xi_3&&\\&&&\ddots&\\&&&&\xi_n\end{pmatrix}$$

设 $f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$，则 $A=f(K)$，所以

$$B^{-1}AB=\sum_{i=1}^{n}a_i\begin{pmatrix}\xi_1^i&&&&\\&\xi_2^i&&&\\&&\xi_3^i&&\\&&&\ddots&\\&&&&\xi_n^i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(\xi_1)&&&&\\&f(\xi_2)&&&\\&&f(\xi_3)&&\\&&&\ddots&\\&&&&f(\xi_n)\end{pmatrix}$$

因此 $\det(A)=\det(B^{-1}AB)=\prod_{i=1}^{n}f(\xi^i)$ □

**评价** 矩阵 $B$ 到底是怎么来的？实际上由 $K^n=-I_n$ 可知 $K$ 的特征多项式为 $f(x)=x^n+1$（以后会学），故 $\xi_i,1\le i\le n$ 为 $K$ 的特征值，而通过解线性方程组 $(K-\xi_iI_n)X=0$ 可得，$B$ 的第 $i$ 列即为 $\xi_i$ 所对应的特征向量

**习题 13** (P104 T7) 适合 $AA^T=I_n=A^TA$ 的 $n$ 阶实方阵 $A$ 称为正交的，证明

(1) 正交方阵的行列式等于 $\pm1$

(2) 位于正交方阵的 $k$ 个行上的所有 $k$ 阶子式的平方和等于 1

**证明** (1). 对 $AA^T=I_n$ 两边同时取行列式，利用 $\det(A)=\det(A^T)$ 即得 $\det^2(A)=1\Longrightarrow\det(A)=\pm1$

(2). 由 Binet-Cauchy 公式的推论知，对 $\forall 1\le k\le n$

$$\begin{aligned}1=I_n\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\i_1&i_2&\cdots&i_k\end{pmatrix}&=AA^T\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\i_1&i_2&\cdots&i_k\end{pmatrix}\\&=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}A^T\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_k\\i_1&i_2&\cdots&i_k\end{pmatrix}\\&=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}\left[A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}\right]^2\end{aligned}$$

□

**习题 14** (P104 T10) 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$，证明：方阵 $AB$ 和 $BA$ 的所有 $k$ 阶主子式之和相等，由此证明

$$\det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA)$$

**证明** 由 Binet-Cauchy 公式的推论知，对 $\forall 1 \le k \le n$

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} AB\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\ \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\ \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} B\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \\
&= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}\ \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} B\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \\
&= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} BA\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

即 $AB$ 和 $BA$ 的所有 $k$ 阶主子式之和相等，再由 P87 T6 知 $\det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA)$ □