实分析第三次习题课讲义

助教：张源意

2026 年 4 月 24 日

目录

1 作业解答

不引起歧义的情况下, 我们记 $(X,\mathcal{L})$ 为某可测空间, $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 及其上的 Borel-σ 代数. $\mathrm{d}x$ 默认是对 Lebesgue 测度积分. $L(X)$ 指可测函数, $L^+(X)$ 知非负可测函数, $L^p(X)$ 为 L^p 空间.

1.1 第三次习题课

Problem 1. 设 $f:E\to[-\infty,+\infty]$, 定义原像集为 $f^{-1}(A):=\{x\in E:f(x)\in A\}$, 证明下列命题等价:

1. f 可测;
2. 对任意开集 $G\subset\mathbb{R}$, 有 $f^{-1}(G)\in\mathcal{L}$;
3. 对任意闭集 $F\subset\mathbb{R}$, 有 $f^{-1}(F)\in\mathcal{L}$;
4. 对任意 $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 有 $f^{-1}(B)\in\mathcal{L}$.

Solution. 回忆 f 可测的定义：对任意 $a\in\mathbb{R}$,

$$f^{-1}((-\infty,a))\in\mathcal{L}.$$

(1)⇒(2) 由 $\mathbb{R}$ 上的开集结构定理（$\mathbb{R}$ 上开集可以写作可数开区间之不交并）与可测集经过可数并交差运算下仍可测, 可知只要证任意开区间的原像可测.

对任意 $a<b$, 注意到

$$(a,b)=(-\infty,b)\cap(a,+\infty)=(-\infty,b)\cap\big((-\infty,a]\big)^c=(-\infty,b)\cap\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty,a+\tfrac{1}{n})\Big)^c,$$

则

$$f^{-1}((a,b))=f^{-1}((-\infty,b))\cap\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}((-\infty,a+\tfrac{1}{n}))\Big)^c\in\mathcal{L}$$

任一开集 $G\subset\mathbb{R}$ 都可以写成至多可数开区间的不交并, 即

$$G=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n,b_n).$$

于是

$$f^{-1}(G)=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}((a_n,b_n))\in\mathcal{L}.$$

(2)⇒(3) 由 F^c 为开集即得.

(2)(3)⇒(4) Borel 集可以由开集和闭集的可数次并交差运算得到, 由

$$f^{-1}(A^c)=f^{-1}(A)^c,\ f^{-1}(\bigcup_n A_n)=\bigcup_n f^{-1}(A_n),\ f^{-1}(\bigcap_n A_n)=\bigcap_n f^{-1}(A_n),$$

和可测性对可数并交差运算封闭即得.

(4)⇒(1) $(-\infty,a)$ 是 Borel 集.

□

Remark. 1. 需要明确 Borel 集的定义：

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n\text{上的 Borel-}\sigma\text{代数}\mathcal{B}(\mathbb{R}^n):&=\text{包含所有开集和闭集的最小的}\sigma\text{代数}\\&=\{\text{开集或闭集的可数次并交差}\}\end{aligned}$$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 中的元素称作 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel 集.

2. 开集结构定理在一维和 n 维情形是不同的, n 维情形的表述是“开集可写作可数内部不交的半开半闭方体之并”, 不能完全表示为开方体之并的问题出现在空间连通性上（感兴趣的同学可以查阅周民强《实变函数论》1.3 节）.

3. 本题的目的是给出函数可测性定义的等价刻画, 以便于日常叙述和使用. 以后我们讲不加声明地承认这些结论.

Problem 2. 证明：若 $g:E\to[-\infty,+\infty]$ 可测, 且 $g(x)\neq 0$ 对一切 $x\in E$ 成立, 则 $1/g$ 可测.

Solution. 定义函数

$$\psi:[-\infty,+\infty]\to[-\infty,+\infty],\qquad \psi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t}, & t\neq 0,\\ 0, & t=0,\end{cases}$$

并约定 $\psi(\pm\infty)=0$. 函数 ψ 在 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 上连续, 在 $\pm\infty$ 处也没有问题；它只在 $t=0$ 处不连续, 因此 ψ 是 Borel 可测函数.

由于 g 可测, 而 Borel 可测函数与可测函数的复合仍可测（*）, 所以 $\psi\circ g$ 可测. 又因为 $g(x)\neq 0$ 对所有 x 成立, 所以

$$(\psi\circ g)(x)=\frac{1}{g(x)}.$$

故 $1/g$ 可测. □

Remark. 1. 这是一个看上去比较规范的写法, 不过你正常用可测函数定义讨论 $1/g$ 也是没关系的.

2. （*）处提到了复合的问题. 首先我们明确 Borel 可测函数的定义：

$$f\text{是 Borel 可测函数}\Leftrightarrow\text{开集的原像是 Borel 可测集}$$

至于这个定义与可测函数的定义在本质上有什么区别和动机, 我会在 **2.2** 讲解. 至少这里我们可以理解

$$(\psi\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ\psi^{-1}$$

将开集映作 E 中可测集, 即 $\psi\circ g$ 为 E 上的可测函数.

3. 本题的目的是研究可测性在运算下的封闭性. 之前已学过可测函数在四则运算、极限运算下均保持可测, 这里我们可知良定情形下对倒数运算也保持可测.

Problem 3.

1. 给定两个 Cantor 型集合 C_1,C_2, 构造 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的连续单调增双射 F, 满足 $F(C_1)=C_2$
2. 找出 f 可测, ϕ 连续, 但 $f\circ\phi$ 不可测.
3. 证明：$Lebesgue-\sigma\text{代数}\setminus Borel-\sigma\text{代数}\neq\emptyset$

Solution. 1. 这个其实是作业题用到的引理, 有同学问了这个函数的构造, 习题课上我只介绍了直观想法, 因为写出来实在是太麻烦了, 而且也没什么本质困难, 大家感兴趣的话看看就行.

直观理解就是对 Cantor 型集合, 先把每部去掉的区间端点对应起来, 再把去掉的区间作严格单调增线性（不线性也没关系, 其实连续就行）同构, 最后延拓到 $[0,1]$ 上.

我们来严格表述一下这一过程：把 C_1, C_2 都看成按 Cantor 型方式迭代构造出来的集合.

对 $i=1,2$, 记

$$C_i = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n^{(i)},$$

其中 $E_n^{(i)}$ 是第 n 步保留下来的 2^n 个闭区间之并. 我们把这些区间用二进制串标号：

$$E_n^{(i)} = \bigcup_{\sigma_n \in \{0,1\}^n} I_{\sigma_n}^{(i)}.$$

这里 $\sigma_n \in \{0,1\}^n$ 是 n 个 0 或 1 的编码, 我们先定义 $\{0,1\}^n$ 中的序关系：对 $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \{0,1\}^n$, 定义势能函数

$$V(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \times 10^{-n}$$

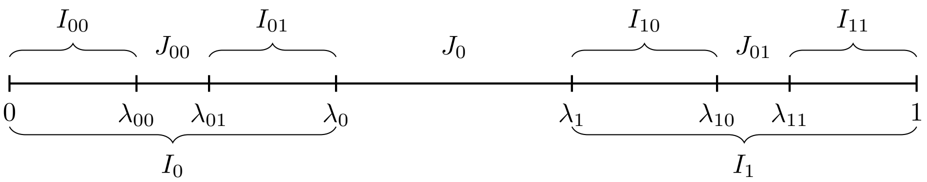
对 $a, b \in \{0,1\}^n$, 若 $V(a) < V(b)$, 称 $a < b$. 显然这是一个全序结构.

现在我们把 $I_{\sigma_n}^{(i)}$ 按从小到大的顺序排列, 并且从左到右对应于第 n 步保留下来的 2^n 个闭区间. 对某个 σ_n, 若它最后一位为 0, 则把 $I_{\sigma_n}^{(i)}$ 的右端点记作 $\lambda_{\sigma_n}^{(i)}$, 否则将 $I_{\sigma_n}^{(i)}$ 的左端点记作 $\lambda_{\sigma_n}^{(i)}$.

第 n 步操作中删去的开区间必在某个 $I_{\sigma_{n-1}}^{(i)}$ 之中, 记 $I_{\sigma_{n-1}}^{(i)}$ 之中在第 n 步操作被删去的开区间为 $J_{\sigma_{n-1}}^{(i)}$, 于是有

$$J_{\sigma_{n-1}}^{(i)} = (\lambda_{(\sigma_n,0)}^{(i)}, \lambda_{(\sigma_n,1)}^{(i)}).$$

$n=1$ 的情况我不额外说明了.



由于这是 Cantor 型构造, 每个点 $x \in C_i$ 都恰好落在每一层中的某个 I_σ 里, 于是可以构造坐标映射

$$\omega : C_i \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \quad \omega(x)\text{的第}k\text{位} := x \in I_{\sigma_k}\text{中}\sigma_k\text{的最后一位}$$

即存在唯一的无限二进制序列 $\omega(x) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 使得对每个 n, 有

$$x \in I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}^{(i)}.$$

到此我们完成了：x 被它在每一步"落在左边还是右边"的信息唯一编码.

Step1：Define the correspondence between C1 and C2.

对 $x \in C_1$, 设其编码为

$$\omega(x) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots).$$

由于 C_2 中也存在唯一一个点具有同样的编码, 于是定义

$$G(x) = \text{the unique point } y \in C_2 \text{ with } \omega(y) = \omega(x).$$

于是 $G : C_1 \to C_2$ 是双射.

而且 G 保持左右次序：若 $x<y$ 都在 C_1 中, 设 $\omega(x)$ 与 $\omega(y)$ 第一次不同是在第 m 位, 那么必有

$$\varepsilon_m(x)=0, \qquad \varepsilon_m(y)=1,$$

所以 x 落在某个第 m 层基本区间的左子区间里, 而 y 落在右子区间里. 同样的编码规则在 C_2 中也成立, 因此

$$G(x)<G(y).$$

故 G 是严格递增双射.

Step2: Extend G to [0,1]

对每个被删去的间隙 $J^{(1)}_{\sigma_{n-1}}=(\lambda^{(1)}_{(\sigma_n,0)},\lambda^{(1)}_{(\sigma_n,1)})\subset[0,1]\setminus C_1$, 定义其对应的 C_2 的间隙为

$$J^{(2)}_{\sigma_{n-1}}=(\lambda^{(2)}_{(\sigma_n,0)},\lambda^{(2)}_{(\sigma_n,1)}).$$

注意到

$$G(\lambda^{(1)}_{(\sigma_n,0)})=\lambda^{(2)}_{(\sigma_n,0)}, \qquad G(\lambda^{(1)}_{(\sigma_n,1)})=\lambda^{(2)}_{(\sigma_n,1)},$$

因为这些端点正对应于同一个有限串 σ 后接 $0111\cdots$ 与 $1000\cdots$ 的两类编码.

现在定义 $F:[0,1]\to[0,1]$ 为

$$F(x)=\begin{cases} G(x), & x\in C_1,\\ \lambda^{(2)}_{(\sigma_n,0)}+\dfrac{\lambda^{(2)}_{(\sigma_n,1)}-\lambda^{(2)}_{(\sigma_n,0)}}{\lambda^{(1)}_{(\sigma_n,1)}-\lambda^{(1)}_{(\sigma_n,0)}}\big(x-\lambda^{(1)}_{(\sigma_n,0)}\big), & x\in J^{(1)}_{\sigma_{n-1}}.\end{cases}$$

也就是说, F 在每个间隙上取为 $J^{(1)}_{\sigma_{n-1}}$ 到 $J^{(2)}_{\sigma_{n-1}}$ 的线性同构, 而在 C_1 上则等于 G.

Step3: Verify

- **F is monotonically increasing**

  因为不同间隙和 Cantor 集部分之间的左右顺序, 由端点对应关系保持, 所以 F 在整个 $[0,1]$ 上严格递增.

- **F is bijective**

  由 F 严格递增知单射. 满射显然.

- **F is continuous**

  闭区间上严格递增函数只有跳跃点（数分 A1）, 跳跃点会导致 F 不是满射,

- $F(C_1)=C_2$

  显然.

于是我们构造出了 1. 中的所需函数.

2. 取上一问中构造的连续双射 ϕ, 其中 C_1,C_2 都是 Cantor 型集合, 满足 $m(C_1)>0,m(C_2)=0$. 取一个非可测集 $N\subset C_1$, 并令 $A:=\phi(W)\subset C_2$. 由于 $A\subset C_2$ 且 $m(C_2)=0$, 所以 A 是 Lebesgue 可测集. 令 $f=\chi_A$. 则 f 是可测函数.

另一方面, 对任意 $x \in C_1$,

$$(f \circ \phi)(x) = \chi_A(\phi(x)) = \begin{cases} 1, & \phi(x) \in A, \\ 0, & \phi(x) \notin A, \end{cases} = \chi_W(x).$$

所以 $f \circ \phi = \chi_W$. 若 $f \circ \phi$ 可测, 则 $W = (f \circ \phi)^{-1}(\{1\})$ 应为可测集, 这与 W 非可测矛盾.

3. 仍取上面构造的 $A = \phi(W) \subset C_2$. 因为 $A \subset C_2$ 且 $m(C_2) = 0$, 故 A 是 Lebesgue 可测集.

现在证明 A 不是 Borel 集. 假设 A 是 Borel 集, 则由 ϕ 的连续性知, $\phi^{-1}(A)$ 是 C_1 中的 Borel 集（相对拓扑意义下）. 但

$$\phi^{-1}(A) = \phi^{-1}(\phi(W)) = W$$

（因为 ϕ 是双射）, 所以 W 是 C_1 中的 Borel 集. 由于 C_1 本身是闭集, 故 W 也是 $\mathbb{R}$ 中的 Borel 集, 从而必为 Lebesgue 可测, 这与 W 非可测矛盾. □

Remark. 1. 第一题的结论以后直接作为事实承认就可以了.

2. 第二题的证明用到了一个结论:（$\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 测度下）正测集必有不可测子集. 证明详见 **2.1.6**.

Problem 4. 举例说明 $|f|$ 可测不能推出 f 可测.

Solution. 取 $f = \chi_W - 1/2$（W 同上题）即可. □

Remark. 无.

Problem 5. 设 $f_k : E \to [-\infty, +\infty]$ 可测, 且

$$f_k(x) \to f(x) \qquad \text{a.e. on } E,$$

求证: f 可测.

Solution. 由实值可测函数对极限运算封闭, 只需将 f 写作实值可测函数列的 a.e. 极限即可, 故考虑 f_k 的截断, 只需证

$$g_k := f_k \chi_{[|f_k| \leq k]} + k\chi_{[|f_k| \geq k]} \to f$$

其中

$$[f_k \leq k] := \{x \in E : f_k(x) \leq k\}$$

（出于方便以后经常这么写）. 我们把 f 分成两部分研究,

Part1: $|f| < \infty$

任意 $M > 0$, 显然有 $g_k \chi_{[f \leq M]} \to f\chi_{[f \leq M]}$, 令 $M \to \infty$ 即得.

Part2: $f = +\infty$

对 a.e.$x \in [f = \infty]$, 任给 $M > 0$, 存在 $K \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $k > K$ 有 $f_k(x) > M$, 则对任意 $k > \max K, [M] + 1$ 有 $g_k(x) > M$, 即 $g_k(x \to +\infty)$

Part3: $f = -\infty$

同理. □

REMARK. 1. 这里用到的截断方法相当简单而重要, 概率论、随机过程和极限理论这种概率方向课程中用的尤其多, 强烈建议大家熟练掌握.

2. 本题的目的是把可测函数对极限封闭这一事实推广到广义实值函数上, 以后我们自动承认这件事情.

PROBLEM 6. 设 $\{f_n\}$ 是 $[0,1]$ 上一列可测函数, 且对 a.e. x 有 $|f_n(x)| < \infty$. 证明存在一列正数 c_n, 使得

$$\frac{f_n(x)}{c_n} \to 0 \qquad \text{a.e. on } [0,1].$$

SOLUTION. 对每个固定的 n, 由于 $|f_n(x)| < \infty$ 对 a.e. x 成立, 故

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [|f_n| > k] \subset [|f_n| = \infty],$$

从而

$$m\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} [|f_n| > k]\Big) = 0.$$

由测度的上连续性得

$$m(\{|f_n| > k\}) \downarrow 0 \qquad (k \to \infty).$$

因此, 对每个 n, 可取 $M_n > 0$ 使得

$$m(\{x : |f_n(x)| > M_n\}) < 2^{-n}.$$

令 $c_n := nM_n > 0$. 则

$$\left[\left|\frac{f_n(x)}{c_n}\right| > \frac{1}{n}\right] = [|f_n| > M_n],$$

所以

$$m\left(\left\{x : \left|\frac{f_n(x)}{c_n}\right| > \frac{1}{n}\right\}\right) < 2^{-n}.$$

记

$$E_n := \left\{x : \left|\frac{f_n(x)}{c_n}\right| > \frac{1}{n}\right\}.$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty.$$

由 Borel–Cantelli 引理,

$$m\big(\varlimsup_{n\to\infty} E_n\big) = 0.$$

即对 a.e. x, 只会有有限多个 n 使得 $x \in E_n$. 于是对几乎处处的 x, 存在 $N(x)$ 使得当 $n \ge N(x)$ 时,

$$\left|\frac{f_n(x)}{c_n}\right| \le \frac{1}{n}.$$

令 $n \to \infty$, 得到

$$\frac{f_n(x)}{c_n} \to 0 \qquad \text{a.e. } x.$$

□

Remark. 1. 此题即为大名鼎鼎的 BC 的应用, 重要的技巧是 2^{-n} 型的控制.

2. 我不知道这个结果有什么意义, 如果加一点矩条件能给出收敛速度控制的话可能会有点用?

Problem 7. 证明：$\mathbb{R}^n$ 上每个 Lebesgue 可测函数都是一列连续函数的 a.e. 极限.

Solution. 先做一维上的有限区间情形. 不妨设 f 在 $[0,1]$ 上有限且可测, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 由 Lusin 定理, 存在闭集 $K_n\subset[0,1]$, 使得

$$m([0,1]\setminus K_n)<2^{-n},$$

并且 $f|_{K_n}$ 在 K_n 上连续. 由于 K_n 是 $[0,1]$ 的闭子集, 而 $f|_{K_n}$ 是实值连续函数, 依 Tietze 延拓定理, 存在连续函数 $g_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ 使得

$$g_n(x)=f(x),\qquad x\in K_n.$$

记 $E_n:=[0,1]\setminus K_n$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}<\infty.$$

由 Borel–Cantelli 引理,

$$m\big(\varlimsup_{n\to\infty}E_n\big)=0.$$

所以对 a.e. $x\in[0,1]$, 存在 $N(x)$ 使得对任意 $n\ge N(x)$, 都有 $x\notin E_n$, 即 $x\in K_n$. 于是对这些 n 有 $g_n(x)=f(x)$., 即 $g_n\to f$ a.e.

d 维空间有限区域的情形同理, 接下来的目的是把结论推广到全空间. 但在无限区域上无法使用 Lusin 定理, 我们只需要把全空间分成有限测度集的可数并, 把问题回归到有限区域情形. 对 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 可测函数 f, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 由 Lusin 定理, 存在闭集 $K_n\subset B_n$（B_n 是半径为 n 的球）, 使得

$$m(B_n\setminus K_n)<2^{-n},$$

并且 $f|_{K_n}$ 在 K_n 上连续. 由于 K_n 是 $\mathbb{R}^d$ 的闭子集, 而 $f|_{K_n}$ 是实值连续函数, 依 Tietze 延拓定理, 存在连续函数 $g_n:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 使得

$$g_n(x)=f(x),\qquad x\in K_n.$$

任意给定 $M>0$, 记 $E_n^M:=B_M\setminus K_n$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n^M)\le\sum_{n\le M}m(B_M)+\sum_{n>M}2^{-n}<\infty.$$

由 Borel–Cantelli 引理,

$$m\big(\varlimsup_{n\to\infty}E_n^M\big)=0.$$

即 $g_n\to f$ a.e. in B_M, 由 M 任意性即得结论. □

Remark. 1. 大部分同学没有考虑无限测度情形.

2. 我在题干中特殊强调了 $\mathbb{R}^n$ 和 Lebesgue 测度两件事情, 这是因为原命题的叙述并不完全正确；事实上, “可测函数可由连续函数 a.e. 逼近”这件事只在配备 σ 有限的正则 Borel 测度的紧 Hausdorff 空间上成立, 出于对 Lusin 定理、Tietze 延拓定理和有限测度集逼近全空间这三个需求.

3. 题目中用到了 Tietze 定理, 这是拓扑学的相关内容, 目前（其实以后也是）掌握结论的表述就好：T_4 空间中闭集上的连续函数可以延拓到全空间（度量空间是 T_4 的）.

4. 这题的目的就是题干的结论.

1.2 第四次习题课

Problem 8. 证明：对函数列 (f_k) 与函数 f, 有

$$f_k \rightrightarrows f \text{ on } A \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\{k_l\}_{l=1}^{\infty},\ \text{s.t. } A\subset\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcap_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|<\frac{1}{l}\right\}.$$

Solution. 一致收敛的定义：

$$f_k \rightrightarrows f \text{ on } A \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \text{s.t. } \sup_{x\in A}|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \forall k\geq N.$$

"$\Longrightarrow$"：若 $f_k \rightrightarrows f$ 在 A 上成立, 则对每个 $l\in\mathbb{N}^*$, 取 $\varepsilon=1/l$. 由一致收敛定义, 存在整数 k_l, 使得当 $k\geq k_l$ 时,

$$\sup_{x\in A}|f_k(x)-f(x)|<1/l.$$

于是对任意 $x\in A$, 都有

$$x\in\bigcap_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|<\frac{1}{l}\right\}.$$

再对一切 $l\geq 1$ 取交, 得到

$$x\in\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcap_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|<\frac{1}{l}\right\}.$$

由于 $x\in A$ 任意, 即

$$A\subset\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcap_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|<\frac{1}{l}\right\}.$$

"$\Longleftarrow$"：若存在整数列 $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$ 使得

$$A\subset\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcap_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|<\frac{1}{l}\right\},$$

则对任意 $l\in\mathbb{N}^*$、任意 $x\in A$ 以及任意 $k\geq k_l$, 都有

$$|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{l}.$$

于是

$$\sup_{x\in A}|f_k(x)-f(x)|\leq\frac{1}{l},\qquad \forall k\geq k_l.$$

任取 $\varepsilon>0$, 选取 l 充分大, 使得 $1/l<\varepsilon$. 则当 $k\geq k_l$ 时,

$$\sup_{x\in A}|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

即 $f_k \rightrightarrows f$ on A.

□

REMARK. 1. 原题右边是等号, 显然是不对的, 因为对 A 取任何子集保持左侧性质.

2. 本质上是一道语文题, 把左边的收敛语言翻译成集合语言而已.

PROBLEM 9. 设 $\chi_{[0,1]}$ 为区间 $[0,1]$ 的特征函数. 证明：不存在处处连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得

$$f(x)=\chi_{[0,1]}(x)\text{a.e.}$$

SOLUTION. 假设存在这样的连续函数 f, 考虑 $f^{-1}(0,1)$ 为开集, 必包含某个非零测的开区间. □

REMARK. 可测函数可以由连续函数递增逼近（二进制切割）或 Lusin 逼近（Littlewood 第二原理）, 但不是连续函数.

PROBLEM 10. 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的函数, 并且分别连续：即固定一个变量时, f 关于另一个变量连续. 证明：$f\in L(\mathbb{R}^2)$.

SOLUTION. 考虑 f 的 $x=k/2^n$-切片：对每个 $n\in\mathbb{N}$, 定义 $k/2^n$-切片的线性补全：

$$f_n(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & x=\frac{k}{2^n},\\ \big(k+1-2^nx\big)\,f\big(\frac{k}{2^n},y\big)+\big(2^nx-k\big)\,f\big(\frac{k+1}{2^n},y\big), & x\in\big[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\big].\end{cases}$$

f_n 关于 x,y 分量显然连续, 即 $f_n\in C(\mathbb{R}^2)$. 下证 $f_n(x,y)\to f(x,y)$ 逐点成立：任取 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 对每个 n, 设整数 k_n 满足

$$x\in\left[\frac{k_n}{2^n},\frac{k_n+1}{2^n}\right].$$

则

$$\frac{k_n}{2^n}\to x,\qquad \frac{k_n+1}{2^n}\to x\qquad (n\to\infty).$$

由于对固定的 y, 函数 $x\mapsto f(x,y)$ 连续, 所以

$$f\left(\frac{k_n}{2^n},y\right)\to f(x,y),\qquad f\left(\frac{k_n+1}{2^n},y\right)\to f(x,y).$$

而 $f_n(x,y)$ 是这两个数的凸组合, 因此也有

$$f_n(x,y)\to f(x,y).$$

f 是可测函数 f_n 的逐点极限, 当然可测. □

REMARK. 无.

PROBLEM 11. 举例说明：存在非负可测函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得

1. $\lim_{k\to\infty}f_k$ 存在；
2. $\lim_{k\to\infty}\int f_k\,\mathrm{d}x$ 存在；

3. $\displaystyle\int \lim_{k\to\infty} f_k \, \mathrm{d}x < \lim_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}x.$

Solution. 1. $n\chi_{1/n} \to 0$, a.e.

2. $\int n\chi_{1/n} \, \mathrm{d}x = 1$

3. $\int \lim_{n\to\infty} n\chi_{1/n} \, \mathrm{d}x = 0 < \lim_{n\to\infty} \int n\chi_{1/n} \, dx = 1.$ □

Remark. 说明 Fatou 引理确实可以不取等, 因为 a.e. 收敛与 L^1 收敛的区别.

Problem 12. 举例说明：Riemann 可积与绝对可积（即 $|f|$ Riemann 可积）不等价.

Solution. 考虑 $f = (\chi_{\mathbb{Q}} - 1/2)\chi_{[0,1]}$ □

Remark. 后面会写 Lebesgue 可积与 Riemann 可积的区别.

Problem 13. 证明：若 $f \in L^1$, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\big(\{|f| \geq k\}\big) < +\infty.$$

Solution.

$$\begin{aligned} f \in L^1 \Longrightarrow |f| \in L^1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} m\big([|f| \geq k]\big) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} m\big([i \leq |f| < i+1]\big) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} m\big([i \leq |f| < i+1]\big) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i \times m\big([i \leq |f| < i+1]\big) \leq \int |f| < \infty \end{aligned}$$

□

Remark. 和概率论里那个期望的公式差不多, 本质上是余面积公式, 参见 Lawrence D. Evans 的大作《几何测度论》.

Problem 14. 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 证明

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

是一致连续的.

Solution. 由 L^1 函数在小测度集上积分小这一性质立得. □

Remark. L^p 函数其实也可, 因为有限区域上 $L^p \Rightarrow L^1$.

PROBLEM 15. **Chebyshev inequality.** 设 $f \geq 0$, 且 f 可积. 若 $\alpha > 0$, 并记

$$E_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\},$$

证明

$$m(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int f.$$

SOLUTION.

$$\alpha m(E_\alpha) = \int \alpha \chi_{E_\alpha} \leq \int f$$

□

REMARK. L^p 版本为 $m(E_\alpha) \leq \alpha^{-p} \|f\|_{L^p}^p$.

PROBLEM 16. 设

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

证明：$f \notin L^1(\mathbb{R})$.

SOLUTION.

$$\int_{\mathbb{R}} |f| > \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n\pi,(n+1)\pi]} |\sin x|/x \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[(n-1)\pi,n\pi]} |\sin x|/n\pi = 2/\pi \sum n^{-1} = \infty$$

□

REMARK. Dirichlet 积分 $\int_{\mathbb{R}^+} \sin x/x = \pi/2$, 广义 Riemann 可积但不 Lebesgue 可积.

PROBLEM 17. 计算

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{n^2 \sin(x/n)}{1+nx^2} \, dx.$$

SOLUTION. 考虑 DCT, 由 $\sin(x/n) \sim x/n$, 对足够大的 n 开始有

$$g_n(x) := \underbrace{\frac{n^2 \sin(x/n)}{1+nx^2}}_{\sim \frac{nx}{1+nx^2}} \leq \frac{C}{x}$$

因此取控制函数为

$$h(x) = \frac{C}{x}.$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{n^2 \sin(x/n)}{1+nx^2} \, dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \ln 2.$$

□

Remark. 1. 这其实就是 Riemann-Lebesgue 引理.

2. $A \sim B$ 的定义是存在正数 C_1, C_2 使得 $C_1 A \le B \le C_2$.

Problem 18. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $f \in L^1(E)$, 且 $f \ge 0$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E n\ln\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)\mathrm{d}x = \int_E f\,\mathrm{d}x.$$

Solution. 考虑

$$g_n(x) := n\ln(1+f(x)/n) \le f(x) \in L^1$$

由 $\ln(1+f(x)/n) \sim f(x)/n$ 直接用 DCT 即可. □

Remark. 无.

Problem 19. 证明：若 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上的实值可积函数, 且对每个可测集 E 都有

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0,$$

则 $f(x) \ge 0$ a.e. 并由此推出：若对每个可测集 E 都有

$$\int_E f(x)\,dx = 0,$$

则 $f(x) = 0$ a.e.

Solution. 只做第一问, 第二问分别考虑 f, $-f$ 即可. 假设 f 在一个正测集 E 上为负, 则 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x < 0$. □

Remark. 你现在可以通过测试在可测集上的积分来研究函数的非负性了！这在以后将经常用到（如变分原理）, 我们以后默认这一点.

Problem 20. 证明：存在 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 以及一列函数 $\{f_n\} \subset L^1(\mathbb{R})$, 使得

$$\|f_n - f\|_{L^1} \to 0,$$

但 $f_n(x)$ 对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都不收敛到 $f(x)$.

Solution. 关键在于反复运用 2^{-n} 的求和有界性. 先考虑 $[0,1)$ 上的序列：

$$g_{i,j} = \chi_{[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n})}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, \cdots, i$$

把 $g_{i,j}$ 排成一列（先固定 i, j 由小到大, i 再由小到大）, 已经在 $[0,1)$ 上实现了题目的要求：

$$g_{i,j} \to 0 \ \text{ in } L^1, \quad \text{but } \ 0 = \underline{\lim}\, g_{i,j}(x) \ne \overline{\lim}\, g_{i,j}(x) = 1$$

我们考虑在 $\mathbb{R}^+$ 上实现题干要求（R^- 上对称构造即可）, 但不能粗暴的平移 $g_{i,j}$（会导致积分值无限）, 稍作伸缩即可：

$$f_{i,j}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} g_{i,j}(x-n)$$

即为所求. □

Remark. 算是比较各种收敛性的经典模型了, 可以记一下.

Problem 21. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

固定有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个枚举 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, 令

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - r_n).$$

证明：F 可积, 因此上述级数对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$ 收敛. 进一步证明：F 在每个区间上都无界；事实上, 对任意 $\hat{F} = F$ a.e., $\hat{F}$ 在每个区间上都无界.

Solution.

$$\int F = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \int f(x - r_n)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty$$

即 F 可积, a.e. 收敛由可积函数 a.e. 有限可得. 对任意区间 (a,b), 有某个有理数 $r_n \in (a,b)$, 考虑右端无理数列 p_k 逼近, 有

$$F(p_k) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(p_n - r_n) \geq 2^{-n} f(p_k - r_n) \to +\infty$$

事实上, 无论怎么调整 F 在零测集上的值, 总能取到这样的无理数列（区间上的无理数集测度等于区间长度, 且 Lebesgue 正测度集一定是不可数集）. □

Remark. 无.

Problem 22. **Holder Inequality.** 对 $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $p, q > 1$, 有

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

讨论其取等条件.

Solution. 取等条件来自 Young Ineq. 回顾 Holder Ineq 的证明：设 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\ p, q > 1$. 由 Young Ineq

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a, b \geq 0.$$

不妨设 $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$, 令

$$\varphi = \frac{|f|}{\|f\|_p},\ \psi = \frac{|g|}{\|g\|_q},$$

则 $\int \varphi^p = \int \psi^q = 1$. 代入得

$$\int \varphi\psi \leq \frac{1}{p}\int \varphi^p + \frac{1}{q}\int \psi^q = 1,$$

从而

$$\int |fg|\mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

等号成立当且仅当 $\lambda|f|^p = \mu|g|^q$ 几乎处处成立. □

Remark. 后面会介绍更一般版本的 Holder 不等式.

Problem 23. **Minkowski Inequality.** 对 $p > 1$, 有

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

讨论其取等条件.

Solution. 取等条件来自 Holder Ineq. 当 $p = 1$ 或 $\|f+g\|_{L^p} = 0$ 时, 不等式显然成立. 下设 $p > 1$ 且 $\|f+g\|_{L^p} > 0$. 记共轭指数 q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, 则 $p(q-1) = q$.

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^p}^p = \int |f+g|^p &\leq \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \\
&\leq \left(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\right)\left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\right)\|f+g\|_{L^p}^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

两边同除以 $\|f+g\|_{L^p}^{\frac{p}{q}}$, 即得

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

等号成立当且仅当 f 与 g 线性相关且同号. □

Remark. 这就是 L^p 空间中的三角不等式.

2 知识回顾

2.1 集合, σ 代数, 测度空间

我们首先来明确几个基本概念的定义, 注意此处首先不提到任何关于“Lebesgue”和“Borel”的事情：

- 集合：略；
- 空间：集合与其上的结构放在一起, 称作空间. 一些简单的例子是：n 维向量空间（$\mathbb{R}^n$ 与其上的线性结构, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$）, 赋范向量空间（向量空间 + 范数, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, ||\cdot||)$）, 闭集上的连续函数空间（即 C^0 空间, 由连续函数 + 范数组成, 范数为最大值范数）. 本门课程中研究测度空间；
- σ 代数：对一个集合 X, 若 $\mathcal{F} \subset 2^X$ 对那三条定义成立（即对可数并交差运算封闭）, 则称 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个 σ 代数；
- 可测空间：$(X, \mathcal{F})$, 即集合与其上的 σ 代数一起；
- 测度：若定义在 $\mathcal{F}$ 上的一个映射 $m : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 满足非负性和可数可加性, 则称 m 是可测空间 $(X, \mathcal{F})$ 上的一个测度. 容易理解的是, σ 代数的性质与测度定义自然相容, 也就是说在可测空间上总能规定一个测度；
- 测度空间：$(X, \mathcal{F}, m)$

到此为止我们的测度空间中只出现了三个对象与五条性质：集合, σ 代数（可数并交差封闭）, 测度（非负, 可数可加性）. 有这些结构已经足以得到许多相当好的结果：测度的上/下连续性、Borel-Cantelli 引理、可测函数定义、可测函数对极限封闭、积分的定义、Levi 单调收敛、Fatou 引理、Lebesgue 控制收敛定理等等.

接下来我们考虑可测性与过往学习的连续性有什么关系, 也就是将拓扑这一结构引入测度空间. 课程中我们事实上是以 $\mathbb{R}$ 即其上的度量拓扑（开区间诱导的拓扑）为例进行学习. 在给出集合和拓扑的情况下我们自然希望先找出与拓扑在某种程度上相容的 σ 代数, 这里就是 **Borel-σ 代数**（由开区间生成）, 通过定义开区间的测度为其长度可以给出所有 Borel 集的测度, 于是我们得到了 $\mathbb{R}$ 上的 **Borel 测度空间**$(X, \mathcal{B}, m_{\mathcal{B}})$.

现在面临一个严肃的问题：Borel 测度空间不完备, 换句话说, 零测集的子集未必可测. 这在分析中会导致诸多问题, 比如取 a.e. 极限或修改零测集的操作会丢失可测性, 因此需要将 Borel 测度完备化, 也就是我们学习的 Lebesgue 测度.

EXERCISE 1. *Borel 测度空间不完备. 也就是说, 零测 Borel 集有非 Borel 子集.*

SOLUTION. 考虑标准 Cantor 集：它是闭集、Borel 测度为 0（通过删去开区间算出）、势为 $\aleph_1$, 因此其子集数为 $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, 但 $\mathbb{R}$ 中 Borel 集只有 $\aleph_1$ 个. □

2.1.1 测度的构造

这几个小节的内容主要参考自 2024 春实分析 H 鼎老师第二次习题课讲义. 我们在这一节总结一下如何在一个集合上构造出测度, 事实上我们在课堂上已经对 $\mathbb{R}$ 完成了这个操作. 首先明确外测度 m^* 是 2^X 到 $\mathbb{R}$ 的映射, 满足正定性与次可数可加性：

- 对开矩体定义体积;
- 用开矩体覆盖定义 $A \in 2^{\mathbb{R}}$ 的外测度 m^*, 并且证明外测度的性质
- 定义 Carathéodory 可测集, 所有 Carathéodory 可测集组成集合族 $\mathcal{L}$；
- 利用 Carathéodory 条件证明 $\mathcal{L}$ 是 σ 代数, 外测度 m^* 限制在 $\mathcal{L}$ 上是一个测度;
- 利用测度的性质证明上述测度扩张的唯一性.

我们现在从抽象测度的框架下重新梳理整个流程, 事实上抽象测度的框架是十分重要的, 比如我们需要构造一般的乘积可测空间上的乘积测度. 构造测度背后的哲学是: 先对少量简单的集合构成的代数 $\mathcal{A}$ 构造出预测度, 再利用 **Carathéodory 测度扩张定理**将代数 $\mathcal{A}$ 上的预测度扩张成它生成的 σ 代数 $\sigma(\mathcal{A})$ 上的测度.

Definition 2.1. 设 X 为全集, $\mathcal{A}$ 是 X 的子集族. 如果满足:

1. $X \in \mathcal{A}$;
2. 若 $A \in \mathcal{A}$, 则 $A^c \in \mathcal{A}$;
3. 若 $A, B \in \mathcal{A}$, 则 $A \cup B \in \mathcal{A}$.

称 $\mathcal{A}$ 为 X 上的一个代数.

Definition 2.2. 我们称 $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ 是代数 $\mathcal{A}$ 上的预测度, 如果它满足

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. 如果 $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ 是一列两两不交的集合, 并且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, 那么
$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

我们称预测度 μ 是有限的, 如果 $\mu(X) < \infty$; 我们称预测度 μ 是 σ-有限的, 如果存在一列上升的集合 $\{X_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$, 使得 $X_n \nearrow X$, 并且 $\mu(X_n) < \infty$.

通常来说代数 $\mathcal{A}$ 会是所有有限个不相交的开矩体之并/有限个不相交区间之并/乘积空间上有限个不相交的方块之并的组成的集合族.

Remark 2.1. 更一般地, 我们可以引入半代数的概念: $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ 是一个半代数, 如果满足

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$
2. 如果 $A, B \in \mathcal{S}$, 那么 $A \cap B \in \mathcal{S}$
3. 如果 $A \in \mathcal{S}$, 那么 A^c 是有限个 $\mathcal{S}$ 中元素的不交并.

对于任意一个半代数 $\mathcal{S}$, 我们它生成的代数 (即包含它的最小代数) 可以被具体写出来, 即所有有限个 $\mathcal{S}$ 中元素的不交并组成的集合族 (证明留作练习). 上面的几个代数的例子分别是所有开矩体/区间/方块组成的半代数所生成的代数. Carathéodory 测度扩张定理也可以从半代数上的 "测度" 作为起点, 但其实和我们下面要讲的没有太多区别.

下面我们陈述本节的主要定理.

Theorem 2.1. (Carathéodory 测度扩张定理) 假设 $\mathcal{A}$ 是集合 X 上的一个代数, μ 是 $\mathcal{A}$ 上的一个 σ-有限的预测度, 那么存在唯一的 $\sigma(\mathcal{A})$ 上的测度 $\bar{\mu}$, 使得 $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Remark 2.2. 如果预测度 μ 不是 σ-有限的, 那么测度 $\bar{\mu}$ 仍然存在, 但是可能不唯一. 作为例子, 考虑
$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \cap \mathbb{Q} \mid -\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty,\ 1 \leq i \leq n,\ n \geq 0 \right\},$$
即所有有限个 "左开右闭有理数区间" 的并组成的集合族, 容易验证这个是一个 $\mathbb{Q}$ 上的代数, 并且 $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. 我们考虑 $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = \infty, \forall \emptyset \neq A \in \mathcal{A}$, 这是一个预测度, 但不是 σ-有限的. 显然 $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ 上的计数测度和 "$0/\infty$ 测度" 都是 μ 的扩张, 不具有唯一性.

这个定理的证明过程和课堂上构造 $\mathbb{R}^n$ 中的测度是类似的, 唯一细小的差别是我们这里将会用 $\mathcal{A}$ 中元素覆盖定义外测度, 而课堂上实际上使用了半代数中的元素来覆盖 (显然是等价的). 具体证明过程在此略去, 感兴趣的同学请自行查阅.

下面我们来对重要的两个例子走一遍上面的流程. 不过在开始之前, 我们先对预测度中的第二个条件进行简化, 使其更容易验证.

Proposition 2.1. (Carathéodory 条件) 预测度中的第二个条件可以由如下两个条件推出:

1. 假设 $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset \mathcal{A}$ 是一列下降的集合, 且 $\mu(A_1)<\infty$, $A_n \searrow \emptyset$, 那么 $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$
2. 存在一列上升的集合 $\{X_n\}_{n\geq 1}\subset \mathcal{A}$, 其中 $\mu(X_n)<\infty$, 使得对任意的 $A\in\mathcal{A}$, $\mu(A)=\infty$, 有 $\mu(A)=\infty=\lim_{n\to\infty}\mu(A\cap X_n)$

我们把这两个条件称为 Carathéodory 条件.

Remark 2.3. 显然, 如果 μ 是有限测度, 上述条件 (2) 是不需要的.

证明. 证明仍然是从有限到 σ 有限.

Case 1: $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)<\infty$

此时令

$$A'_m=\bigcup_{n\geq m} A_n=\bigcup_{n\geq 1} A_n-\bigcup_{n<m} A_n,$$

由于 A_n 之间两两不交, 我们有 $A'_m\searrow\emptyset$, 并且 $\mu(A'_1)<\infty$, 于是根据条件 (1), 我们得到

$$0=\lim_{m\to\infty}\mu(A'_m)=\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),$$

即

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

Case 2: $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\infty$

这时我们需要证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\infty$. 为此, 选取满足条件 (2) 的 $\{X_n\}_{n\geq 1}$, 对于每个固定的 $n\geq 1$, 我们有

$$\mu\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right)\bigcap X_n\right)=\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}(A_m\cap X_n)\right)\overset{\text{Case 1}}{=}\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_m\cap X_n)\leq\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_m)$$

注意到根据条件 (2), 上式左边是趋于 ∞ 的, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\infty$. □

之后对于具体例子我们只要验证两个 Carathéodory 条件即可. 下面的引理在具体构造中往往起到关键的作用.

Lemma 2.1. (Cantor 紧集套原理) 假设 K_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中一列下降的紧集, 如果 $K_n\searrow\emptyset$, 那么存在 $N\geq 1$, 使得对任意的 $n\geq N$, 有 $K_n=\emptyset$.

这个引理的证明大家在数学分析中应当已经熟知了.

2.1.2 测度构造实例：$\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度

$\mathbb{R}^n$ 上的 Borel 代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 是由所有的矩体生成的, 所谓矩体就是形如 $I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$ 的集合, 其中 I_i 都是 $\mathbb{R}$ 中的区间 (各种各样的区间). 我们选取包含所有矩体的最小的代数即所有有限个矩体的并构成的代数, 注意这与一般抽象的构造——有限个矩体的不交并是一样的, 因为我们总是可以把有限个矩体的并砍碎变成有限个不交的矩体的并.

$$\mathcal{A}=\{R_1\cup\cdots\cup R_m \mid m\geq 0\},$$

我们现在来构造 $\mathcal{A}$ 上的预测度 m. 我们自然希望对矩体 $R=I_1\times\cdots\times I_n$ 定义测度为

$$m(R)=\prod_{i=1}^{n}|I_i|,$$

其中 $|I_i|$ 是区间 I_i 的长度 (1 维 Lebesgue 测度). 对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 选取一种方式将其写成有限个不交的矩体的并 $A = R_1 \sqcup \cdots \sqcup R_N$, 定义

$$m(A) = \sum_{i=1}^{N} m(R_i)$$

注意 A 有可能有不同的写成不交矩体并的方法, 我们必须验证 m 的良定性: 假设 $A = R_1' \sqcup \cdots \sqcup R_{N'}'$, 通过考虑这两种分割共同的"加细", 我们得到了第三种 A 的分割

$$A = \bigsqcup_{\substack{1 \le i \le N \\ 1 \le j \le N'}} R_i \cap R_j',$$

并且有

$$\sum_{i=1}^{N} m(R_i) = \sum_{\substack{1 \le i \le N \\ 1 \le j \le N'}} m(R_i \cap R_j') = \sum_{j=1}^{N'} m(R_j').$$

这就证明了 m 是良好定义的. 根据定义,m 自然具有有限可加性. 此外, 显然 m 是 σ-有限的 (考虑 $X_i = [-i, i]^n$).

下面我们来验证两个测度扩张的 Carathéodory 条件.

1. 假设 $A_i \searrow \emptyset$, $A_i \in \mathcal{A}$, 并且 $m(A_1) < \infty$. 假设 $\lim_{i \to \infty} m(A_i) = \delta > 0$, 那么通过适当缩小 A_i 中每个矩体的边长, 我们可以得到紧集 (有限个有界闭矩体的并) K_i, 使得 $m(A_i) - m(K_i) < \delta / 2^{i+1}$. 注意这里 K_i 可能不再是下降的, 我们做一下修正: 令

$$K_i' = \bigcap_{j \le i} K_j, \quad i \ge 1,$$

此时 $\{K_i'\}_{i \ge 1}$ 显然是下降到空集的紧集列, 从而根据 Cantor 紧集套原理, 存在 $i_0 \ge 1$, 使得对任意的 $i \ge i_0$, 有 $K_i' = \emptyset$. 此外, 对任意的 $i \ge 1$, 我们有

$$\begin{aligned} m(A_i - K_i') &\le m\left(\bigcup_{j \le i} (A_i - K_j)\right) \\ &\le m\left(\bigcup_{j \le i} (A_j - K_j)\right) \\ &\le \sum_{j \le i} m(A_j - K_j) \\ &\le \sum_{j \le i} \delta / 2^{j+1} \le \delta / 2. \end{aligned}$$

而当 $i \to \infty$ 时, $m(A_i - K_i') = m(A_i) \to \delta$, 这就产生了矛盾! 从而只能是 $\lim_{i \to \infty} m(A_i) = 0$.

2. 取 $X_i = [-i, i]^n$, 满足 $X_i \nearrow \mathbb{R}^n$, $m(X_i) = (2i)^n < \infty$, 并且对任意的 $A = R_1 \sqcup \cdots \sqcup R_N \in \mathcal{A}$, $m(A) = \infty$, 那么一定存在某个 R_j(不妨设为 R_1), 满足 $m(R_1) = \infty$, 于是

$$\lim_{i \to \infty} m(A \cap X_i) \ge \lim_{i \to \infty} m(R_1 \cap [-i, i]^n) = \infty.$$

综上, 根据 Carathéodory 测度扩张定理, 存在唯一的 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上的测度 m, 使得 $\bar{m}|_{\mathcal{A}} = m$. 再通过测度的完备化, 我们就得到了 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度.

更一般地, 我们可以通过与这里构造 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lebesgue 测度类似的方式构造乘积可测空间上的乘积测度, 并且说明 $m_{\mathbb{R}^n} = m_{\mathbb{R}^1} \otimes \cdots \otimes m_{\mathbb{R}^1}$.

2.1.3 重要测度：Dirac 测度、计数测度和 Stieltjes 测度

习题课上我提到了 **Dirac 测度**和**计数测度**, 这两个是结构比较简单的测度, 均可以在一般集合上定义. 物理上有 Dirac 函数 $\delta_0(x)$ 的概念, 被直觉上定义为满足

$$\delta_0(0) = +\infty, \quad \delta_0(x) = 0 \text{ iff } x \neq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \delta_0(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

用于描述单位脉冲或者爆破（一个东西在瞬间有一个有限增长）. 显然这不是一个数学上的定义, 数学里为其提供理论依据的东西是 Dirac 测度.

Definition 2.3. (Dirac 测度) 对可测空间 $(X, \mathcal{F})$ 与一点 $x \in X$, 可定义其上的一个测度 δ_x 为

$$\delta_x(A) = 1 \text{ if } x \in A, \quad \text{otherwise } \delta_x(A) = 0$$

称这种测度为（x 处的）Dirac 测度.

即一个集合的测度取决于它是否包含哪个特定点. Dirac 测度的重要意义是：1. 给出了判断属于关系的测度表示；2. 给出把区域表述转化为点态表述的办法. 更具体的说, 函数在一点的取值可以用积分表示了.

Exercise 2. 考虑积分的四步走定义, 将 $f(x)$ 用关于 δ_x 的积分表示.

Solution.

$$f(x) = \int_X f \ \mathrm{d}\delta_x$$

难以理解的话分别对特征函数、简单函数、非负可测函数、一般可测函数验证这一点. □

直观的运用是上学期在 pde 课程中学习的方程 $\Delta u = 0$ 的基本解, 以 $\mathbb{R}^3$ 情形为例, 其基本解为 $\Gamma(x) = C|x|^{-1}$, 显然其在原点外处处调和, 但在原点处的 Δ 是多少, 我们无法用经典语言说明. 不过现在用 Dirac 测度就可以说明白这件事情：

Theorem 2.2. (位势方程基本解)

$$\Delta\Gamma = \delta_0$$

. 这里的等号是分布意义下的等号, 即两边不是直接相等, 而是在乘任一光滑紧支函数后积分相等, 即

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Gamma \cdot \Delta\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\Gamma \cdot \varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi\delta_0 \ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \ \mathrm{d}\delta_0 = \varphi(0)$$

第一个等号来自分部积分. 此处的证明是 pde 中标准的挖去中心小球的技巧, 不再赘述.

第二个内容是**计数测度**, 顾名思义就是一个集合的测度由其中有给定点的数量决定.

Definition 2.4. (计数测度) 对可测空间 $(X, \mathcal{F})$ 与其中点集 $X_0 \subset X$, 可定义其上的一个测度 δ_{X_0} 为

$$\delta_{X_0}(A) = A\text{中含}X_0\text{中点的个数}$$

称这种测度为（X_0 给出的）计数测度. 请自行证明这是一个测度.

对于 X_0 是至多可数集的情况, 我们可以把计数测度写成 Dirac 测度离散和的形式：

$$\delta_{X_0} = \sum_{x \in X_0} \delta_x$$

实际上计数测度就是 Dirac 测度的线性和. 由先前关于 Dirac 测度“取值可以写成积分”的理解, 计数测度意味着“取值的离散和可以写成积分”, 经典的例子是求和符号 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 将 $f_n(x)$ 视作是 $\mathbb{N}$ 上的函数, 写作 $f^x(n)$, 则有 $f^x(n) = \int_{\mathbb{N}} f^x \ \mathrm{d}\delta_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f^x \ \mathrm{d}\delta_n = \int_{\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} f^x \ \mathrm{d}\delta_n = \int_{\mathbb{N}} f^x \ \mathrm{d}\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \int_{\mathbb{N}} f^x \ \mathrm{d}\delta_{\mathbb{N}}$$

这里其实没有涉及到交换级数和积分次序的问题, 因为积分本质上只在一点进行, $f^x\delta_n$ 满足支集分离.

把级数写成积分的重要意义是:你现在可以对级数使用各种积分技术了, 包括但不限于 Levi 单调收敛、Fatou 引理、Lebesgue 控制收敛、Fubini 定理及 L^p 空间相关理论.

第三个内容是 **Stieltjes 测度**, 主要研究一个函数如何关于另一个函数做积分, 在概率论中分布函数相关的章节会用到. 问题的动机是对于单调可导函数 g 我们有 $\int f\,\mathrm{d}g = \int fg'\,\mathrm{d}x$, 等式左侧的积分测度 $\mathrm{d}g$ 是如何定义的? 对于 g 只是单调连续的情况还有类似的办法吗?

证明的过程同样利用 Carathéodory 测度扩张定理, 这里只给出主线. 我们固定一个 $\mathbb{R}$ 上的递增右连续函数 F. 我们希望构造一个 Borel 测度 μ_F, 使得对任意的 $-\infty \le a < b \le +\infty$, $\mu_F(a,b] = F(b) - F(a)$. 为此我们先在代数 (请大家自行验证这的确是一个代数)

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{N} (a_i, b_i] \mid -\infty \le a_i < b_i \le +\infty,\ N \ge 0 \right\},$$

即有限个左开右闭 (右端点可以是 $+\infty$) 的区间的并构成的代数上构造预测度 μ_F.

首先注意到我们总是可以把 $\mathcal{A}$ 中的元素写成有限个“分离”的半区间之并, 即形如 $\bigsqcup_{i=1}^{N}(a_i, b_i]$, 其中 $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_N < b_N$, 并且可以证明这样的表示方式是唯一的 (请证明这一点!), 于是我们可以定义

$$\mu_F \bigsqcup_{i=1}^{N} (a_i, b_i] = \sum_{i=1}^{N} \left(F(b_i) - F(a_i) \right).$$

我们很容易验证 μ_F 具有有限可加性: 每次并上一个半区间 $(a_{N+1}, b_{N+1}]$, 由于这个新增的半区间与原来的不交, 通过讨论分离性就知道

$$\mu_F \bigsqcup_{i=1}^{N} (a_i, b_i] \bigsqcup (a_{N+1}, b_{N+1}] = \sum_{i=1}^{N+1} \left(F(b_i) - F(a_i) \right) = \mu_F \bigsqcup_{i=1}^{N} (a_i, b_i] + \mu_F(a_{N+1}, b_{N+1}].$$

通过验证那两个条件来应用 Carathéodory 测度扩张定理即可. 于是对任意的递增右连续函数 F, 存在唯一的 Borel 测度 μ_F, 使得对任意的 $a < b$, 有 $\mu_F(a,b] = F(b) - F(a)$. 此外, 这个测度还满足紧集的测度有限, 这样的 Borel 测度被称为 Stieltjes 测度. 事实上 $\mathbb{R}$ 上的 Stieltjes 测度和递增右连续函数 (模掉一个 $\mathbb{R}$ 的常数类) 是一一对应的. 特别地, 我们取 $F(x) = x$, 就得到了 **Lebesgue 测度**.

2.1.4 Littlewood 第一原理

Littlewood 第一原理是说：可测集差不多是开集（即“正则性”）.

我们来解释这句话. 可测集合是可测空间范畴下的概念, 而开集是拓扑空间范畴下的概念, 这里的“差不多”是测度意义下的.

Theorem 2.3. (Littlewood 第一原理, 表述一) *对任意的可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $U \supset E$, 使得 $m(U - E) < \varepsilon$.*

此外, 由于 $\mathbb{R}^n$ 上的开集可以写成可数个内部不相交的矩体的并, 我们还可以表述如下.

Theorem 2.4. (Littlewood 第一原理, 表述二) *对任意的可测集 $E \subset \mathbb{R}^n, m(E) < \infty$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 存在有限个不相交的开矩体的并 U, 使得 $m(E \Delta U) < \varepsilon$.*

Exercise 3. *证明：$(2^X, \Delta, \cap)$ 构成一个交换环, 其中对称差 Δ 是加法, 交集 $\cap$ 是乘法.*

Solution. 验证定义即可. □

Remark 2.4. 从描述集合论的观点看, 有限个不相交的开矩体的并 U 是容易描述、把握的集合, 从而这个表述告诉我们可测集可以从一个容易把握的集合出发, 通过加上、减去一个任意小测度的集合得到.

2.1.5 Cantor 集与 Cantor 函数

标准 Cantor 集是无处稠密、不可数、Lebesgue 零测度的闭集, 通过控制每步去掉区间的长度可以得到正测度 Cantor 集, 具体办法见第一次习题课讲义*习题 10* . Cantor 集是本科实分析中构造各种反例的起点, 与之关联的知识有 n 进制表示和 Cantor 函数.

实数的 n 进制表示 我们日常使用的是十进制, 即把所有实数 a 表示成

$$a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \times 10^n$$

并写成 $\cdots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots$ 的形式. 接下来我们证明这一过程在任意进制下都是对的.

Theorem 2.5. (*实数的 n 进制表示*) *设 $b \geq 2$ 是一个整数, 则任意实数 a 都可以表示成*

$$a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b^n, \qquad a_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}.$$

也就是说, a 可以写成 b 进制形式

$$\cdots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots .$$

证明. 只证明 $x \in [0, 1)$ 时的情形, 定义

$$x_0 = x,$$

并对每个 $k \geq 1$ 递归定义

$$a_{-k} = \lfloor b x_{k-1} \rfloor, \qquad x_k = b x_{k-1} - a_{-k}.$$

由于 $0 \leq x_{k-1} < 1$, 故

$$0 \leq b x_{k-1} < b,$$

从而

$$a_{-k} \in \{0, 1, \dots, b-1\}, \qquad 0 \leq x_k < 1.$$

并且

$$x_{k-1} = \frac{a_{-k} + x_k}{b}.$$

于是反复代入可得

$$x = \frac{a_{-1}}{b} + \frac{x_1}{b} = \frac{a_{-1}}{b} + \frac{a_{-2}}{b^2} + \frac{x_2}{b^2} = \cdots = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_{-j}}{b^j} + \frac{x_m}{b^m}.$$

因为 $0 \leq x_m < 1$, 所以

$$0 \leq \frac{x_m}{b^m} < \frac{1}{b^m} \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

故

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} b^{-j}.$$

□

这种表示一般并非完全唯一. 例如十进制中

$$1 = 0.9999 \cdots .$$

一般地, 一个有限展开可以改写为末尾减 1 后接无限多个 $b-1$ 的展开. 商去这种情形后, 在任意进制下, $\mathbb{R}$ 和小数的对应是存在唯一的, 而且这个构造是直观的.

Exercise 4. 用三进制小数表示标准 Cantor 集.

Solution.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times 3^{-n}, \quad a_n = 0 \text{ or } 2$$

□

Cantor 函数　"平时几乎处处不学习, 但期末时却可以考满分."———rgb

Definition 2.5. (Cantor 函数) Cantor 函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 可由三进制展开严格定义如下：对任意 $x\in[0,1]$, 设其三进制表示为

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \quad a_k \in \{0,1,2\}.$$

若 $x\in C$（即所有 $a_k\neq 1$）, 令 $b_k = a_k/2 \in \{0,1\}$, 定义

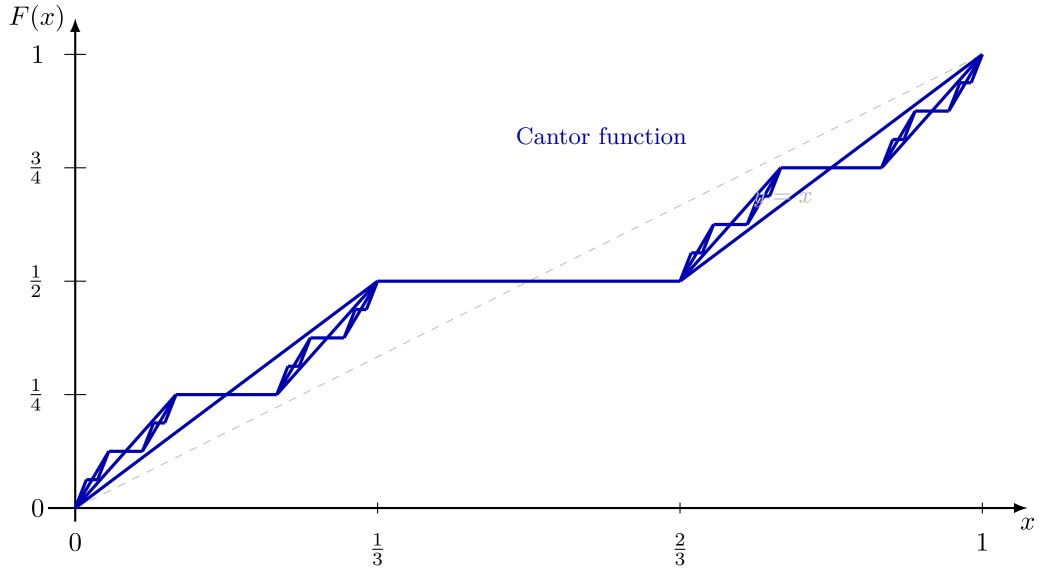
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}.$$

若 $x\notin C$, 取第一个使得 $a_k=1$ 的位置, 其后所有位视为 0, 再按上式定义.

不难验证, Cantor 函数 f 满足：

1. f 在 $[0,1]$ 上连续且单调不减;
2. $f'(x)=0$ 几乎处处成立;
3. $f(C)=[0,1]$, 即零测的康托集被映满单位区间;
4. $f(0)=0,\ f(1)=1$;
5. f 是有界变差函数, 但不是绝对连续函数.

这个函数很奇怪的一个性质就是引言里所提到的：它几乎处处不增长, 却可以从 0 上升到 1. 我们来绘制一个简单的 Cantor 函数示意图（原谅我 tikz 水平实在有限, 只能画到 4 次操作了, 将就着看吧）:



对于一般的正测度 Cantor 集, 我们用同样逐步定义的办法也可以构造类似的"Cantor 函数".

Cantor 测度 这一节大家不必掌握. Cantor 函数在零测集上有有限增长让我们不禁联想到 Dirac 测度, 不过由于 Cantor 集不可数, 我们没办法将 Cantor 函数写作某些 Dirac 测度线性组合的积分. 想要把 Cantor 函数写作某种测度的积分, 办法有两种：

1. 利用前面证明的 Stieltjes 测度理论. Cantor 函数连续单调递增, 于是可以给出 Stieltjes 测度 μ_f, 此时有

$$f(x) = \mu_f((0, x)) = \int_0^x \mathrm{d}\mu_f$$

2. 考虑“测度的极限”. 我们在可测空间 $([0,1], \mathcal{L})$ 上考虑, 定义 Cantor 集构造中第 n 步剩下的 2^n 个闭区间中每个闭区间的测度为 2^{-n}, 其余部分测度为 0, 于是得到了 $([0,1], \mathcal{L})$ 上的一列测度 μ_k, 其会弱收敛到某个极限测度, 记作 μ_f, 满足我们的要求.

这里的 μ_f 称作 **Cantor 测度**. 对测度弱收敛相关理论感兴趣的同学可查阅《_ 飞帖》.

2.1.6 不可测集

课上我们已经构造了经典的不可测集, 即 **Vitali 集**. 这是实分析中的重要反例. 事实上所有不可测集的构造都依赖于选择公理.

我们来证明几个（应该有用的）定理：

Theorem 2.6. *$\mathbb{R}$ 上对任意平移不变的、局部有限的非平凡测度（紧集测度有限, 且测度不恒为 0）存在不可测集.*

证明. 只要 $[0,1]$ 的测度为有限正数, 平移 Vitali 集就会出现矛盾. □

Theorem 2.7. *Vitali 集的可测子集只有零测集.*

证明. Vitali 集的有理数平移可以被控制在有限区间中, 其可测子集的可数平移不交并测度有限. □

Theorem 2.8. *$\mathbb{R}$ 上任意正测集必有不可测子集.*

证明. 设 Vitali 集的有理数平移构成 V_n, 与正测集 E 相交：考虑

$$E \cap V_n, \quad n \geq 1.$$

显然

$$E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (E \cap V_n).$$

假设所有 $E \cap V_n$ 都可测, 则由可数可加性

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E \cap V_n).$$

等号右侧全是 0, 而左侧 $m(E) > 0$, 矛盾. 因此至少存在某个 n_0 使得

$$E \cap V_{n_0} \subset E$$

是 E 的不可测子集. □

接下来我们构造一个重要的反例：

Exercise 5. *存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 使得 Lebesgue 可测集的原像是 Lebesgue 不可测集.*

Solution. 重点是利用 Cantor 函数 f. 为了取逆, 我们给 f 加上一个增量：定义 $g = (f + x)/2$, 注意到 $m(g(C)) > 0$, 可取不可测集 $V \subset g(C)$, 则

$$g^{-1}(V) \subset C \Longrightarrow m(g^{-1}(V)) = 0 \Longrightarrow g^{-1}(V)\text{可测, but } V = g^{-1}(g^{-1}(V))\text{不可测}$$

g^{-1} 即为所求. □

再加一个简单的小练习吧：

Exercise 6. 存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数把 Lebesgue 正测集映为 Lebesgue 不可测集.

Solution. 考虑用正测度版本的 Cantor 函数类似上题构造即可. □

2.2 可测函数

首先我们先忘掉课上学习的可测函数, 以便于厘清其定义的动机. 先定义**可测映射:**若两个可测空间 $(X_1, \mathcal{F}_1)$, $(X_2, \mathcal{F}_2)$ 的映射 $F: X_1 \to X_2$ 满足

$$\forall A \in \mathcal{F}_2, \quad F^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$$

则称 F 是 X_1 到 X_2 的可测映射.

现在把可测映射定义中的两个可测空间换成 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度空间, 则可测映射的定义变为“Lebesgue 可测集的原像是 Lebesgue 可测集”, 但这个定义会导致连续函数不可测（上面的 Exercise）, 我们不得不调整右边的空间为 Borel 测度空间, 可测映射的定义变为“Borel 集的原像是 Lebesgue 可测集”, 这正是我们所学的可测函数. 这就解释了为什么可测性会与拓扑概念产生联系, 以及为什么可测函数定义为“开集的原像是 Lebesgue 可测集”是合适的.

Exercise 7. (2024 实分析 H 期中) 简述 $\mathbb{R}$ 上可测函数的定义.

Solution. 开集的原像是 Lebesgue 可测集, 或者说, 由 $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ 的可测映射. □

2.2.1 极限运算保持可测性

将 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上的可测函数类记作 $L((X, \mathcal{F}, m))$ 或 $L(X)$（不引起误解的情况下）. 可测函数相比于连续函数, 最重要的性质是**对极限运算封闭**, 即

$$f_k \in L(X) \Longrightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} f_k \in L(X), \ \underline{\lim_{k\to\infty}} f_k \in L(X)$$

2.2.2 Littlewood 第二原理

Littlewood 第二原理是说：可测函数差不多是连续函数.

注意到可测函数是可测空间范畴下的态射, 而连续函数是拓扑空间范畴的概念, 这里的“差不多”也是在测度意义下的. 其精确表述就是 Lusin 定理.

Theorem 2.9. (Littlewood 第二原理, 表述一) *设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset \mathbb{R}^n$, $m(F^c) < \varepsilon$, 使得 $f|_F$ 是连续的.*

这里我们强调 F 是闭集的原因是我们希望将 $f|_F$ 延拓为一个 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 而一般来讲, 只有闭集上的连续函数才能延拓为全空间上的连续函数, 这就是所谓的 Tietze 扩张定理（这等价于 Urysohn 引理）.

Theorem 2.10. (Littlewood 第二原理, 表述二) *设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在连续函数 $g \in C(\mathbb{R}^n)$（可以取为 $\|f\|_{L^\infty} = \|g\|_{L^\infty}$）, 使得*

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

Remark 2.5. 这里我们使用了不相等集合的测度来衡量两个可测函数之间的距离, 事实上 $(\mathcal{L}(X \to \mathbb{R})/\sim, m(\{\neq\}))$ 构成了一个度量空间（因为可能会涉及到两个函数之间的距离是无穷, 我们这里假设 X 是一个有限测度空间）, 其中 $/\sim$ 代表的是商掉几乎处处为零的可测函数构成的子空间. 这是一个完备的度量空间吗?

我们将习题中的结论也搬过来.

Theorem 2.11. (Littlewood 第二原理, 表述三) *设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数, 那么存在连续函数列 $\{f_n\} \subset C(\mathbb{R})$ 几乎处处收敛到 f.*

Remark 2.6. 请注意, 我们在 Lusin 定理的叙述中总是假设可测函数 f 是实值或者是几乎处处有限的, 这是为了避免出现太多取值无穷的地方. 如果 f 不是几乎处处有限的, 我们可以使用 $\arctan(x)$ 或者 $\frac{x}{1+|x|}$ 这种函数化为有界的情形.

2.2.3 Littlewood 第三原理

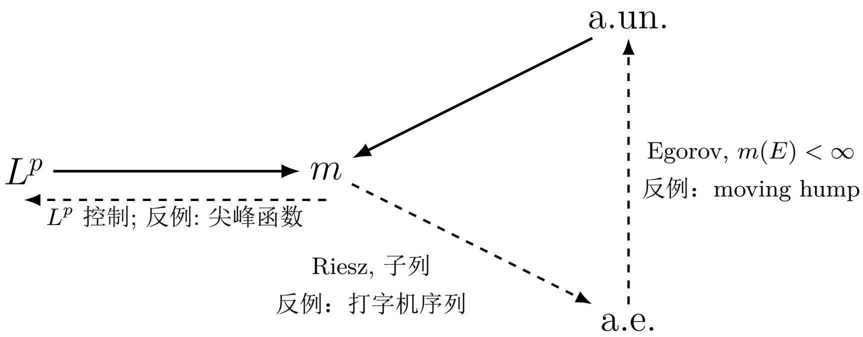
Littlewood 第三原理是说：可测函数列的几乎处处收敛差不多是一致收敛.

同样的, 几乎处处收敛是测度空间范畴中的概念, 而一致收敛是拓扑空间范畴中的概念, 这里的"差不多"依旧是用测度来衡量的. 其精确表述就是 Egorov 定理.

Theorem 2.12. (Littlewood 第三原理) 假设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 有限测度的可测集, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 是一列几乎处处收敛到 f 的可测函数列, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $E_\varepsilon \subset E$, $m(E_\varepsilon) < \varepsilon$, 使得 f_n 在 $E - E_\varepsilon$ 上一致收敛到 f.

2.2.4 各种收敛性

另一个重要的知识点是四种收敛性之间的关系：a.e. 收敛, a.un. 收敛, L^p 收敛, 依测度收敛. 疑似刘老师还没讲依测度收敛, 我不管了, 反正概率论也会讲（依概率收敛）.



上图中直线表示直接推出, 虚线表示条件推出. （感谢隔壁 fufu 助教让我少敲两页代码）设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是测度空间, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ 为可测函数.

1. **几乎处处收敛（a.e.）**

   定义是

   $$\mu\big(\{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\}\big) = 0.$$

   用集合语言刻画就是上限集测度为零, 也即对任意 $\varepsilon > 0$,

   $$\mu\left(\limsup_{n\to\infty}\{|f_n - f| > \varepsilon\}\right) = 0, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

2. **依测度收敛（in measure）**

   定义就是

   $$\mu\big(\{|f_n - f| > \varepsilon\}\big) \to 0, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

   Theorem 2.13. (Riesz 定理) 依测度收敛的函数列必有 a.e. 收敛子列.

3. **几乎一致收敛（almost uniformly）**

   这个定义来自 Egorov 定理, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在集合 $E \subset X$ 满足

   $$\mu(X \setminus E) < \varepsilon,$$

   且 $f_n \to f$ 在 E 上一致收敛. 等价地, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

   $$\lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=k}^{\infty}\{|f_j - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

   从这里可以看出, a.un. 收敛蕴含依测度收敛.

4. **L^p 收敛,** $1 \le p < \infty$

   定义为
   $$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0.$$
   同学们一定不要记成
   $$\|f_n\|_p \to \|f\|_p,$$
   这两个结论要互推需要额外条件.

现在我们给出上述图中的反例.

1. **尖峰函数**

   这个就是说能量集中在一点. 令
   $$f_n = n\,\chi_{[0,1/n]}.$$
   那么
   $$\|f_n\|_{L^1} = 1,$$
   但是 f_n 依测度收敛到 0, 因为支集在缩小.

2. **打字机序列**

   这个从字面来看, 就是从左往右来回扫过. 令
   $$f_{n,k} = \chi_{\left[\frac{k-1}{2^n},\,\frac{k}{2^n}\right)}, \qquad 1 \le k \le 2^n.$$
   再把这些函数按如下顺序排成一个序列:
   $$f_{1,1},\ f_{1,2},\ f_{2,1},\ f_{2,2},\ f_{2,3},\ f_{2,4},\ \ldots$$
   不难看出, 这个序列依测度收敛到 0, 因为每一项函数的支集长度趋于 0. 更具体地, 若记上述单列重排后的序列仍为 $\{f_m\}$, 则对任意 $\varepsilon \in (0,1)$,
   $$m\big(\{|f_m| > \varepsilon\}\big) = m(\operatorname{supp} f_m) \longrightarrow 0.$$
   因此
   $$f_m \to 0 \qquad \text{in measure.}$$
   但是这个序列在 $[0,1)$ 上无处收敛（作业题）, 从而说明依测度收敛并不推出几乎处处收敛.

3. **moving hump**

   这个的意思是质量滑向无穷远. 令
   $$f_n = \chi_{[n,n+1]}.$$
   显然
   $$f_n \to 0 \qquad \text{a.e.}$$
   但是它不依测度收敛到 0. 因为对任意 $\varepsilon \in (0,1)$, 有
   $$\{|f_n| > \varepsilon\} = [n, n+1],$$

2.3 Lebesgue 积分理论

2.3.1 抽象积分的定义

本节的目的是从抽象测度空间的框架下定义好积分映射. 我们先给出测度空间 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上实值可测函数的定义：

$$f \in L(X) \Leftrightarrow f\text{是}(X, \mathcal{F}, m_X)\text{到}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_{\mathbb{R}})\text{的可测映射}$$

接下来我们通过四步走定义测度空间 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上的 Lebesgue 积分：

$$\int_X : L(X) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_X f$$

Step1. 对可测集的特征函数定义

$$\int_X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad \chi_A \mapsto m_X(A)$$

Step2. 对特征函数的非负线性组合, 即非负简单函数定义

$$\int_X : \mathcal{S}^+(X) \to \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^N a_n \chi_{A_n} \mapsto \sum_{n=1}^N a_n m_X(A)$$

Step3. 对非负可测函数定义, 利用单调列逼近的办法：任意 $f \in L^+(X)$, 存在 $f_k \in \mathcal{S}^+(X)$, 使得 $f_k \nearrow f$

$$\int_X : L^+(X) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \lim_{k\to\infty} \int_X f_k$$

Step4. 对一部分可测函数定义, 记 $L'(X) := \{f \in L(X) : \int_X f^+\text{和} \int_X f^-\text{不同时等于}\infty\}$, 则定义

$$\int_X : L'(X) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_X f^+ - \int_X f^-$$

事实上我们没办法对全部的可测函数定义积分. 另一个需要注意的问题是 Step3 中的良定性：$\int_X f$ 与 f_k 的选取有关吗？

Exercise 8. Step3 是良定的, 即 $\int_X f$ 与 f_k 的选取无关. 更进一步, 对 $f \in L^+(X)$ 我们有

$$\int_X f = \sup_{\varphi \in S^+(X), \varphi \le f} \int_X \varphi$$

Solution. 固定一列 $f_k \in S^+(X)$, 满足 $0 \le f_k \uparrow f$, 并记 $I := \lim_{k\to\infty} \int_X f_k$.

引理： 若 $\varphi \in S^+(X)$ 且 $\varphi \le f$, 则 $\int_X \varphi \le I$.

事实上, 把 φ 写成

$$\varphi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}, \qquad a_j > 0,\ A_j \in \mathcal{F},$$

并可设 $A_1, \ldots, A_m$ 两两不交. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$A_{j,k}^{(n)} := A_j \cap \left\{ x \in X :\ f_k(x) \ge \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_j \right\}.$$

由于在 A_j 上有 $f_k(x) \uparrow f(x) \ge a_j$, 故 $A_{j,k}^{(n)} \uparrow A_j$ 令

$$\varphi_{k,n} := \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_j\, \chi_{A_{j,k}^{(n)}}.$$

则 $\varphi_{k,n} \in S^+(X)$, 且由定义可知 $\varphi_{k,n} \le f_k$, 于是

$$\int_X \varphi_{k,n} \le \int_X f_k.$$

令 $k \to \infty$, 由测度的下连续性得到

$$\lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_{k,n} = \sum_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_j\, m_X(A_j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_X \varphi.$$

因此

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_X \varphi \le I.$$

令 $n \to \infty$ 即得 $\int_X \varphi \le I$. 引理得证.

下证 Step3 良定. 设 $g_\ell \in S^+(X)$ 也是另一列满足 $0 \le g_\ell \uparrow f$, 并记

$$J := \lim_{\ell\to\infty} \int_X g_\ell.$$

对任意固定的 ℓ, 因为 $g_\ell \in S^+(X)$ 且 $g_\ell \le f$, 由上面的引理可知 $\int_X g_\ell \le I$. 令 $\ell \to \infty$ 得 $J \le I$. 交换 f_k 与 g_ℓ 的角色, 同理得 $I \le J$. 故 $I = J$. 这说明

$$\int_X f := \lim_{k\to\infty} \int_X f_k$$

与所选的单调递增简单函数逼近列无关, 即 Step3 是良定义的.

最后证明上确界公式. 由引理, 对任意 $\varphi \in S^+(X)$ 且 $\varphi \le f$, 都有 $\int_X \varphi \le \int_X f$. 于是

$$\sup\left\{\int_X \varphi :\ \varphi \in S^+(X),\ \varphi \le f\right\} \le \int_X f.$$

另一方面, 对任意 $f_k \in S^+(X)$ 满足 $0 \le f_k \uparrow f$, 每个 f_k 都满足 $f_k \le f$, 故

$$\int_X f_k \le \sup\left\{\int_X \varphi :\ \varphi \in S^+(X),\ \varphi \le f\right\}.$$

令 $k \to \infty$ 即得

$$\int_X f \le \sup\left\{\int_X \varphi :\ \varphi \in S^+(X),\ \varphi \le f\right\}.$$

综上,

$$\int_X f = \sup\left\{\int_X \varphi :\ \varphi \in S^+(X),\ \varphi \le f\right\}.$$

□

以后可能会了解 Bochner 积分相关的概念, 这里暂且不展开了. 所谓复可测函数的积分, 就是实部加虚部.

2.3.2 交换次序定理

即极限、积分、级数、导数等运算能否交换次序之类的问题, 我们从极限与积分交换次序开始:

Theorem 2.14. (Levi 单调收敛)

$$0 \le f_k \nearrow f \Longrightarrow \lim \int f_k = \int f$$

$$M \ge f_k \searrow f \Longrightarrow \lim \int f_k = \int f$$

Theorem 2.15. (Fatou 引理, 积分的下半连续性)

$$f_k \geq 0 \Longrightarrow \int \underline{\lim} f_k \leq \underline{\lim} \int f_k$$

Theorem 2.16. (Lebesgue 控制收敛, DCT)

$$|f_k| \leq g \in L^1 \Longrightarrow \lim \int f_k = \int \lim f_k$$

三个定理间的互推需要掌握, 另外就是如何适当地应用这几个定理. 实分析大手子彦哥指出, 先用 DCT, DCT 用不了的用 Fatou, 再用不了就只能 Egorov, 再再用不了就得弱收敛或者这题有问题. 我觉得他说的对.

我们来做几个略有难度的练习.

Exercise 9. (广义 DCT) $\{f_n\}$ 为可测函数列, $f_n \to f$ a.e., 若存在可积函数列 $\{g_n\}$ 与可积函数 g, 满足

$$|f_n| \leq g_n, \quad g_n \to g \text{ a.e.}, \quad \lim_{n\to\infty} \int g_n = \int g,$$

则 f 可积, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Solution. 本质上和 DCT 证明差不多. 由 $|f_n| \leq g_n$ 及 $f_n \to f$, $g_n \to g$ a.e. , 得

$$|f| \leq g \quad \text{a.e.},$$

由 g 可积知 f 可积. 构造非负函数

$$h_n = g_n + f_n \geq 0, \quad k_n = g_n - f_n \geq 0,$$

满足 $h_n \to g + f$, $k_n \to g - f$ a.e. . 对 h_n, k_n 分别 **Fatou** :

$$\int (g+f) \leq \varliminf_{n\to\infty} \int (g_n + f_n), \qquad \int (g-f) \leq \varliminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n).$$

展开并利用条件 $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n = \int g$:

$$\int g + \int f \leq \int g + \varliminf_{n\to\infty} \int f_n, \qquad \int g - \int f \leq \int g - \varlimsup_{n\to\infty} \int f_n.$$

消去公共项 $\int g$, 整理得

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f \leq \varliminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

□

Exercise 10. $f_n \geq 0$ 在 $(0,1)$ 上可测, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0$$

求证

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n = 0 \text{ a.e.}$$

Solution. 记

$$f(x)=\varliminf_{n\to\infty} f_n(x),$$

假设结论不成立, 则存在可测集 $E\subset(0,1)$ 满足

$$m(E)>0,\quad 且 f(x)>0,\ \forall x\in E.$$

对任意 $k\in\mathbb{N}^+$, 定义水平集

$$E_k=\left\{x\in(0,1)\,\middle|\,\varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\geq\tfrac{1}{k}\right\}.$$

则

$$\{x\mid f(x)>0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k.$$

由 $m\big(\{f>0\}\big)>0$, 存在某个 k_0, 使得

$$m(E_{k_0})>0.$$

由 **Fatou** 得:

$$\int_0^1\varliminf_{n\to\infty}\big(f_n\chi_{E_{k_0}}\big)\mathrm{d}x\leq\varliminf_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\chi_{E_{k_0}}\mathrm{d}x.$$

左侧估计:

$$\int_0^1\varliminf_{n\to\infty} f_n\chi_{E_{k_0}}\geq\int_{E_{k_0}}\frac{1}{2k_0}\mathrm{d}x=\frac{1}{2k_0}m(E_{k_0})>0.$$

右侧估计:

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\chi_{E_{k_0}}\leq\varliminf_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

于是得到矛盾. □

剩下的几个交换次序定理一般没什么操作空间:

Theorem 2.17. (积分号下求导)对 $f:E\times(a,b)\to\mathbb{R}$, $f(x,t)$ 的 t-切片可测, x-切片对 t 可微, 则

$$|\partial_t f(x,t)|\leq g(x)\in L^1\Longrightarrow\partial_t\int_E f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_E\partial_t f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

Theorem 2.18. (逐项积分定理)

$$f_k\in L^+(X)\Longrightarrow\int\sum f_k=\sum\int f_k$$

将级数视作关于 $\mathbb{N}$ 上计数测度的积分, 则逐项积分定理是如下 Tonelli 定理的一个特例, 旨在交换两个积分运算的次序.

Theorem 2.19. (Tonelli-Fubini 定理)设 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 与 $(Y,\mathcal{N},\nu)$ 为 σ-有限测度空间, $(\mu\times\nu)$ 为乘积测度.
(Tonelli) 若 $f\in L^+(X\times Y)$(即 f 为 $X\times Y$ 上的非负可测函数), 则函数

$$g(x)=\int_Y f_x(y)\,d\nu(y)\in L^+(X),\quad h(y)=\int_X f^y(x)\,d\mu(x)\in L^+(Y)$$

且成立

$$\iint_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu)=\int_X\left[\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right]d\mu(x)=\int_Y\left[\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right]d\nu(y).$$

(Fubini) 若 $f\in L^1(\mu\times\nu)$, 则对 a.e. $x\in X$, 截面函数 $f_x\in L^1(\nu)$; 对 a.e. $y\in Y$, 截面函数 $f^y\in L^1(\mu)$; 且上述几乎处处定义的函数

$$g(x)=\int_Y f_x(y)\,d\nu(y)\in L^1(\mu),\quad h(y)=\int_X f^y(x)\,d\mu(x)\in L^1(\nu)$$

并且

$$\iint_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu)=\int_X\left[\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right]d\mu(x)=\int_Y\left[\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right]d\nu(y).$$

2.3.3 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

Riemann 可积空间真包含于 Lebesgue 可积空间；广义 Riemann 可积空间和 Lebesgue 可积空间没有包含关系, 经典反例是 $\frac{\sin x}{x}$.

2.3.4 一致可积性

课堂上我们学习了积分的绝对连续性：

Theorem 2.20. （积分的绝对连续性）

$$f\in L^1(E)\Longrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \text{s.t. 任意}m(F)<\delta,\ \|f\|_{L^1(F)}\le\varepsilon$$

两个简单的推论分别说明了可积函数主要集中在有界和近的部分：

Corollary 2.1. （有界）

$$f\in L^1(E)\Longrightarrow \|f\|_{L^1([f\ge k])}\to 0$$

证明. 由作业题知 $\sum m([f\ge k])\le\infty$, 即 $m([f\ge k])\to 0$, 由积分绝对连续性即得. □

Corollary 2.2. （近）

$$f\in L^1(E)\Longrightarrow \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus B_k(0))}\to 0$$

证明. 由 $|f|\chi_{B_k(0)}\nearrow|f|$ 和 Levi 单调收敛即可. □

接下来我们引入一致可积的概念, 以研究对于一个函数族 $\mathcal{F}$ 来说, 这些好的性质会在什么条件下保持, 以及这种“一致性”会得到什么好的结果.

Definition 2.6. （一致可积, 形式一）称有限测度空间 E 上可积函数族 $\mathcal{F}$ 一致可积, 若

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{[f\ge k]}|f|\,\mathrm{d}x\to 0,$$

Definition 2.7. （一致可积, 形式二）称有限测度空间 E 上可积函数族 $\mathcal{F}$ 一致可积, 若对 $m(E_k)\to 0$ 有

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{E_k}|f|\,\mathrm{d}x\to 0,\quad \sup_{f\in\mathcal{F}}\int|f|\,\mathrm{d}x<+\infty$$

两个定义分别从近似一致有界和一致绝对连续的角度刻画, 我们证明两种定义的等价性：

证明. 先证 (I)⇒ (II). 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{\{|f|\ge N\}}|f|\,\mathrm{d}x\le 1$. 于是对任意 $f\in\mathcal{F}$, 有

$$\int_X|f|\,\mathrm{d}x=\int_{\{|f|<N\}}|f|\,\mathrm{d}x+\int_{\{|f|\ge N\}}|f|\,\mathrm{d}x.$$

由于在集合 $\{|f|<N\}$ 上有 $|f|<N$, 故

$$\int_{\{|f|<N\}}|f|\ \mathrm{d}x\le Nm(X).$$

因此

$$\int_X|f|\ \mathrm{d}x\le Nm(X)+1.$$

对 $f\in\mathcal{F}$ 取上确界即得 $\mathcal{F}$ 一致 L^1 有界的.

下证一致绝对连续性：任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $K > 0$, 使得

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq K\}} |f| \, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对任意可测集 $E \subset X$, 有

$$\int_E |f| \, \mathrm{d}x = \int_{E\cap\{|f|<K\}} |f| \, \mathrm{d}x + \int_{E\cap\{|f|\geq K\}} |f| \, \mathrm{d}x. \leq Km(E) + \int_{\{|f|\geq K\}} |f| \, \mathrm{d}x.$$

对 $f \in \mathcal{F}$ 取上确界, 得到

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_E |f| \, \mathrm{d}x \leq Km(E) + \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq K\}} |f| \, \mathrm{d}x.$$

于是

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_E |f| \, \mathrm{d}x < Km(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\varepsilon - \delta$ 语言即可说明对任意 $m(E_k) \to 0$ 的可测集列都有 $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{E_k} |f| \, \mathrm{d}x \to 0$.

再证 (II)⇒(I). 记

$$M := \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_X |f| \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

对任意 $f \in \mathcal{F}$, 由 Chebyshev 不等式可得

$$m(\{|f| \geq k\}) \leq \frac{1}{k} \int_X |f| \, \mathrm{d}x \leq \frac{M}{k}.$$

因此

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} m(\{|f| \geq k\}) \leq \frac{M}{k} \longrightarrow 0.$$

任取 $\varepsilon > 0$, 由一致绝对连续性, 存在 $\delta > 0$, 使得只要可测集 E 满足 $m(E) < \delta$, 就有

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_E |f| \, \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

由 $\sup_{f\in\mathcal{F}} m(\{|f| \geq k\}) \to 0$, 可取 k 充分大, 使得对一切 $f \in \mathcal{F}$, $m(\{|f| \geq k\}) < \delta$. 于是有 $\int_{\{|f|\geq k\}} |f| \, \mathrm{d}x < \varepsilon$, 因此

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq k\}} |f| \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 任意, 得

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq k\}} |f| \, \mathrm{d}x \longrightarrow 0.$$

□

本节的核心结论是如下的 Vitali 收敛定理, 给出了函数列点态收敛和作为 L^p 空间的元素依范数收敛的刻画：

Theorem 2.21. （Vitali 收敛定理）设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为有限测度空间, 即 $\mu(X) < \infty$, 且 $1 \leq p < +\infty$. 设 $\{f_n\}$ 为可测函数列, f 为可测函数. 若

$$f_n \to f \quad \text{a.e. on } X,$$

且函数列 $\{|f_n|^p\}$ 一致可积, 则

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0,$$

证明. 这里的技巧是利用 Fatou 得到 L^p 有界性, a.un 划分出主要部分和扰动, 并把扰动交给绝对连续性处理. 记

$$M := \sup_{n\geq 1}\int_X |f_n|^p \, d\mu < +\infty.$$

由 Fatou 引理,

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X |f_n|^p \, d\mu \leq M < +\infty.$$

因此 $f \in L^p(X)$.

下证 $\{|f_n - f|^p\}$ 一致可积：由不等式

$$|a-b|^p \leq 2^{p-1}\big(|a|^p + |b|^p\big),$$

对任意可测集 $E \subset X$, 有

$$\int_E |f_n - f|^p \, d\mu \leq 2^{p-1}\int_E |f_n|^p \, d\mu + 2^{p-1}\int_E |f|^p \, d\mu.$$

因为 $\{|f_n|^p\}$ 一致可积, 且 $|f|^p \in L^1(X)$, 故 $\{|f_n - f|^p\}$ 一致可积.

令 $g_n := |f_n - f|^p$. 则 $g_n \to 0 \quad \text{a.e. on } X$. 任取 $\varepsilon > 0$, 由 $\{g_n\}$ 一致可积, 存在 $\delta > 0$, s.t. 对任意 $\mu(E) < \delta$ 有

$$\sup_{n\geq 1}\int_E g_n \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 Egorov 定理, 存在可测集 $A \subset X$, 使得 $\mu(X \setminus A) < \delta$, 且 $g_n \to 0$ 在 A 上一致收敛. 于是当 n 充分大时,

$$\int_A g_n \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此当 n 充分大时,

$$\int_X g_n \, d\mu = \int_A g_n \, d\mu + \int_{X\setminus A} g_n \, d\mu < \varepsilon.$$

□

2.4 L^p 空间基本理论

本章 L^p 默认指 $L^p(\mathbb{R}^n)$, 难以理解的话视作 $L^p(\mathbb{R})$ 也完全没关系.

2.4.1 Banach 空间

（感觉这个上课顺序是要给下学期泛函分析打广告吗）课程讲义里已经很完备了：L^p 空间是 Banach 空间, 其上范数为

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

三角不等式对应到 Minkowski 不等式；L^p 空间完备, 即 L^p 范数下 Cauchy 列收敛, 即

$$f_n \in L^p, \quad \|f_n - f_m\|_p \to 0 \Longrightarrow \ \exists\, f \in L^p, \ \ f_n \to f \text{ in } L^p$$

值得注意的是 L^1, L^p, L^∞ 中一些性质会有不同, 大家要仔细阅读 p 的范围.

2.4.2 稠密性

稠密性的定义是：

$$\mathcal{F} \overset{\text{dense}}{\subseteq} L^p \Longleftrightarrow \forall\, f \in L^p, \ \exists\, f_n \in \mathcal{F}, \ \text{ s.t. } \ f_n \to f \ \text{ in } \ L^p$$

这一节中我们总结哪些函数空间在 L^p 中稠密, 其意义在于很多利用 L^p 范数刻画的性质可以通过稠密性从更小的、容易研究的空间（简单函数空间, 紧支连续空间）推广到更大的、难以研究的空间（L^p 空间, Sobolev 空间）, 这是分析中的常用手段. 本节的最终目的是证明 $C_c^\infty \overset{\text{dense}}{\subseteq} L^p$（更进一步其实有 $C_c^\infty \overset{\text{dense}}{\subseteq} W^{k,p}$）, 让我们从简单函数开始.

Theorem 2.22. $\mathcal{S} \overset{\text{dense}}{\subseteq} L^p$

证明. 二进制切割高度, 由 Levi 单调收敛即得. □

Theorem 2.23. $C_c \overset{\text{dense}}{\subseteq} L^p$

证明. 对简单函数 $\sum_{k=1}^n a_k\chi_{A_k}$（这里不妨设 A_k 不交）, 给定一个 ε, 由 Lebesgue 测度正则性可找出闭集 F_k 满足

$$F_k \subset A_k, \quad m(A_k \setminus F_k) \le \varepsilon^p n^{-p} a_k^{-p}$$

开集 G_k 满足

$$A_k \subset G_k, \quad m(G_k \setminus A_k) \le \varepsilon^p n^{-p} a_k^{-p}$$

对每组 (F_k, G_k) 用 Urysohn 引理得出一列 g_k, 且 $\|a_k g_k - a_k\chi_{A_k}\|_p \le 2^{1/p}\varepsilon/n$, 则

$$\left\|\sum_{k=1}^n a_k g_k - \sum_{k=1}^n a_k\chi_{A_k}\right\|_p \le \sum_{k=1}^n \|a_k g_k - a_k\chi_{A_k}\|_p \le C\varepsilon$$

因此对 $f \in L^p$, 先用 $\mathcal{S}$ 逼近, 再用 C_c 逼近 $\mathcal{S}$ 即可. □

但是 C_c 逼近缺乏可导性相关的信息, 一些借助导数刻画或证明的结论无法推广到 L^p 空间中（譬如你希望在 Sobolev 空间上实现 $\|f\|_p \le C\|Df\|_p$ 形式的控制）, 我们自然希望这些很差的空间可以用“最好”的空间逼近, 即 C_c^∞. 我们介绍把一般可测函数转化为光滑函数最有效的手段：

Theorem 2.24. （磨光）称把 $f \in L(\mathbb{R}^d)$ 卷积上一个 molifier η_ε 的行为叫做磨光, 且

$$f * \eta_\varepsilon = \eta_\varepsilon * f \in C^\infty$$

这里

$$f*\eta_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\eta_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \eta(x) := \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & x\in B_1(0) \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \qquad \|\eta\|_1 = 1, \qquad \eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\eta(x/\varepsilon)$$

证明. 请自行验证 $\eta\in C_c^\infty$ 且 $u := f*\eta_\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$, 这里只证 $f*\eta_\varepsilon\in C^\infty$, 办法是经典的 DCT. 我们要证对任意多重指标 α, 都有

$$D^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)D^\alpha\eta_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

先考虑一阶导数, 固定 $j\in\{1,\ldots,d\}$, 有

$$\frac{u(x+he_j)-u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\frac{\eta_\varepsilon(x+he_j-y)-\eta_\varepsilon(x-y)}{h}\,dy.$$

当 $h\to 0$ 时, 对每个 y,

$$\frac{\eta_\varepsilon(x+he_j-y)-\eta_\varepsilon(x-y)}{h} \longrightarrow \partial_j\eta_\varepsilon(x-y).$$

另一方面, 由中值定理,

$$\left|\frac{\eta_\varepsilon(x+he_j-y)-\eta_\varepsilon(x-y)}{h}\right| \le \|\partial_j\eta_\varepsilon\|_{L^\infty}.$$

因此

$$\left|f(y)\frac{\eta_\varepsilon(x+he_j-y)-\eta_\varepsilon(x-y)}{h}\right| \le \|\partial_j\eta_\varepsilon\|_{L^\infty}|f(y)|\in L^1(\mathbb{R}^d).$$

由 DCT 得

$$\partial_j u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\partial_j\eta_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

高阶导数同理, 我们略去.

最后还需说明这些导数是连续的. 若 $x_n\to x$, 则

$$f(y)D^\alpha\eta_\varepsilon(x_n-y)\longrightarrow f(y)D^\alpha\eta_\varepsilon(x-y)$$

对每个 y 成立, 并且

$$|f(y)D^\alpha\eta_\varepsilon(x_n-y)| \le \|D^\alpha\eta_\varepsilon\|_{L^\infty}|f(y)|\in L^1(\mathbb{R}^d).$$

再次由 DCT,

$$D^\alpha u(x_n)\to D^\alpha u(x).$$

□

Theorem 2.25. （光滑逼近）$1\le p<\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, 则 $f*\eta_\varepsilon\to f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

证明. 由卷积定义和换元

$$(f*\eta_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\eta_\varepsilon(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-\varepsilon y)\eta(y)\,dy.$$

因此

$$(f*\eta_\varepsilon)(x)-f(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\eta(y)\big(f(x-\varepsilon y)-f(x)\big)\,dy.$$

由 Minkowski 积分不等式,

$$\|f*\eta_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \int_{\mathbb{R}^d}\eta(y)\|f(\cdot-\varepsilon y)-f(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,dy.$$

对每个固定的 $y\in\mathbb{R}^d$, 由于 $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ 和 L^p 范数的平移连续性, 得

$$\|f(\cdot-\varepsilon y)-f(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\longrightarrow 0, \qquad \varepsilon\to 0.$$

另一方面,

$$\|f(\cdot-\varepsilon y)-f(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\le\|f(\cdot-\varepsilon y)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}+\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}=2\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\in L^1(\mathbb{R}^d).$$

由 DCT,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\eta(y)\|f(\cdot-\varepsilon y)-f(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,dy\longrightarrow 0.$$

□

Theorem 2.26. $C_c^\infty \overset{\text{dense}}{\subseteq} L^p$

证明. L^p 函数能量在近处集中, 因此在 $B_R(0)$ 上截断后光滑逼近即可. □

注意: L^p 范数的平移连续性不能用 C_c^∞ 逼近来做!(发生了循环论证)至于说这东西是干什么的, 最广泛的应用就是在 Sobolev 空间上刻画各种方程弱解的性质, 不过这个涉及到 L^p 函数的弱导数之类的比较麻烦, 感兴趣的同学可以修读 mxn 或 zjy 老师的 pde2.

2.4.3 L^p 不等式

L^p 不等式其实就是在刻画对于不同的 p, L^p 空间之间"哪些包含哪些"(包含是集合语言, 请与后面的"嵌入"区分开)的关系, 最简单的例子就是在有限测度空间上 $p\ge q\implies L^p\subset L^q$, 但在无限测度空间上不同 L^p 空间之间没有直接的包含关系(考虑 $|x|^{-\alpha}$ 在近处和远处的截断来构造反例). 课上我们已经学过了一些基本的不等式:

Theorem 2.27. Holder Inequality. $1\le p\le\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\implies\|fg\|_1\le\|f\|_p\|g\|_q$.

Theorem 2.28. Minkowski Inequality. $1\le p\le\infty\implies\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$.

前者意味着 $L^p\cap L^q\subset L^1$, 后者就是三角不等式. 我们从这个 L^1 开始推广:

Theorem 2.29. Generalized Holder Inequality. $1\le p_i\le\infty$, $\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}=\frac{1}{r}\le1\implies\|\prod_{i=1}^n f_i\|_r\le\prod_{i=1}^n\|f_i\|_{p_i}$.

证明. 先考虑 $1\le p_i<\infty$ 且 $r<\infty$ 的情形.

对 n 作归纳. $n=2$ 是一个简单的推广, 留给大家练习. 假设结论对 $n-1$ 个函数成立, 令

$$F=\prod_{i=1}^{n-1}f_i,\qquad \frac{1}{s}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{p_i}.$$

于是 $\frac{1}{s}+\frac{1}{p_n}=\frac{1}{r}$., 即 $\frac{r}{s}+\frac{r}{p_n}=1$., 令

$$\alpha=\frac{s}{r},\qquad \beta=\frac{p_n}{r}.$$

则 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$., 由二元 Holder 不等式, 作用于 $|F|^r$ 和 $|f_n|^r$, 可得

$$\int_X|Ff_n|^r\,d\mu=\int_X|F|^r|f_n|^r\,d\mu\le\left(\int_X|F|^{r\alpha}\,d\mu\right)^{1/\alpha}\left(\int_X|f_n|^{r\beta}\,d\mu\right)^{1/\beta}.$$

注意到 $r\alpha=s$, $r\beta=p_n$, 所以

$$\int_X|Ff_n|^r\,d\mu\le\left(\int_X|F|^s\,d\mu\right)^{r/s}\left(\int_X|f_n|^{p_n}\,d\mu\right)^{r/p_n}.$$

即 $\|Ff_n\|_r^r\le\|F\|_s^r\|f_n\|_{p_n}^r$, 由归纳假设,

$$\|F\|_s=\left\|\prod_{i=1}^{n-1}f_i\right\|_s\le\prod_{i=1}^{n-1}\|f_i\|_{p_i}.$$

因此

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} f_i\right\|_r^r \leq \left(\prod_{i=1}^{n-1} \|f_i\|_{p_i}\right)^r \|f_n\|_{p_n}^r.$$

开 r 次方得

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} f_i\right\|_r \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i}.$$

若某些 $p_i = \infty$, 则对这些指标有

$$|f_i(x)| \leq \|f_i\|_\infty \qquad \text{a.e.}$$

因此

$$\left|\prod_{i=1}^{n} f_i\right| \leq \left(\prod_{p_i=\infty} \|f_i\|_\infty\right)\left(\prod_{p_i<\infty} |f_i|\right).$$

再对所有满足 $p_i < \infty$ 的函数应用上面已经证明的情形, 即得结论. □

这个不等式给出了更细致的左端刻画：$\bigcap_{i\leq n} L^{p_i}$, 接下来的问题是能否给出类似的右端刻画？事实上我们最终得到的结论是任意的 L^p 都有左右连续嵌入.

Theorem 2.30. （集合的包含关系）$1 \leq p < q < r \leq \infty \implies L^p \cap L^r \subset L^q \subset L^p + L^r$

证明. 先证明右端包含. 设 $f \in L^q$, 令 $E = \{x : |f(x)| > 1\}$, 并定义

$$g = f\chi_E, \quad h = f\chi_{E^c}.$$

则 $|g|^p = |f|^p\chi_E \leq |f|^q\chi_E$, 因此 $g \in L^p$；同时

$$|h|^r = |f|^r\chi_{E^c} \leq |f|^q\chi_{E^c},$$

因此 $h \in L^r$. （当 $r = \infty$ 时, 显然有 $\|h\|_\infty \leq 1$. ）于是 $f = g + h$, 其中 $g \in L^p$, $h \in L^r$, 故 $L^q \subset L^p + L^r$.

左端我们事实上要证明一个不等式：

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}, \quad \text{where} \quad \lambda = \frac{q^{-1} - r^{-1}}{p^{-1} - r^{-1}}.$$

本质就是 Holder, 凑凑系数就凑出来了, 我实在写不动了. □

Theorem 2.31. 上述两个包含关系作为嵌入映射是连续的.

证明. 略. □

最后是两个看起来就很逆天的插值定理, 我学的时候都没想过这辈子居然能用上, 结果还真有用. 我把它们翻译成尽量容易理解的形式 Ctrl V 在这里来勉励大家, 现在很多学的东西并不是白学的, 不知道在未来的什么时间就会重新捡起来（不过用的时候现学也来得及？）

Theorem 2.32. Riesz-Thorin Interpolation. 测度空间 (X,μ), (Y,ν), $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$ ($q_0 = q_1 = \infty$ 时要求 ν 是半有限测度). 定义:

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}, \quad 0 < t < 1.$$

线性映射 $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \to L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$,
若在端点有控制: $\|Tf\|_{q_0} \leq M_0\|f\|_{p_0}$ $(\forall f \in L^{p_0}(\mu))$, $\|Tf\|_{q_1} \leq M_1\|f\|_{p_1}$ $(\forall f \in L^{p_1}(\mu))$.
则对插值有控制: $\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t}M_1^t\|f\|_{p_t}$ $(\forall f \in L^{p_t}(\mu))$.

Theorem 2.33. Marcinkiewicz Interpolation. 测度空间 (X,μ), (Y,ν), $p_0 \le q_0$, $p_1 \le q_1 \in [1,+\infty]$, $q_0 \ne q_1$. 定义:

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}, \quad 0 < t < 1.$$

次线性映射 $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \to \mathscr{L}(Y,\nu)$,
若在端点有控制: $[Tf]_{q_0} \le M_0\|f\|_{p_0}$, $[Tf]_{q_1} \le M_1\|f\|_{p_1}$.
则对插值有控制: $\|Tf\|_{q_t} \le B_t\|f\|_{p_t}$ (B_t 与 p_i, q_i, C_i, t 相关).

可以只看最后一句试图理解一下它为什么叫插值定理, 以及反应了 L^p 空间在什么条件下的怎样的包含关系. 如下是一个 Marcinkiewicz 插值定理的简单推论：

Corollary 2.3. Hardy-Littlewood Maximal Operator. 设 Hardy-Littlewood 极大算子:

$$Hf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|dy, \quad f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

则

1. H 是次线性映射.
2. $\|Hf\|_\infty \le \|f\|_\infty$.
3. $1 < p < \infty$, $\|Hf\|_p \le C\frac{p}{p-1}\|f\|_p$.