实分析习题课 5.29 讲义

张汇泽
中国科学技术大学

2026 年 5 月 29 日

目录

1 第一部分：5.18 与 5.20 作业解答

1.1 5.18 作业：Vitali 覆盖引理中的局部递推证明

1.1.1 题目背景与要求

在 Vitali 覆盖引理的证明过程中，为了构造一系列互不相交的区间以逼近可测集合的测度，采取了如下的迭代选取步骤：

1. **初始设定**：首先选取开集 $G \supset E$ 且满足 $m(G) < \infty$。
2. **覆盖限制**：不失一般性，要求 Vitali 覆盖族 Γ 中的区间满足 $I \subset G$。
3. **定义上确界**：定义区间长度的上确界为 $\delta_0 = \sup\{|I| : I \in \Gamma\} \leq m(G)$。
4. **选取区间**：选取 $I_1 \in \Gamma$，使得其长度满足一定条件。
5. **停止或继续**：如果 $E \subset I_1$，则证明过程停止。否则（即 $E \not\subset I_1$），定义新的上确界：

$$\delta_1 = \sup\{|I| : I \in \Gamma, I \cap I_1 = \emptyset\}$$

作业：严谨地证明在 $E \not\subset I_1$ 的前提条件下，必然有 $\delta_1 > 0$。

思路导航与直观几何解释

为什么要证明 $\delta_1 > 0$？
引理的精髓在于用一列互不相交的区间填满 E。如果某一轮中 $\delta_1 = 0$，说明再也找不到任何与已知区间不相交且正长度的新区间了，递推将异常中止。
几何直观：
因为 I_1 是闭区间，点 $x \in E$ 在其外部。拓扑学表明，一个点与一个闭区间如果不相交，它们间必定存在正的“安全距离”。由于 Vitali 覆盖允许区间长度任意小，我们总能在这个安全距离内塞进一个属于 Γ 的微小区间 I，完全不与 I_1 碰头。既然存在这样的正长度区间，其上确界自然严格大于 0。

1.1.2 Proof

证明. 第一步：确定外部点的存在性
根据已知条件，由于 $E \not\subset I_1$，由集合论基本定义，必然存在至少一个点 x，满足：

$$x \in E \quad 且 \quad x \notin I_1$$

第二步：利用闭区间性质建立正距离
Vitali 覆盖引理所采用的区间族 Γ 均为闭区间。由于 $I_1 \in \Gamma$，故 I_1 是闭区间（记作 $[a, b]$）。因为 $x \notin I_1$，由拓扑性质，点 x 与闭区间 I_1 之间的距离定义为：

$$d \equiv \operatorname{dist}(x, I_1) = \inf_{y \in I_1} |x - y|$$

由于 I_1 是闭集且 x 是外部点，该距离必然严格大于 0，即：

$$d = \max(a - x, x - b) > 0$$

第三步：应用 Vitali 覆盖的定义选取新区间

根据 Vitali 覆盖的定义，对于上述点 $x \in E$，我们令限制常数 $\eta = d > 0$。必定存在一个区间 $I \in \Gamma$，满足：

$$x \in I \quad \text{且} \quad 0 < |I| < d$$

第四步：严格推导两区间不相交

用反证法证明 $I \cap I_1 = \emptyset$。假设 $I \cap I_1 \neq \emptyset$，即存在实数 $y \in I \cap I_1$。

- 因为 $x \in I$ 且 $y \in I$，且 I 是区间，故 x, y 间距离不能超过区间长度：

$$|x - y| \leq |I| < d$$

- 因为 $y \in I_1$，根据距离的定义，点 x 到集合 I_1 的最短距离应满足：

$$d = \operatorname{dist}(x, I_1) \leq |x - y|$$

结合得到矛盾：$d \leq |x - y| < d$。假设错误，必须有 $I \cap I_1 = \emptyset$。

第五步：得出最终结论

我们寻寻找的区间 $I \in \Gamma$ 满足 $I \cap I_1 = \emptyset$ 且 $|I| > 0$。根据定义，δ_1 是所有这类区间长度的上确界：

$$\delta_1 = \sup\{|I'| : I' \in \Gamma, I' \cap I_1 = \emptyset\}$$

because I 属于该集合，上确界必然大于或等于该元素的测度：

$$\delta_1 \geq |I| > 0$$

□

1.2 5.20 作业：Cantor-Lebesgue 函数的性质分析

1.2.1 证明该函数在 $[0, 1]$ 上单调递增

函数构造的核心逻辑重温

Cantor-Lebesgue 函数 $f : [0, 1] \to [0, 1]$ 将定义域分为开集 G 与三分集 C 分别定义：

- **在开集 G 上**：第 k 步挖出的第 j 个开区间 $I_{k,j}$ 上，函数值恒为 $f(x) = \frac{2j-1}{2^k}$。
- **在三分集 C 上**：由左侧开集内函数值的上确界定义：

$$f(x) = \sup\{f(t) : t \in [0, x) \cap G\}, \quad f(0) = 0, \ f(1) = 1$$

解题突破口：统一定义域的表达

常规方法是对 x_1, x_2 的集合归属进行繁琐分类讨论。
但是，通过观察，我们可以先证明，上确界表达式 $f(x) = \sup\{f(t) : t \in [0, x) \cap G\}$ 对于 $(0, 1]$ 上的**所有点**（包含 G 中的点）都是成立的。一旦形式统一，单调性可以很方便的得出。

证明. **第一步：扩展上确界定义到全域**
验证：若 $x \in G$，统一公式 $\tilde{f}(x) = \sup\{f(t) : t \in [0, x) \cap G\}$ 是否等于原定义的 $f(x)$。
设 $x \in I_{k,j} = (a, b)$，原定义该开区间内恒为 $C_0 = \frac{2j-1}{2^k}$。因 $I_{k,j}$ 是开区间且 $x > a$，区间内存在点 t_0 满足 $a < t_0 < x$。此时 $t_0 \in [0, x) \cap G$ 且 $f(t_0) = C_0$，故 $\sup \geq C_0$。同时，其左侧任意开区间的函数值均严格小于 C_0，故 $\sup \leq C_0$。
夹逼可知，全定义域统一公式成立：对所有 $x \in (0, 1]$，均有 $f(x) = \sup\{f(t) : t \in [0, x) \cap G\}$。

第二步：集合包含关系
任取 $x_1 < x_2$。若 $x_1 = 0$，$f(0) = 0 \leq f(x_2)$ 显然成立。
若 $x_1 > 0$，对应的左开区间存在严格包含关系：$[0, x_1) \subset [0, x_2)$。与开集 G 取交集后包含符号依然成立：

$$\{[0, x_1) \cap G\} \subseteq \{[0, x_2) \cap G\}$$

第三步：利用上确界单调性得出结论
若集合 $A \subseteq B$，则必定 $\sup(A) \leq \sup(B)$。应用此法则：

$$\sup\{f(t) : t \in [0, x_1) \cap G\} \leq \sup\{f(t) : t \in [0, x_2) \cap G\}$$

即 $f(x_1) \leq f(x_2)$。故函数在 $[0, 1]$ 上单调递增。 □

1.2.2 直接由定义证明其不是绝对连续的

解题的基本想法

定义否定格式： 证明存在临界变差 $\epsilon_0 > 0$，使得无论 $\delta > 0$ 多小，总能找出有限多个不相交开区间，总长度低于 δ，但函数变差总和却不小于 ϵ_0。

证明. **第一步：设定临界阈值 ϵ_0**
令固定的变差阈值 $\epsilon_0 = 1$。任给控制长度 $\delta > 0$。

第二步：构造特定阶数的剩余区间族
因为 $\lim_{k\to\infty}(\frac{2}{3})^k = 0$，必然存在足够大的正整数 $k \in \mathbb{N}$，使得：

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k < \delta$$

在第 k 步挖除后，剩下的是由 2^k 个互不相交的闭区间组成的集合 C_k，每个长度为 $\frac{1}{3^k}$。将其去除端点，转化为开区间列 $\{(a_m, b_m)\}_{m=1}^{2^k}$。

第三步：校对区间总长度条件

这 2^k 个开区间的长度进行累加：

$$\sum_{m=1}^{2^k}(b_m - a_m) = 2^k \times \frac{1}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k < \delta$$

第四步：核算函数值的全变差

由于 f 单调递增，可以摘掉绝对值符号：$\sum_{m=1}^{2^k}(f(b_m) - f(a_m))$。

这些区间 $[a_m, b_m]$ 的补集（在 $[0,1]$ 内部）恰好是被挖去的所有 Cantor 开区间并集。在开区间内部，函数值锁死为常数（局部增量为 0）。因此，函数从 $f(0) = 0$ 到 $f(1) = 1$ 的所有增量，全部压缩积聚在剩余的这 2^k 个区间上：

$$\sum_{m=1}^{2^k}(f(b_m) - f(a_m)) = f(1) - f(0) = 1$$

第五步：完备性论证

将第四步结果与阈值比对：

$$\sum_{m=1}^{2^k}|f(b_m) - f(a_m)| = 1 \geq \epsilon_0$$

重现了绝对连续性定义的反面逻辑。直接根据定义，Cantor-Lebesgue 函数在 $[0,1]$ 上不是绝对连续的。 □

2 第二部分：作业问题总结与积分交换理论探讨

2.1 5.6 作业常见问题总结：极大函数、覆盖引理与可测性构造

2.1.1 Vitali 覆盖引理的本质与应用边界

在批改作业时，发现部分同学在证明弱型 $(1,1)$ 估计的最佳常数阶（即求测度的下界）时，试图使用 Vitali 覆盖引理。这里我们需要严格澄清 Vitali 覆盖引理的核心功能及其使用边界。

核心洞察：Vitali 覆盖引理是用来做什么的？

Vitali 覆盖引理的本质，是用来求测度的“上界 (Upper Bound)”。

在测度论和调和分析中，我们经常遇到这样的困境：一个集合 E 被无数个、相互重叠的球所覆盖。如果我们直接把这些球的测度加起来，由于严重的重复计算，结果往往会趋于无穷大。

Vitali 覆盖引理提供了一个工具：它允许我们从这无数个相互交织的球中，提取出一个**两两互不相交**的子球族 $\{B_i\}$。因为它们不相交，它们的测度可以安全地相加。引理保证了，只要把这些不相交的球按一定比例放大（例如 3 倍或 5 倍），就能反过来覆盖原来的集合 E。

1. 它能为我们提供什么样的帮助？ Vitali 覆盖引理是建立**不等式上界**的桥梁。在证明 Hardy-Littlewood 极大不等式 $m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \le \frac{C}{\alpha}\|f\|_1$ 时，它是核心工具。它帮助我们将逐点 (pointwise) 的分析学条件（每一点都有一个积分均值大于 α 的球），转化为全局的几何测度控制：

$$m(E_\alpha) \le C \sum m(B_i) \le \frac{C}{\alpha} \sum \int_{B_i} |f| \le \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f|$$

正是因为挑出的球不相交，最后一步将局部积分相加转化为全空间积分才得以合法成立。

2. 它不能提供什么样的帮助？ Vitali 覆盖引理无法用于寻找测度的“下界 (Lower Bound)”。 在本周作业的第三部分中，要求证明存在 $c' > 0$，使得 $m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \ge \frac{c'}{\alpha}$。这是一个寻找最佳下界的问题。我们需要证明集合“至少有多大”。如果强行使用 Vitali 引理，你只能得出 $m(E_\alpha) \le C \dots$，这只说明了集合不能超过多大，而无法提供任何关于它至少有多大的信息。寻找下界必须依赖于具体的**几何构造**（例如构造一个确定的圆环或球完全包含在水平集内部）。

2.1.2 非中心极大函数 f^* 可测性的构造性证明

题目回顾： 证明若 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，则非中心极大函数 $f^*(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f| dm$ 可测。

思路来源与陷阱分析

出现的问题： 批改作业时，有同学试图利用可数个可测函数去逼近 f^* 以此证明 f^* 也是可测的，但是在叙述时十分的不严格，出现了很多错误，在这里给出此方法对应的严格解答。

完整解答步骤　第一步：构造可数的“有理球”族

设 $\mathbb{Q}$ 为有理数集，$\mathbb{Q}^+$ 为正有理数集。我们定义“有理球”的集合 $\mathcal{B}_\mathbb{Q}$ 为所有中心在 $\mathbb{Q}^n$ 且半径在 $\mathbb{Q}^+$ 中的开球：

$$\mathcal{B}_\mathbb{Q} = \{B_r(q) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$$

由于有理点集和正有理数集都是可数的，它们的笛卡尔积也是可数集。因此，$\mathcal{B}_\mathbb{Q}$ 包含可数多个球，我们可以将其排成一个序列 $\{B_1, B_2, B_3, \dots\}$。

第二步：定义限制在有理球上的极大函数并证明其可测性

对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，我们定义一个仅仅在有理球上取上确界的受限极大函数：

$$f^*_\mathbb{Q}(x) = \sup\left\{\frac{1}{m(B)}\int_B |f|dm : x \in B, B \in \mathcal{B}_\mathbb{Q}\right\}$$

为什么这个新函数是可测的？

对于每一个固定的有理球 $B_k \in \mathcal{B}_\mathbb{Q}$，我们可以定义函数 $g_k(x) = \left(\frac{1}{m(B_k)}\int_{B_k}|f|dm\right) \cdot \chi_{B_k}(x)$。这里的括号内是一个常数，而 $\chi_{B_k}(x)$ 是开集的示性函数，显然是可测的。因此每一个 $g_k(x)$ 都是可测函数。此时 $f^*_\mathbb{Q}(x) = \sup_{k\geq 1} g_k(x)$。**因为这是一个可数族可测函数的上确界，根据测度论基本定理，$f^*_\mathbb{Q}(x)$ 必然是 Lebesgue 可测的。**

第三步：证明 $f^*(x) = f^*_\mathbb{Q}(x)$

由于 $\mathcal{B}_\mathbb{Q}$ 是所有开球族的子集，在较小集合上取上确界必然更小或相等，因此显然有 $f^*_\mathbb{Q}(x) \leq f^*(x)$。下面我们证明反向不等式 $f^*(x) \leq f^*_\mathbb{Q}(x)$。这等价于证明：对于任意一个包含 x 的实数球，我们都能用包含 x 的有理球从内部无限逼近它的积分均值。

任取包含 x 的实数开球 $B_R(y)$。由于 x 在开球内部，它到球边界有一个严格大于 0 的距离余量，设为 $\delta = R - |x-y| > 0$。因为有理数在实数中稠密，我们可以选取一列有理中心 $q_i \in \mathbb{Q}^n$ 和一列有理半径 $r_i \in \mathbb{Q}^+$，使得当 $i \to \infty$ 时，$q_i \to y$ 且 $r_i \to R$ (且保持 $r_i < R$)。

只要 i 足够大，使得 $|y - q_i| < \frac{\delta}{4}$ 且 $R - \frac{\delta}{4} < r_i < R$，我们考察此时的有理球 $B_{r_i}(q_i)$：

- **它包含 x**：$|x - q_i| \leq |x-y| + |y-q_i| < (R-\delta) + \frac{\delta}{4} = R - \frac{3\delta}{4} < r_i$。因此 $x \in B_{r_i}(q_i)$。
- **它包含于 $B_R(y)$ 内部**：对于任意 $z \in B_{r_i}(q_i)$，有 $|z-y| \leq |z-q_i| + |q_i - y| < r_i + \frac{\delta}{4} < R$。因此 $B_{r_i}(q_i) \subset B_R(y)$。

因为 $B_{r_i}(q_i) \subset B_R(y)$ 且 $f \in L^1_{loc}$，根据勒贝格积分的绝对连续性（或控制收敛定理）：

$$\lim_{i\to\infty}\int_{B_{r_i}(q_i)} |f|dm = \int_{B_R(y)} |f|dm$$

同时其体积也收敛 $\lim_{i\to\infty} m(B_{r_i}(q_i)) = m(B_R(y))$。

因此，对于任意包含 x 的球 $B_R(y)$，都有：

$$\frac{1}{m(B_R(y))}\int_{B_R(y)}|f|dm = \lim_{i\to\infty}\frac{1}{m(B_{r_i}(q_i))}\int_{B_{r_i}(q_i)}|f|dm \leq f^*_\mathbb{Q}(x)$$

对左边所有包含 x 的 $B_R(y)$ 取上确界，即得到 $f^*(x) \leq f^*_\mathbb{Q}(x)$。

结论：结合正反两方面的不等式，我们得到 $f^*(x) = f^*_{\mathbb{Q}}(x)$。既然已经证明了 $f^*_{\mathbb{Q}}(x)$ 是可测函数，那么 $f^*(x)$ 必然也是可测函数。证明完毕。

2.2 核心理论梳理：Fubini 定理、Tonelli 定理与积分交换

摘要：我在批改作业时发现，许多同学在做题时混用，误用，甚至不会用 Tonelli 和 Fubini。本部分旨在帮助大家厘清 Fubini 定理与 Tonelli 定理的本质区别、内在联系、标准应用流程，并彻底搞懂“什么时候可以放心地交换积分与求和符号”。同时，本文还将对比经典的“一致收敛”判别法，帮助大家建立完整的知识体系。

2.2.1 核心问题：为什么我们需要这两个定理？

在古典微积分中，我们习惯了对于连续函数直接交换积分顺序。但在一般的测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 和 $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ 的乘积空间上，对于一般的可测函数 $f(x, y)$，我们常常面临以下问题：

1. 乘积测度下的双重积分 $\iint_{X\times Y} f\mathrm{d}(\mu\times\nu)$ 是否存在？
2. 两个累次积分 $\int_X \left(\int_Y f\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu$ 与 $\int_Y \left(\int_X f\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}\nu$ 是否相等？

Tonelli 定理和 **Fubini 定理**正是为了回答这些问题而诞生的。简单来说：Tonelli 负责处理**非负函数**，而 Fubini 负责处理**绝对可积（一般）函数**。

2.2.2 Tonelli 定理：非负函数的“通行证”

定理 2.1 (Tonelli 定理). 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 与 $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ 是两个 σ-**有限**的测度空间，$f(x, y)$ 是 $X \times Y$ 上的**非负可测函数** $(f \geq 0)$，则：

$$\iint_{X\times Y} f\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)$$

注记 2.1 (Tonelli 定理的直观理解). **只要函数是非负的，你就可以无脑交换积分顺序。**这里不需要预先知道函数是否可积。等式两边的结果可能是一个有限的实数，也可能是 $+\infty$。它的核心作用是：用累次积分来计算（或判断）双重积分的值。

2.2.3 Fubini 定理：绝对可积的“精确打击”

定理 2.2 (Fubini 定理). 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 与 $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ 是两个 σ-**有限**的测度空间。如果 $f(x, y)$ 在乘积空间上是**绝对可积的**（即 $\iint_{X\times Y} |f|\mathrm{d}(\mu\times\nu) < \infty$），那么：

1. 对于几乎所有的 $x \in X$，切片函数 $f_x(y) = f(x, y)$ 是 Y 上关于 ν 的可积函数；对于几乎所有的 $y \in Y$，切片函数 $f_y(x) = f(x, y)$ 也是可积的。
2. 积分给出的函数 $\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ 与 $\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ 分别在 X 和 Y 上可积。
3. 累次积分与双重积分相等：

$$\iint_{X\times Y} f\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_Y f\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu = \int_Y \left(\int_X f\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}\nu$$

2.2.4 标准做题流程：先 Tonelli 后 Fubini

同学们最常犯的错误是直接对一般函数 $f(x,y)$ 使用 Fubini 定理，却忘记了验证它是否**绝对可积**。在实际应用中，Tonelli 和 Fubini 通常是绑定使用的。

交换积分顺序的“两步走”标准流程：

- **Step 1 (用 Tonelli 探路)：** 对 $|f(x,y)|$ 取绝对值，因为 $|f| \geq 0$，我们可以使用 Tonelli 定理计算累次积分 $\int \left(\int |f| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$。
- **Step 2 (用 Fubini 收尾)：** 如果 Step 1 算出的结果是有限的 ($< \infty$)，说明 $f(x,y)$ 绝对可积。此时满足 Fubini 定理的条件，我们可以放心地去掉绝对值，对原函数 $f(x,y)$ 交换积分顺序进行计算。

2.2.5 经典反例：如果不满足绝对可积会怎样？

让我们看一个反例，说明如果跳过 Step 1 直接交换积分顺序会发生什么荒谬的结果。

例 2.1 (不可随便交换积分顺序)**.** 考虑在正方形 $X \times Y = (0,1) \times (0,1)$ 上的函数：

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

先对 y 积分，再对 x 积分：

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

先对 x 积分，再对 y 积分（注意到 $f(x,y) = -f(y,x)$）：

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}$$

结论：两个累次积分都存在，但它们**不相等**。原因何在？我们用 Tonelli 定理对 $|f(x,y)|$ 积分试试：

$$\iint_{(0,1)^2} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = +\infty$$

because 原函数并不绝对可积，所以 Fubini 定理失效，自然不能交换积分顺序。

2.2.6 实战：无穷级数与积分的交换

在分析学中，离散的求和 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 在本质上就是自然数集 $\mathbb{N}$ 上的计数测度积分。因此，将求和号与积分号交换，本质上就是**在两个测度空间（一个勒贝格测度，一个计数测度）上应用 Tonelli 或 Fubini 定理**。

对于函数列 $\{f_n(x)\}$，我们要计算 $\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}\mu$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X f_n(x) \mathrm{d}\mu \right)$ 是否相等。

非负项级数：Tonelli 定理 (或者叫 Beppo-Levi 定理 / 单调收敛定理) 如果对于所有的 n，都有 $f_n(x) \geq 0$，那么我们可以**无条件交换**求和与积分：

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x) \mathrm{d}\mu$$

一般项级数：Fubini 定理 (或者联系控制收敛定理) 对于一般的 $f_n(x)$，我们需要“两步走”验证：先加上绝对值看是否有限。若 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n(x)|\mathrm{d}\mu<\infty$ （即绝对可积），则可以安全地交换原级数的求和与积分号：

$$\int_X\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu$$

例 2.2 (级数与积分交换的典型应用)**.** 计算积分 $I=\int_0^1\frac{x\ln x}{x-1}\mathrm{d}x$ 。

解析：利用几何级数展开式，由于 $x\in(0,1)$：

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

代入原积分：

$$I=\int_0^1\frac{-x\ln x}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x^{n+1}\ln x)\right)\mathrm{d}x$$

能否交换？注意到在 $(0,1)$ 上，$(-x^{n+1}\ln x)>0$，所以被积函数列非负。根据 Tonelli 定理（或非负项级数积分的单调收敛性质），我们可以直接交换：

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1-x^{n+1}\ln x\mathrm{d}x$$

利用分部积分，可以算出 $\int_0^1-x^{n+1}\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+2)^2}$。因此，

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}-1$$

2.2.7 另一条道路：一致收敛与积分/求和的交换

在学习实分析之前，大家在《数学分析》中最先接触到的保证极限、无限求和与积分交换的条件是**一致收敛**。在此，我们有必要将这古典的“一致收敛判别法”与测度论中基于“绝对可积”（Fubini 定理）的方法进行对比，以帮助大家建立更完整的知识体系。

一致收敛条件的回顾 在经典的黎曼积分框架下，如果连续函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上**一致收敛**于 $S(x)$，那么可以直接交换求和与积分号：

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

类似地，对于含参变量积分，也有基于一致收敛的积分顺序交换定理。

两大判别法的优劣对比

实战策略：何时选择哪种武器？

- **首选 Fubini / 绝对可积**：在绝大多数实分析的题目中，我们面对的是勒贝格积分。此时使用“两步走”探路（先对绝对值积分）是最高效、最标准的做法。

比较维度	基于一致收敛 (古典微积分)	基于绝对可积 (实分析/测度论)
核心条件	级数或函数列必须**一致收敛**。	满足**绝对可积**（即加上绝对值后积分有限，或存在可积的控制函数）。
适用范围	通常局限于**有界闭区间**，且对连续性有较高要求。在无界区域上容易失效。	适用于**任意 σ-有限测度空间**，无论是有界还是无界，甚至离散空间。
优势 (Pros)	**无需绝对可积！**它可以处理某些**条件收敛**的级数或反常积分交换。例如带有交错项 $(-1)^n$ 的级数，利用 Dirichlet 或 Abel 判别法证明一致收敛后即可交换。	**条件极其宽泛**。完全不需要整体一致性。它允许函数列有很大的局部波动，甚至存在瑕点，只要被积函数绝对可积即可。
劣势 (Cons)	“一致收敛”的要求**过于严苛**。很多常见的、能够合法交换积分的函数列（如在某点附近有尖峰但面积趋于 0）都不满足一致收敛。	**对条件收敛束手无策**。使用 Fubini 定理直接对绝对值积分，一旦原函数非绝对可积（如交错级数或 $\frac{\sin x}{x}$ 类积分），定理直接失效。

- **备选一致收敛**：如果你在第一步探路时发现 $\iint |f| = +\infty$（即绝对可积失效），但题目中含有类似 $(-1)^n$ 或者 $\sin(nx)$ 这样的**振荡因子**，这强烈暗示着它是一个**条件收敛**问题。此时，你需要跳出测度论的框架，退回到《数学分析》的思路，尝试证明函数项级数的一致收敛性（例如使用 Dirichlet 判别法），从而合法地完成交换。