第五次习题课讲义

涂嘉乐

2026 年 5 月 11 日

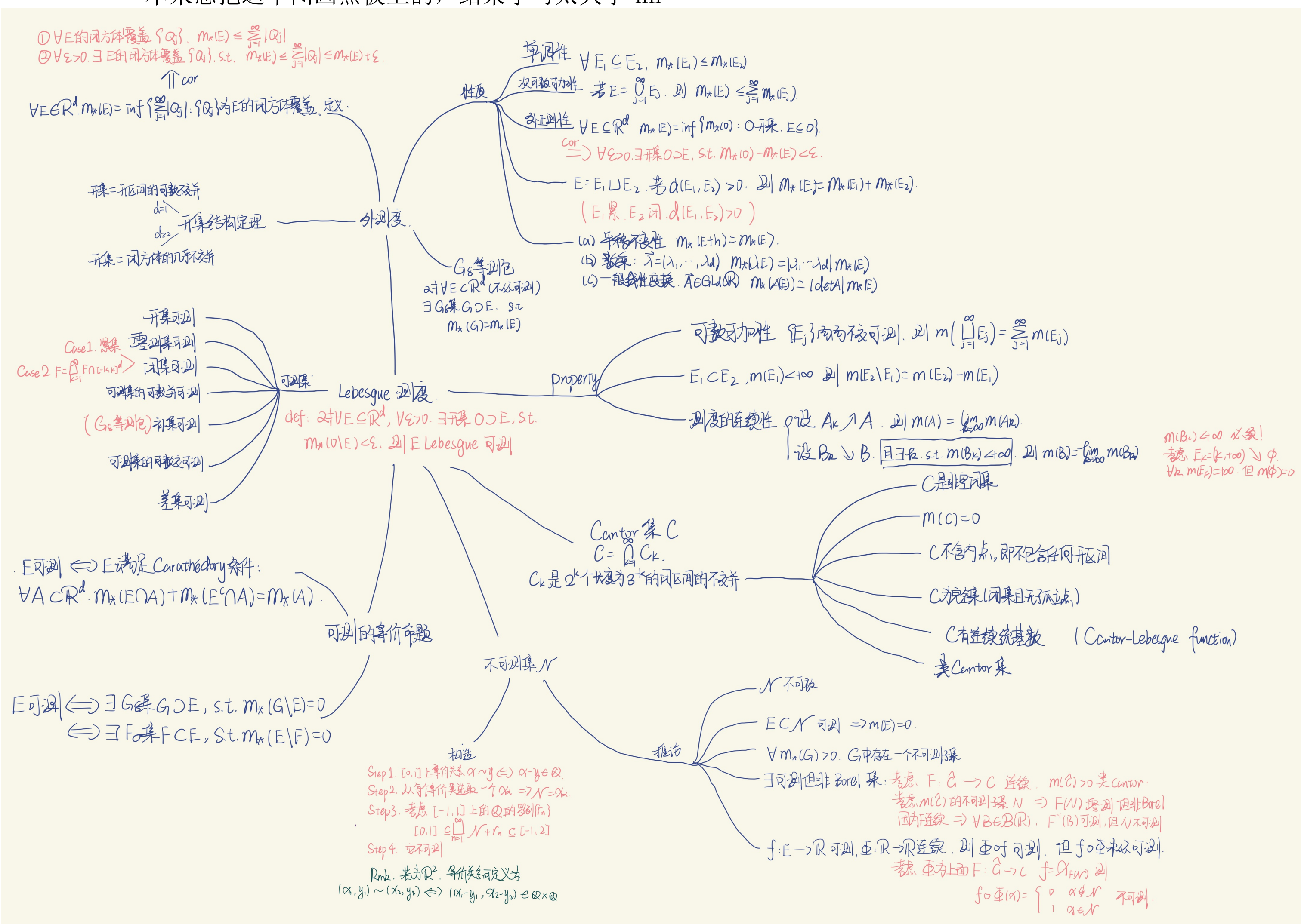
1 复习建议

复习时建议过一遍基本概念、定理证明过程，作业题（其实我感觉作业题就很难了），有空可以做一下往年题就够了；考试时除非要证明某个结论，否则上课讲过的结论可以直接用

对于每一个定理我们需要思考证明过程中对每一个条件的应用，如果把定理中的某个条件删去，是不是会有对应的反例？此外在使用定理时，需要把定理要求的条件都在当且情景中验证一下。

1.1 Lebesgue 测度

本来想把这个图画黑板上的，结果字写太大了 hh



此外还有可测函数、简单函数逼近定理、Littlewood 三原则；这一部分的内容大家复习时以作业题以及之前的补充题为主；此外还有一些题目需要综合运用，大家也不用过度刷题，把该得的分得到就很棒了

习题 1 (Stein,Ch1,T27) 设 $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ 是两个紧集，$E_1 \subset E_2$，设 $a = m(E_1), b = m(E_2)$ 且 $a < b$，证明对 $\forall a < c < b$，都存在紧集 $E, \text{s.t. } E_1 \subset E \subset E_2, m(E) = c$

证明 由于 $\mathbb{R}^d$ 中紧集与有界闭集等价，所以 $\exists T > 0, \text{s.t. } E_2 \subseteq \overline{B(0,T)}$，考虑 $F_t = (E_2 \backslash E_1) \cap \overline{B(0,t)}$，定义 $f(t) = m(F_t)$，则 $f(0) = 0, f(T) = m(E_2 \backslash E_1) = b - a$

Claim: f 是 $[0,T]$ 上的连续函数

Proof of Claim：设 $s < t \leq T$，则 $F_s \subseteq F_t$，且 $(F_t \backslash F_s) \subseteq (\overline{B(0,t)} \backslash \overline{B(0,s)})$，故

$$|f(t) - f(s)| = m(F_t) - m(F_s) = m(F_t \backslash F_s) \leq m(\overline{B(0,t)} \backslash \overline{B(0,s)}) = \alpha(d)(t^d - s^d)$$

而 $t^d - s^d = (t-s)(t^{d-1} + t^{d-2}s + \cdots + s^{d-1}) \leq dT^{d-1}(t-s)$，所以 f 是 $[0,T]$ 上的连续函数

那么对 $\forall a < c < b$，$\exists t_0 \in [0,T], \text{s.t. } f(t_0) = c - a$，进而考虑 $E = [(E_2 \backslash E_1) \cap \overline{B(0,t_0)}] \cup E_1$，则 E 是紧集且我们有

$$m(E) = f(t_0) + m(E_1) = c$$

□

习题 2 (23 补测,T7) 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可测，$V \subset \mathbb{R}$ 是开集，$0 \in V$，证明：存在可测集 $E, m(E) > 0, \text{s.t. } \forall x, y \in E, f(x) - f(y) \in V$

证明 由于 V 是开集且 $0 \in V$, 故存在 $\delta > 0, st\ (-\delta, \delta) \subset V$, 取 $\eta = \frac{\delta}{2}$, 对每个 $j \in \mathbb{Z}$, 令 $I_j = [j\eta, (j+1)\eta)$, 则

$$\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} I_j \Longrightarrow \mathbb{R} = f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} I_j\right) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f^{-1}(I_j)$$

由 f 可测、每个 I_j 都是 *Borel* 集知 $E_j := f^{-1}(I_j)$ 是可测集

下面证明存在 $j_0 \in \mathbb{Z}$，使得 $m(E_{j_0}) > 0$，否则对任意 $j \in \mathbb{Z}$，都有 $m(E_j) = 0$，于是

$$m(\mathbb{R}) = m\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} E_j\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} m(E_j) = 0$$

这与 $m(\mathbb{R}) = +\infty$ 矛盾。因此存在 $j_0 \in \mathbb{Z}$，使得 $m(E_{j_0}) > 0$，我们令 $E = E_{j_0} = f^{-1}(I_{j_0})$ 则 E 可测且 $m(E) > 0$，对 $\forall x, y \in E, f(x), f(y) \in I_{j_0} = [j_0\eta, (j_0+1)\eta)$ 于是

$$|f(x) - f(y)| < \eta = \frac{\delta}{2} < \delta$$

即 $f(x) - f(y) \in (-\delta, \delta) \subset V$ □

1.2 收敛方式与有关反例

近一致收敛的定义：对 $\forall \delta > 0$ 存在 E 的可测子集 $E_\delta, \text{s.t. } m(E \backslash E_\delta) < \delta, f_n \rightrightarrows f$ on E_δ

下图中没有箭头就表示存在反例，其中 L^p 收敛的 $p \in [1, \infty)$，L^∞ 没有单独列出来，可以看作业题

Case 1. $m(E) < \infty$ 时

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{近一致收敛} \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{一致收敛} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \text{a.e 收敛} \arrow[r, Rightarrow] & \text{依测度收敛} \\
 & L^p \text{ 收敛} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

Case 2. $m(E) = \infty$ 时

$$
\begin{tikzcd}
 & & L^p \text{ 收敛} \arrow[ddrr, Rightarrow] & & \\
 & \text{a.e 收敛} & & & \\
\text{一致收敛} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] & & \text{近一致收敛} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] & & \text{依测度收敛}
\end{tikzcd}
$$

接下来给出几个不平凡的反例，其余大家可以自己补充

例 1（依测度收敛但无处收敛，包含有限测度和无穷测度两个反例）

Case 1. $m(E) < +\infty$ 时，考虑 $E = [0,1)$，对于每个 $k \in \mathbb{N}^*$，我们将 $[0,1)$ 进行 k 等分

$$[0,1) = \left[0, \frac{1}{k}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{k-1}{k}, 1\right) \overset{\text{def}}{=} I_1^{(k)} \cup \cdots \cup I_k^{(k)}$$

定义 $f_j^{(k)}(x) = \chi_{I_j^{(k)}}$，再按 k 从小到大对 $\{f_j^{(k)}\}_{\substack{k\in\mathbb{N}^* \\ 1\le j\le k}}$ 重新排序，重新记为 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$，则我们有如下观察

- $\forall x \in E, \{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 都不收敛：对每个 $x \in [0,1)$，每个 $k \in \mathbb{N}^*$，x 都只在某一个 $I_j^{(k)}$ 中，进而 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 中有无穷多个 1，无穷多个 0，故它不收敛
- g_n 依测度收敛到 $g \equiv 0$：$\varepsilon > 1$ 时平凡，而对 $\forall \varepsilon \in (0,1], |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon \iff g_n(x) = 1$，故

$$m(\{x : |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = m(\{x : g_n(x) = 1\}) \to 0$$

Case 2. $m(E) = +\infty$ 时，其实思路还是一样，我们考虑 $E = [0, +\infty)$，对于每个 $k \in \mathbb{N}^*$，我们将 $[0,k)$ 进行 k^2 等分

$$[0,k) = \left[0, \frac{1}{k}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{k^2-1}{k}, k\right) \overset{\text{def}}{=} I_1^{(k)} \cup \cdots \cup I_{k^2}^{(k)}$$

定义 $f_j^{(k)}(x) = \chi_{I_j^{(k)}}$，再按 k 从小到大对 $\{f_j^{(k)}\}_{\substack{k\in\mathbb{N}^* \\ 1\le j\le k^2}}$，重新记为 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$（这样子定义合理，因为可数个可数集仍可数），则我们有如下观察

- $\forall x \in E, \{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 都不收敛：对每个 $x \in [0, +\infty)$，对 $\forall k \geq x$，x 都只在某一个 $I_j^{(k)}$ 中，进而 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 中有无穷多个 1，无穷多个 0，故它不收敛
- g_n 依测度收敛到 $g \equiv 0$：$\varepsilon > 1$ 时平凡，而对 $\forall \varepsilon \in (0,1], |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon \iff g_n(x) = 1$，故

$$m(\{x : |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = m(\{x : g_n(x) = 1\}) \to 0$$

例 2（有限测度下的 L^p 收敛）

若 $m(E)<\infty$，$p<q$，则 $f_n \xrightarrow{L^q} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow{L^p} f$，这是 Holder 不等式的简单应用，取共轭指标为 $(\frac{q}{p},\frac{q}{q-p})$，则

$$\begin{aligned}||f_n-f||_{L^p}^p &= \int_E |f_n-f|^p \mathrm{d}m = ||(f_n-f)^p||_{L^1(E)} \\ &\le ||(f_n-f)^p||_{L^{\frac{q}{p}}} \cdot ||\chi_E||_{L^{\frac{q}{q-p}}} \\ &= \left(\int_E |f_n-f|^q \mathrm{d}m\right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_E \chi_E^{\frac{q}{q-p}} \mathrm{d}m\right)^{\frac{q-p}{q}} \\ &= \left(\int_E |f_n-f|^q \mathrm{d}m\right)^{\frac{p}{q}} \cdot m(E)^{\frac{q-p}{q}}\end{aligned}$$

两边同时开 p 次方得

$$||f_n-f||_{L^p} \le ||f_n-f||_{L^q} \cdot m(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

但是 L^p 收敛推不出 L^q 收敛，取 $p<r<q$，考虑 $E=[0,1], f_n(x)=n^{\frac{1}{r}}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}, f(x)\equiv 0$，则

$$\begin{aligned}||f_n-f||_{L^p}^p &= n^{\frac{p}{r}-1} \to 0 \\ ||f_n-f||_{L^q}^q &= n^{\frac{q}{r}-1} \to +\infty\end{aligned}$$

此外当 $m(E)=\infty$ 时，L^q 收敛推不出 L^p 收敛，反例：还是取 $p<r<q$，考虑 $E=[0,+\infty), f_n = n^{-\frac{1}{r}}\chi_{[0,n]}, f\equiv 0$，则

$$\begin{aligned}||f_n-f||_{L^q}^q &= n^{-\frac{q}{r}+1} \to 0 \\ ||f_n-f||_{L^p}^p &= n^{-\frac{p}{r}+1} \to +\infty\end{aligned}$$

习题 3 设 $\{f_n\}, f, g$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数

(1) 若 $f_n \xrightarrow{m} f, f_n \xrightarrow{m} g$，则 $f=g$ a.e $x\in E$，即依测度收敛意义下的 a.e 极限唯一

(2) 若 $f_n \xrightarrow{\text{a.e}} f, f_n \xrightarrow{m} g$，求证 $f \stackrel{\text{a.e}}{=} g$

证明 (1). 记 $A=\{x\in E: f(x)\ne g(x)\}, A_k=\left\{x\in E: |f(x)-g(x)|\ge \frac{1}{k}\right\}$，则 $A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\cdots$，且容易验证 $A_k \nearrow A$，注意到

$$|f(x)-g(x)|\ge \frac{1}{k} \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)|\ge \frac{1}{2k} \text{ 或 } |f_n(x)-g(x)|\ge\frac{1}{2k}$$

因此

$$A_k \subseteq \left\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|\ge\frac{1}{2k}\right\}\cup\left\{x\in E: |f_n(x)-g(x)|\ge\frac{1}{2k}\right\}$$

故

$$m(A_k)\le m\left(\left\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|\ge\frac{1}{2k}\right\}\right)+m\left(\left\{x\in E: |f_n(x)-g(x)|\ge\frac{1}{2k}\right\}\right)$$

令 $n\to\infty$，则 $m(A_k)=0$，所以

$$m(\{x\in E: f(x)\ne g(x)\}) = m(A) = \lim_{k\to\infty} m(A_k) = 0$$

(2). Case 1. 若 $m(E)<+\infty$，由 *Lebesgue* 定理知，$f_n\to f$ a.e $x\in E \Longrightarrow f_n \xrightarrow{m} f$，再由上一问知 $f=g$ a.e $x\in E$

Case 2. 若 $m(E)=+\infty$，因为

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}[-k,k]^d\cap E$$

所以对于任意一个 $[-k,k]^d\cap E$，由 Case 1 知，$f=g$ a.e $x\in[-k,k]^d\cap E$，即存在零测集 $N_k\subseteq[-k,k]^d\cap E$, s.t. $\forall x\in N_k, f(x)\neq g(x), \forall x\in\left([-k,k]^d\cap E\right)\backslash N_k, f(x)=g(x)$，所以

$$\{f\neq g\}\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}N_k\Longrightarrow m(f\neq g)\leq\sum_{k=1}^{\infty}m(N_k)=0$$

所以 $f=g$ a.e $x\in E$ □

注 这一题不是很难，不过有两个启发

- 我们有集合分解

$$\{x:x\text{同时满足条件}A,B\}\subseteq\{x:x\text{满足条件}A\}\cup\{x:x\text{满足条件}B\}$$

  这个技巧虽然比较平凡，不过在估计测度时经常会用到
- 对于无穷测度的情形，我们可以先证明有限测度的情形，然后进行截断

习题 4 设 $E\subset\mathbb{R}$ 且 $m(E)<+\infty$，$\{f_n\}$ 是 E 上实值可测函数列，证明 f_n 在 E 上依测度收敛于 f 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\mathrm{d}m=0$$

证明 注意到 $g(t)=\frac{t}{1+t}\leq\min\{1,t\}$，且在 $[0,+\infty)$ 单调增，所以

$$\{x:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}=\left\{x:\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}>\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}$$

$(\Longrightarrow)$：设 $E_1^n(\varepsilon)=\{x:|f_n-f|>\varepsilon\}, E_2^n(\varepsilon)=\{x:|f_n-f|\leq\varepsilon\}$，则 $E=E_1^n(\varepsilon)\sqcup E_2^n(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}\int_E\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\mathrm{d}m&=\int_{E_1^n(\varepsilon)}\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\mathrm{d}m+\int_{E_2^n(\varepsilon)}\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\mathrm{d}m\\&\leq\int_{E_1^n(\varepsilon)}1\mathrm{d}m+\int_{E_2^n(\varepsilon)}\varepsilon\mathrm{d}m\leq m(E_1^n(\varepsilon))+\varepsilon m(E)\end{aligned}$$

由依测度收敛知 $m(E_1^n(\varepsilon))\to 0$，所以上式令 $n\to\infty$ 可得

$$\int_E\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\mathrm{d}m\leq\varepsilon m(E)$$

再令 $\varepsilon\to 0$ 即证

$(\Longleftarrow)$：

$$\begin{aligned}\int_E\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\mathrm{d}m&\geq\int_{E_1^n(\varepsilon)}\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\mathrm{d}m\\&\geq\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m(E_1^n(\varepsilon))\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 即证 $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m(E_1^n(\varepsilon))\to 0$ as $n\to\infty$，即 f_n 依测度收敛到 f □

习题 5（25mid,T7）设 g 为周期为 1 的光滑函数，且 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=0$

(1) 求证：对任意闭区间 $[a,b]$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(nx)\mathrm{d}x=0$$

(2) 对任意可积函数 f，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)g(nx)\mathrm{d}x=0$$

证明 (1). 由 $g(x)$ 周期为 1 的光滑函数知 $g(x)$ 有上界 M，即 $|g(x)|\le M,\forall x\in\mathbb{R}$，由 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=0$ 和周期性知，对 $\forall a\in\mathbb{R},\int_a^{a+1}g(x)\mathrm{d}x=0$，因为

$$\left|\int_a^b g(nx)\mathrm{d}x\right| \xlongequal{y=nx} \left|\frac{1}{n}\int_{na}^{nb}g(y)\mathrm{d}y\right| = \left|\frac{1}{n}\left(\int_{na}^{[na]+1}g(y)\mathrm{d}y+\int_{[nb]}^{nb}g(y)\mathrm{d}y\right)\right| \le \frac{2M}{n}\to 0$$

（这里我们考虑 n 足够大时，必有 $[na]+1<[nb]$）

(2). 我们把第一问的积分范围写成示性函数，即 $\int_{\mathbb{R}}\chi_{[a,b]}g(nx)\mathrm{d}x\to 0$，这里我们需要注意到 $\chi_{[a,b]}$ 是阶梯函数，所以由 $\{\text{阶梯函数}\}\overset{\text{dense}}{\subset}L^1(\mathbb{R})$ 知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在阶梯函数 $\varphi=\sum_{i=1}^{N}c_i\chi_{[a_i,b_i]}$, s.t. $||\varphi-f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}<\frac{\varepsilon}{M}$，所以

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}f(x)g(nx)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}}[f(x)-\varphi(x)]g(nx)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)g(nx)\mathrm{d}x\right| \\ &\le M||f-\varphi||_{L^1(\mathbb{R})}+\left|\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{N}c_i\chi_{[a_i,b_i]}g(nx)\mathrm{d}x\right| \\ &< \varepsilon+\sum_{i=1}^{N}|c_i|\cdot\left|\int_{a_i}^{b_i}g(nx)\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，由第一问知

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}}f(x)g(nx)\mathrm{d}x\right|\le\varepsilon$$

再由 ε 的任意性即得证 □

1.3 使用 MCT,DCT,BCT, 逐项积分定理,Tonelli-Fubini 定理计算积分

在使用这些定理之前一定要把条件说清楚，MCT 要求非负递增（有时候递增不容易看出来，但是如果发现被积函数非负可以考虑一下是不是递增）；DCT 要求有可积的控制函数；BCT 要求函数一致有界；逐项积分定理要求非负

此外注意一个细节，当积分区域是无穷区间如 $(0,+\infty)$ 时，直接计算 Riemann 积分值是不严谨的，因为我们只证明了有限区间上 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的关系，正确的做法是考虑使用示性函数 $\chi_{[0,n]}$ 进行截断，可以见 23 年期中考试题

当需要交换积分次序时，若函数非负可测直接使用 Tonelli 定理就行；若函数 f 不是非负，但是你感觉需要交换积分次序，则有两种方法：

1. 首先对恒正的情形使用 Tonelli 定理，其次考虑 $f=f^+ + f^-$；

2. 使用 Fubini 定理，但是我们需要证明它可积，即 $\int|f|\mathrm{d}m<\infty$，因此我们对 $|f|$ 使用 Tonelli 定理（此时加了绝对值就非负了），这时一般都能算出来值（自信点，题目都是设计好的），这样就说明 f 可积，就可以大胆使用 Fubini 定理了

习题 6 计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\arctan(nx)\mathrm{d}x$$

证明 注意到被积函数在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上非负，固定 x 时被积函数递增，进而可以使用 MCT，因为被积函数趋于 $\frac{\pi}{2}\cos x$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\frac{\pi}{2})}\cos x\arctan(nx)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\cos x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

□

习题 7 证明

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{(0,\infty)}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},\quad \alpha>1$$

证明 这题需要一些级数的知识，大家估计忘了，我感觉考试也不会这么出（真出了当我没说），只是想给大家看一下逐项积分定理的使用。因为 $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(0,1)$，所以

$$\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}=e^{-x}x^{\alpha-1}\frac{1}{1-e^{-x}}=e^{-x}x^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}=x^{\alpha-1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-nx}$$

注意到每一项非负可测，由逐项积分定理

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}\mathrm{d}x&=\int_{(0,\infty)}\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-nx}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(0,\infty)}x^{\alpha-1}e^{-nx}\mathrm{d}x\\&\overset{nx=t}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\int_{(0,\infty)}t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t=\Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\end{aligned}$$

□

习题 8（MCT 的推广）

(1) 设 f_n,f 可测，$f_n\nearrow f,f_1^-\in L^1(E)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}m=\int_E f\mathrm{d}m$$

(2) 设 f_n,f 可测，$f_n\searrow f,f_1^+\in L^1(E)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}m=\int_E f\mathrm{d}m$$

证明 只证明 (1)，(2) 类似

Case 1. $f_1^+\notin L^1(E)$ 时，则 $\int_E f_1\mathrm{d}m=\int_E f_1^+-f_1^-\mathrm{d}m=+\infty$，由积分的单调性知两边都是无穷，等式平凡成立

Case 2. $f_1^+\in L^1(E)$ 时，则 $f_1\in L^1(E)$，设 $g_n\overset{\text{def}}{=}f_n-f_1,g=f-f_1$，则 $g_n\nearrow g,g_n\geq 0$，对 g_n,g 使用 MCT 得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}m-\int_E f_1\mathrm{d}m=\int_E f\mathrm{d}m-\int_E f_1\mathrm{d}m$$

由 $f_1\in L^1(E)$ 只，$\int_E f_1\mathrm{d}m<\infty$，故两边同时消去这一项即证 □

习题 9（Fatou 引理的推广）

(1) 设 f_n 可测，$(\inf\limits_n f_n)^- \in L^1(E)$，则

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}m \le \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}m$$

(2) 设 f_n 可测，$(\sup\limits_n f_n)^+ \in L^1(E)$，则

$$\int_E \limsup_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}m \ge \limsup_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}m$$

证明 只证明 (1)，(2) 类似

因为 $g_n \overset{\text{def}}{=} \inf\limits_{k\ge n} f_k \nearrow \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$，由条件 $g_1 = \inf\limits_{k\ge 1} f_k = \inf\limits_n f_n \in L^1(E)$，由推广的 MCT，结合 Fatou 引理的证明过程即证 □

习题 10 设 $f \in L^1(E), f(x) > 0$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E [f(x)]^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}m = m(E)$$

证明

Case 1. $m(E) < \infty$ 时

考虑对积分区域划分，设 $E_1 = \{x \in E : f(x) < 1\}, E_2 = E\backslash E_1$，考虑 $g_n = [f(x)]^{\frac{1}{n}}\chi_{E_1}, h_n = [f(x)]^{\frac{1}{n}}\chi_{E_2}$ a.e，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1, \forall a > 0$ 知，在 E 上 $g_n \nearrow \chi_{E_1}, h_n \searrow \chi_{E_2}$，且 $h_1 = f(x)\chi_{E_2} \in L^1(E)$，因此我们可以对 g_n 使用 MCT，对 h_n 使用上一题证明的推广的 MCT

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_E [f(x)]^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}m &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_E g_n \mathrm{d}m + \int_E h_n \mathrm{d}m\right) \\
&= \int_E \chi_{E_1} \mathrm{d}m + \int_E \chi_{E_2} \mathrm{d}m \\
&= m(E)
\end{aligned}$$

Case 2. $m(E) = +\infty$ 时

对 $\forall M > 0$，存在紧集 $K \subseteq E$, s.t. $M \le m(K) < +\infty$（考虑 $E = E \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B(0,n)}$，再由内正则性取紧集），则

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\int_E [f(x)]^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}m \ge \liminf_{n\to\infty}\int_K [f(x)]^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}m &= \lim_{n\to\infty}\int_K [f(x)]^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}m \\
&= m(K) \ge M
\end{aligned}$$

由 M 的任意性知 $\liminf\limits_{n\to\infty}\int_E [f(x)]^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}m = +\infty$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E [f(x)]^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}m = +\infty = m(E)$ □

习题 11 (Stein,Ch2,T4) 设 f 在 $[0,b]$ 上可积，且 $g(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t, 0 < x \le b$，证明 g 在 $[0,b]$ 上可积且

$$\int_0^b g(x)\mathrm{d}x = \int_0^b f(t)\mathrm{d}t$$

证明 Case 1. $f(t)\geq 0$

定义 $Y=\{(x,t):0<x\leq b,x\leq t\leq b\}=\{(x,t):0<t\leq b,0<x\leq t\}$，设 $h(x,t)=\frac{f(t)}{t}\chi_Y$，由于 $f,\frac{1}{t},\chi_Y$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上均可测，所以 $h(x,t)$ 也可测且非负，由 Tonelli 定理知

$$\begin{aligned}\int_0^b g(x)\mathrm{d}x&=\int_0^b\left(\int_x^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^2}h(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\&=\int_0^b\left(\int_0^t h(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_0^b f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由 f 在 $[0,b]$ 可积知，$\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=\int_0^b f(x)\mathrm{d}t<+\infty$，因此 g 也在 $[0,b]$ 可积（$g\geq 0$ 不用取绝对值）

Case 2. $f(t)$ 为一般可测函数，考虑 $f=f^+-f^-$，定义 $g^+(x)=\int_x^b\frac{f^+(t)}{t}\mathrm{d}t,g^-(x)=\int_x^b\frac{f^-(t)}{t}\mathrm{d}t$，由 Case1 知

$$\begin{cases}\int_0^b g^+(x)\mathrm{d}x=\int_0^b f^+(t)\mathrm{d}t\\\int_0^b g^-(x)\mathrm{d}x=\int_0^b f^+(t)\mathrm{d}t\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^b f(t)\mathrm{d}t&=\int_0^b f^+(t)\mathrm{d}t-\int_0^b f^-(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^b g^+(x)\mathrm{d}x-\int_0^b g^-(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^b g^+(x)-g^-(x)\mathrm{d}x=\int_0^b g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

习题 12（22mid,T4）设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，证明

(1) f 的图像 $\Gamma=\{(x,y):y=f(x)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集，从而可测

(2) $m(\Gamma)=0$

证明 (1). 由连续函数知闭集（大家自己证一下）

(2). 注意到固定 x 时，$\chi_\Gamma(x,y)=\begin{cases}0, & y\neq f(x)\\1, & y=f(x)\end{cases}$，由 Tonelli 知

$$\begin{aligned}m(\Gamma)&=\int_{\mathbb{R}^2}\chi_\Gamma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\chi_\Gamma(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}}0\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

□