

实分析第二次习题课讲义

张汇泽 PB23010393

2026 年 3 月 26 日

目录

1 习题 6: 球的测度公式	1
2 习题 7: 坐标分别伸缩时的测度变化	3
3 习题 8: 线性变换保持可测性	5
4 习题 16: Borel–Cantelli 引理 (第一部分)	7
5 习题 28: \mathbb{R} 上正外测度集合必在某个区间里占大比例	10
6 习题 29: 正测度集合的差集包含原点邻域	12
7 习题 33: 非可测集补集的外测度与外测度不可加性	14
总结	16

1. 习题 6: 球的测度公式

题目

设 $B \subset \mathbb{R}^d$ 是半径为 r 的球。证明

$$m(B) = v_d r^d, \quad v_d = m(B_1),$$

其中

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$$

是单位球。

参考证明

设 $B = B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - a| < r\}$ 。对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 有

$$x \in B(a, r) \iff \left| \frac{x - a}{r} \right| < 1 \iff x = a + ry, \quad y \in B_1.$$

因此

$$B(a, r) = a + rB_1.$$

由 Lebesgue 测度的平移不变性可得

$$m(B(a, r)) = m(rB_1),$$

再由伸缩公式 $m(tE) = t^d m(E)$ ($t > 0$) 可得

$$m(rB_1) = r^d m(B_1) = r^d v_d.$$

故

$$m(B) = v_d r^d.$$

做题收获和分析

这题在说什么？

这题说明 Lebesgue 测度确实表现得像 d 维体积。球的体积不需要重新计算，本质上只由两件事决定：

- 单位球的体积 v_d ；
- 尺度变化带来的 r^d 倍放大。

和哪个知识点最相关？

它直接依赖两个最基础的性质：

- 平移不变性： $m(E + a) = m(E)$ ；
- 伸缩性质： $m(tE) = t^d m(E)$ 。

做题时第一步怎么想？

看到“半径 r 的球”和“证明测度公式”，第一反应应该是：能不能把这个球写成单位球经过平移与缩放得到的形式。于是自然写出

$$B(a, r) = a + rB_1.$$

这是本题最关键的一步。后面的计算只是把已知性质代入。

本题可以学到什么？

1. **标准化思想**：先把一般对象化成单位对象，再利用变换性质。
2. **量纲意识**： d 维测度在缩放下永远按 r^d 变化。
3. **单位对象的重要性**：单位球、单位立方体、标准区间往往是许多计算的起点。

2. 习题 7: 坐标分别伸缩时的测度变化

题目

若 $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$ 是一个 d -元正数向量, $\delta_i > 0$, 对 $E \subset \mathbb{R}^d$ 定义

$$\delta E = \{(\delta_1 x_1, \dots, \delta_d x_d) : (x_1, \dots, x_d) \in E\}.$$

证明: 若 E 可测, 则 δE 也可测, 且

$$m(\delta E) = \delta_1 \cdots \delta_d m(E).$$

参考证明

把该变换视为对角线线性变换

$$T(x_1, \dots, x_d) = (\delta_1 x_1, \dots, \delta_d x_d), \quad c := \delta_1 \cdots \delta_d.$$

第一步: 先证明外测度的缩放公式。

对轴平行长方体

$$R = \prod_{i=1}^d (a_i, b_i),$$

有

$$T(R) = \prod_{i=1}^d (\delta_i a_i, \delta_i b_i),$$

故

$$m(T(R)) = \prod_{i=1}^d \delta_i (b_i - a_i) = c m(R).$$

若 $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$, 则

$$T(A) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} T(R_j),$$

于是

$$m_*(T(A)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(T(R_j)) = c \sum_{j=1}^{\infty} m(R_j).$$

对所有覆盖取下确界, 得

$$m_*(T(A)) \leq c m_*(A).$$

再对 T^{-1} 作同样论证, 得到反向不等式, 从而

$$m_*(T(A)) = c m_*(A) \quad (\forall A \subset \mathbb{R}^d).$$

第二步: 由 Carathéodory 判据推出可测性。

设 E 可测, 取任意 $A \subset \mathbb{R}^d$, 令 $B = T^{-1}(A)$ 。由于 E 可测,

$$m_*(B) = m_*(B \cap E) + m_*(B \setminus E).$$

两边乘上 c ，并利用上面的外测度缩放公式，得到

$$m_*(A) = m_*(A \cap T(E)) + m_*(A \setminus T(E)).$$

因此 $T(E) = \delta E$ 可测。

第三步：求测度。

既然 δE 可测，

$$m(\delta E) = m_*(\delta E) = c m_*(E) = c m(E).$$

即

$$m(\delta E) = \delta_1 \cdots \delta_d m(E).$$

做题收获和分析

这题在说什么？

这题是习题 6 的推广：不是统一按 r 缩放，而是各坐标分别按 δ_i 缩放。结论告诉我们：

$$\text{总体积变化因子} = \delta_1 \cdots \delta_d.$$

这已经非常接近线性代数中的“行列式决定体积变化”的思想了。对于对角矩阵

$$\text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_d),$$

它的行列式恰好就是 $\delta_1 \cdots \delta_d$ 。

与哪些知识点关系最密切？

- 外测度的覆盖定义；
- Carathéodory 可测性判据；
- 长方体体积公式；
- $B = T^{-1}(A)$ 是重要的证明步骤和技巧，应培养出遇见线性变换便想到此式的直觉。

做题时该怎么分析？

第一反应不是直接对可测集下手，而是先把问题转化为映射

$$T(x) = (\delta_1 x_1, \dots, \delta_d x_d).$$

然后问自己两个问题：

1. T 对长方体的体积做了什么？
2. 知道了长方体的变化后，能否从外测度定义推进到一般集合？

这就是本题自然的技术路线。

每一步为什么这么做？

- 先看长方体，是因为外测度本来就是靠覆盖定义出来的。

- 先证外测度公式，是因为外测度对任意集合都成立，不必一上来受“可测性”限制。
- 再用 Carathéodory 判据，是因为“保持可测性”本质上就是保持外测度分裂公式。

从这题应当总结出的思想

1. 先对简单集合计算，再推广到一般集合：这是测度论最常见的模式之一。
2. 可测性常由外测度来控制：证明某种变换保持可测性时，Carathéodory 判据是常规工具。

3. 习题 8：线性变换保持可测性

题目

设 $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 是线性变换。证明：若 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测，则 $L(E)$ 也可测。提示如下：

- (a) 若 E 紧，则 $L(E)$ 紧。因此若 E 是 F_σ 集，则 $L(E)$ 也是 F_σ 集。
- (b) 由于 L 自动满足

$$|L(x) - L(x')| \leq M|x - x'|$$

对某个 $M > 0$ 成立，因此 L 把边长为 ℓ 的立方体映到一个边长至多 $c_d M \ell$ 的立方体中。由此若 $m(E) = 0$ ，则 $m(L(E)) = 0$ 。最后使用教材中“可测集可分解为 F_σ 集与零测集之并”的结论。

参考证明

第一步：L 把 F_σ 集送到 F_σ 集。

线性映射在有限维空间中连续，所以紧集的像仍为紧集。又因为在 \mathbb{R}^d 中，每个 F_σ 集都可写成可数个紧集之并，所以若

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \quad K_n \text{ 紧,}$$

则

$$L(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L(K_n),$$

其中每个 $L(K_n)$ 仍紧，因此 $L(E)$ 是 F_σ 集，特别可测。

第二步：L 把零测集送到零测集。

由于 L 线性，存在 $M > 0$ 使

$$|L(x) - L(y)| \leq M|x - y| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^d).$$

设 $N \subset \mathbb{R}^d$ 满足 $m(N) = 0$ 。任给 $\varepsilon > 0$ ，可取立方体 Q_j 使

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} m(Q_j) < \varepsilon.$$

若 Q_j 的边长为 l_j , 则 $L(Q_j)$ 可被某个边长为 $c_d M l_j$ 的立方体 Q'_j 覆盖, 其中 $c_d = 2\sqrt{d}$ 。于是

$$m(Q'_j) = (c_d M)^d m(Q_j).$$

因此

$$L(N) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q'_j,$$

从而

$$m_*(L(N)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(Q'_j) = (c_d M)^d \sum_{j=1}^{\infty} m(Q_j) < (c_d M)^d \varepsilon.$$

由 ε 任意可知

$$m_*(L(N)) = 0,$$

故 $L(N)$ 零测, 也可测。

第三步：一般可测集的情形。

由教材中的结论, 每个 Lebesgue 可测集 E 可写成

$$E = F \cup N,$$

其中 F 是 F_σ 集, N 为零测集。于是

$$L(E) = L(F) \cup L(N).$$

上一步知 $L(F)$ 可测, $L(N)$ 零测可测, 所以 $L(E)$ 可测。

做题收获和分析

这题在说什么？

这题的核心信息是：Lebesgue 可测性与欧氏空间的线性结构是兼容的。线性变换不会把“好集合”变成“不可测的坏集合”。

与哪些知识点关系最密切？

- 连续映射与紧集；
- F_σ 集；
- Lipschitz 映射；
- 零测集；
- 一般可测集的分解 $E = F \cup N$ 。

做题时的分析路线

本题最重要的不是硬算, 而是**分层处理**。一般可测集太复杂, 因此先处理两类简单对象:

1. 结构上好的集合: F_σ 集;

2. 测度上小的集合：零测集。

最后再用“可测集 = 好集合 + 零测误差”的分解结论，拼出一般情形。

为什么这样做？

- F_σ 集适合用拓扑方法处理，因为线性映射是连续映射。
- 零测集适合用覆盖方法处理，因为 Lipschitz 条件能控制小立方体像的大小。

本题特别值得强调的一个细节

连续映射不一定把闭集送成闭集，因此不能简单地说“ F_σ 是闭集可数并，所以像仍是 F_σ ”；真正稳妥的做法是把 F_σ 集写成可数个紧集之并，再用“紧集在连续映射下的像仍紧”。

这题之后还会反复用到的思想

1. 分解一般对象：先对结构好的部分做，再对误差部分做。
2. Lipschitz 保零测：这是非常常用的结论，之后在变量代换、图像测度估计等地方都会出现。
3. 从拓扑性质与测度性质两头夹击：本题就是一个典型例子。

4. 习题 16：Borel–Cantelli 引理（第一部分）

题目

设 $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ 是 \mathbb{R}^d 中一系列可测集，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty.$$

令

$$E = \{x \in \mathbb{R}^d : x \in E_k \text{ 对无穷多个 } k\} = \limsup_{k \rightarrow \infty} E_k.$$

证明：

- (a) E 可测；
- (b) $m(E) = 0$ 。

提示：

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} E_k.$$

参考证明

设

$$F_n := \bigcup_{k \geq n} E_k.$$

则每个 F_n 都是可测集的可数并，因此可测。由提示，

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

所以 E 是可测集的可数交，因而可测。这证明了 (a)。

再由 $E \subset F_n$ 可得

$$m(E) \leq m(F_n).$$

而

$$m(F_n) = m\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) \leq \sum_{k \geq n} m(E_k).$$

于是对每个 n ，都有

$$m(E) \leq \sum_{k \geq n} m(E_k).$$

由于级数 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$ 收敛，其尾和趋于 0，故令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$m(E) = 0.$$

做题收获和分析

这题在说什么？

它说的是：如果一串集合的总测度是可求和的，那么“一个点落入这些集合中无穷多次”这种现象几乎处处不会发生。换句话说，对几乎每个点 x ，它只会属于有限多个 E_k 。

与哪些知识点密切相关？

- \limsup 集的集合表达式；
- 可测集对可数并、可数交封闭；
- 测度的次可加性；
- 收敛级数的尾和趋于零。

做题时第一步怎么想？

只要看到“属于无穷多个集合”，就要立刻想到

$$\limsup E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} E_k.$$

这是本题最重要的翻译。因为“无穷多次发生”本质上就是“无论你从第几项往后看，总还能再遇到”。

后面的分析为什么自然？

1. 先写成 $\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} E_k$, 可测性就立刻清楚了。
2. 再利用包含关系 $E \subset \bigcup_{k \geq n} E_k$, 把 $m(E)$ 上界住。
3. 最后用尾和趋于零收尾。

整个证明非常短, 但它代表着一种极其高频的分析模板:

复杂的“无穷次”事件 \implies 交并结构 \implies 尾和估计.

从这题中应总结出的结论

1. $\sum m(E_k) < \infty$ 的真正含义不是“每个 E_k 小”, 而是“总体预算有限”。
2. 因此“无限次发生”的点集会被压成零测集。
3. 这一定理以后在收敛性、概率论、逼近论中都会反复出现。

补充: 常用案例与理解

1. 直观理解

把 E_k 想成“第 k 次坏事发生的点集”。若

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty,$$

说明这些坏事虽然可能不断出现, 但总的“坏量”是有限的。于是对几乎处处的点, 坏事只能发生有限次, 而不可能无限次发生。

2. 常见使用案例: 证明几乎处处收敛

设 f_n 是一列函数, 希望证明 $f_n(x) \rightarrow 0$ a.e.。常见套路是固定 $\eta > 0$, 定义

$$E_n^{(\eta)} = \{x : |f_n(x)| > \eta\}.$$

若能证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n^{(\eta)}) < \infty$$

对每个有理 $\eta > 0$ 都成立, 则由 Borel–Cantelli 引理,

$$m(\{x : |f_n(x)| > \eta \text{ infinitely often}\}) = 0.$$

也就是说, 对几乎处处的 x , 超过阈值 η 的情况只会发生有限次。再对所有有理 $\eta > 0$ 同时处理, 就能推出 $f_n(x) \rightarrow 0$ 几乎处处成立。

3. 概率论中的标准版本

在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上, 如果事件 A_n 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty,$$

则

$$\mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = 0.$$

即几乎必然只会发生有限次。这是很多“随机变量几乎处处收敛”证明中的第一工具。

4. 逼近论或数论中的应用印象

在许多度量逼近问题中，会构造一系列“过于精细逼近”的集合 E_q 。只要能估计出

$$\sum_q m(E_q) < \infty,$$

就能立刻推出：对几乎所有点，这种“过好逼近”只会发生有限次。这是 Borel–Cantelli 的典型使用方式。

5. 一个容易混淆的点

本题对应的是 **Borel–Cantelli 第一引理**，它只需要可求和条件，不需要独立性。学生常常会把它和概率论中“反向结论需要独立性”的版本混在一起，学习中应明确区分。

5. 习题 28: \mathbb{R} 上正外测度集合必在某个区间里占大比例

题目

设 $E \subset \mathbb{R}$ 且 $m_*(E) > 0$ 。证明：对每个 $0 < \alpha < 1$ ，存在开区间 I ，使得

$$m_*(E \cap I) \geq \alpha m(I).$$

参考证明

先考虑 $0 < m_*(E) < \infty$ 的情形。由外测度定义，可取开集 $O \supset E$ ，使得

$$m(O) < \frac{m_*(E)}{\alpha}.$$

于是

$$\alpha m(O) < m_*(E).$$

把开集 O 分解为两两不交的可数个开区间：

$$O = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j.$$

若对每个 j 都有

$$m_*(E \cap I_j) < \alpha m(I_j),$$

则由外测度次可加性，

$$m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E \cap I_j) < \alpha \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) = \alpha m(O) < m_*(E),$$

矛盾。因此必存在某个 j ，使

$$m_*(E \cap I_j) \geq \alpha m(I_j).$$

若 $m_*(E) = \infty$, 则考虑

$$E_n := E \cap (-n, n).$$

若每个 E_n 都有 $m_*(E_n) = 0$, 则由次可加性得到 $m_*(E) = 0$, 矛盾。因此存在某个 n 满足

$$0 < m_*(E_n) < \infty.$$

对 E_n 应用前面的结论, 可得某个开区间 I 使

$$m_*(E_n \cap I) \geq \alpha m(I).$$

由于 $E_n \subset E$, 便有

$$m_*(E \cap I) \geq \alpha m(I).$$

证毕。

做题收获和分析

这题在说什么？

它表达的是一种“局部浓度”原理：只要一个 \mathbb{R} 上集合有正外测度，它就不可能在每个区间里都稀薄到某个固定比例以下。总能找到一段区间，让它在里面占据很大的比例。

与哪些知识点关系最密切？

- 外测度的外逼近： $m_*(E) = \inf\{m(O) : E \subset O, O \text{ 开}\}$ ；
- \mathbb{R} 中开集可分解为可数个不交开区间；
- 反证法与次可加性。

做题时的第一步和思考方向

这题想找的是“某个区间 I ”，因此最自然的做法是先找开集 $O \supset E$ ，再把 O 拆成开区间。这是因为直观上，此题目结论大概率需要依赖在一维结构，而开集分解成区间是最强的结构工具。

为什么先取开集外逼近？

因为外测度本来就是由外逼近定义的。只要出现 $m_*(E)$ ，第一反应就应当是：

$$\text{找一个 } O \supset E, \quad m(O) \approx m_*(E).$$

然后再把整体信息分配到各个局部区间上。

整道题的逻辑结构

1. 先找近似最优的开集 $O \supset E$ ；
2. 将 O 分解成不交区间 I_j ；
3. 假设每个区间里 E 都占不到 α 的比例；
4. 把所有坏结论加起来，得到对整体 E 的矛盾。

本题可以学习到的思想

1. 外逼近是处理外测度问题的第一武器。
2. 一维开集分解非常强。很多局部化结论都靠它。
3. 局部都差一点，整体就差很多。这种“局部反证汇总成整体矛盾”的方法在测度论里非常常见。

6. 习题 29：正测度集合的差集包含原点邻域

题目

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是可测集，且 $m(E) > 0$ 。证明其差集

$$E - E = \{z \in \mathbb{R} : z = x - y \text{ for some } x, y \in E\}$$

包含一个以 0 为中心的开区间。

提示：可利用习题 28。

参考证明

由习题 28，取 $\alpha = \frac{9}{10}$ ，存在开区间 I 使

$$m(E \cap I) \geq \frac{9}{10}m(I).$$

记

$$E_0 := E \cap I.$$

我们来证明 $E_0 - E_0$ 含有 0 的邻域。若不然，则 0 不是 $E_0 - E_0$ 的内点。于是可取任意小的 a 使

$$a \notin E_0 - E_0.$$

注意到

$$a \in E_0 - E_0 \iff E_0 \cap (E_0 + a) \neq \emptyset.$$

所以

$$a \notin E_0 - E_0 \iff E_0 \cap (E_0 + a) = \emptyset.$$

现取 a 足够小，并满足

$$|a| < \frac{8}{10}m(I).$$

由于 E_0 与 $E_0 + a$ 不交，且平移不改变测度，

$$m(E_0 \cup (E_0 + a)) = m(E_0) + m(E_0 + a) = 2m(E_0) \geq \frac{18}{10}m(I).$$

另一方面，

$$E_0 \cup (E_0 + a) \subset I \cup (I + a).$$

而对区间而言,

$$m(I \cup (I + a)) = m(I) + |a| < \frac{18}{10}m(I).$$

于是

$$\frac{18}{10}m(I) \leq m(E_0 \cup (E_0 + a)) \leq m(I \cup (I + a)) < \frac{18}{10}m(I),$$

矛盾。

故 $E_0 - E_0$ 必含有 0 的某个邻域。由于

$$E_0 - E_0 \subset E - E,$$

故 $E - E$ 也包含一个以 0 为中心的开区间。

做题收获和分析

这题在说什么？

这题说明“正测度”不仅仅意味着集合不小,还意味着它具有某种**加法厚度**:一个正测度集合与自己相减以后,不可能只是一个稀疏集合,而一定在原点附近包含一整段区间。这是 Steinhaus 型现象的典型例子。

和哪些知识点关系密切？

- 习题 28 的局部高密度结论;
- 平移不变性;
- 差集与交集的等价关系;
- 反证法。

做题时第一步应该想到什么？

题目要证明 $E - E$ 含有原点附近的区间。最自然的等价翻译是:

$$a \in E - E \iff E \cap (E + a) \neq \emptyset.$$

因此“差集含有 0 的邻域”其实就是“对所有足够小的平移 a , 集合 E 与 $E + a$ 都会相交”。

为什么要先用习题 28？

因为“ $m(E) > 0$ ”只是全局信息,直接与小平移比较并不方便。习题 28 帮我们找到了某个区间 I , 使 E 在其中占比非常高。一个在区间里占了 90% 的集合,不可能和它的一个很小平移完全错开,这正是制造矛盾的关键。

整道题的逻辑链条

1. 先找到高密度局部块 $E_0 = E \cap I$;
2. 假设 $E_0 - E_0$ 不含原点邻域;
3. 于是存在任意小的 a , 使 $E_0 \cap (E_0 + a) = \emptyset$;
4. 这样一来, $E_0 \cup (E_0 + a)$ 的测度等于 $2m(E_0)$, 非常大;

5. 但它又被包含在 $I \cup (I + a)$ 中, 而后者只比 $m(I)$ 大一点点;
6. 左边“装得太多”, 右边“容器太小”, 矛盾。

这题能带走哪些重要思想?

1. 差集问题常转化为平移后的交问题。
2. 正测度常常意味着局部厚度。
3. 两大集合不可能在很小平移下完全分开。

这是后续很多加法组合结论、卷积支撑集结论的原型。

7. 习题 33: 非可测集补集的外测度与外测度不可加性

题目

设 N 是正文构造的非可测集, I 为构造所在的长度为 1 的区间。已知上一题已经说明: N 的每个可测子集都具有测度 0。

证明:

1. $N^c := I \setminus N$ 满足

$$m_*(N^c) = 1;$$

2. 若 $E_1 = N, E_2 = N^c$, 则虽然 E_1, E_2 不交, 但

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) \neq m_*(E_1 \cup E_2).$$

提示: 若要证明 $m_*(N^c) = 1$, 可反设 $m_*(N^c) < 1$, 并取一个可测集 U 满足

$$N^c \subset U \subset I, \quad m(U) < 1 - \varepsilon.$$

参考证明

第一步: 证明 $m_*(N^c) = 1$ 。

由 $N^c \subset I$ 且 $m(I) = 1$, 可知

$$m_*(N^c) \leq 1.$$

反设

$$m_*(N^c) < 1.$$

则存在 $\varepsilon > 0$ 使

$$m_*(N^c) < 1 - \varepsilon.$$

由外测度定义, 可取可测集 U 使

$$N^c \subset U \subset I, \quad m(U) < 1 - \varepsilon.$$

于是

$$I \setminus U \subset I \setminus N^c = N.$$

并且 $I \setminus U$ 可测。由题设已知： N 的每个可测子集测度都为 0，故

$$m(I \setminus U) = 0.$$

又因为

$$I = U \sqcup (I \setminus U),$$

所以

$$1 = m(I) = m(U) + m(I \setminus U) = m(U) < 1 - \varepsilon,$$

矛盾。故

$$m_*(N^c) = 1.$$

第二步：说明外测度在此处不满足可加性。

令

$$E_1 = N, \quad E_2 = N^c.$$

则 E_1, E_2 不交，且

$$E_1 \cup E_2 = I.$$

因此

$$m_*(E_1 \cup E_2) = m_*(I) = 1.$$

另一方面，第一步已经证明

$$m_*(E_2) = m_*(N^c) = 1.$$

又因为若 $m_*(N) = 0$ ，则 N 作为零外测度集应当可测，这与 N 非可测矛盾，所以

$$m_*(N) > 0.$$

于是

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) = m_*(N) + 1 > 1 = m_*(E_1 \cup E_2).$$

故

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) \neq m_*(E_1 \cup E_2).$$

做题收获和分析

这题在说什么？

这题的主旨是：**外测度不是测度**。它对所有集合都定义，但只满足次可加性，而不对任意不交集满足可加性。真正有良好“体积加法法则”的，是**可测集上的 Lebesgue 测度**。

与哪些知识点关系最密切？

- 外测度定义；
- 非可测集的构造思想；

- 零外测度集必可测；
- 外测度与测度的本质区别。

做题时该如何分析？

这题的上界

$$m_*(N^c) \leq m(I) = 1$$

是显然的，因此真正要做的是证明 ≥ 1 。这类题的典型做法就是**反证法**：若外测度严格小于 1，就从外面用一个总测度更小的可测集罩住它，再看补集会发生什么。

为什么这个思路自然？

因为题目给了一个很强的已知条件： N 的每个可测子集都测度为 0。这意味着只要我们制造出一个“包含在 N 里的可测集”，并且它应该有正测度，就会立刻矛盾。

第二问的重要意义

第二问不是单纯算式，而是在告诉我们：

外测度 m_* 不是所有集合上的“真正体积”。

如果一个量对不交并都不满足可加，那么它就还不是我们真正想要的测度。Lebesgue 理论的关键就在于：筛选出可测集这一类足够好的集合，使得外测度在其上变成真正的测度。

本题之后应牢记的几点

1. 外测度只有次可加性，不保证不交并可加。
2. 零外测度集一定可测，这常常可以反过来用来制造矛盾。
3. “为什么要讨论可测性”这一问题，本题给出了最直接的答案：为了让体积理论真正成立。

总结

本讲义的几条主线

最后再来总结下这几道题中需要注意的点：

1. **变换下的稳定性**：从球的缩放，到坐标分别缩放，再到一般线性变换。
2. **覆盖与外测度**：通过长方体覆盖、开集外逼近和零测集覆盖，把几何问题转化为估计问题。
3. **正测度的结构信息**：正测度不仅意味着“不小”，在一维上还意味着有局部厚度与加法厚度。
4. **可测性的意义**：只有在可测集上，外测度才真正成为服从可加性的测度。
5. **连续映射的正确使用**：能从开集到开集，紧集到紧集，而不是简单地说“闭集到闭集”。例：反比例函数向 x 轴的投影。
6. **在已知的定理条件下进行严格证明和推导，不要跳关**：高维空间确实有开集结构定理：“ \mathbb{R}^n 中非空开集 G 都可以表为可数个内部互不相交的方体之并”，这在老师讲义的 lecture 2 里面

便证明了，同时需要注意这里的是内部互不相交（几乎不交，因为完整的 Whitney decomposition 中利用的是闭方体），而不是一维的开集结构定理里面的“两两不交开区间的并”。但是，对于还没有学到的一些结论，不要在做题时提前用高级结论进行跳关，保证整个实分析理论建立的连贯性（万一你用的这个结论就是建立在你现在要证的这个问题的基础上的呢？这不就是循环论证了？）。实际一点，若是考试时就考你证明这个性质，但你直接跳关，你不就炸了吗？

7. **一些建议：**大家可以看看评课社区中学长学姐给的一些考试经验以及学习技巧总结，提前看看考试题目和这门课的风格如何，在平时学习的时候便带着思考一下这个知识点可能怎么考我，这道题中可以总结出什么思想和技巧，在之后的学习中可能怎么应用等等（这些都可以利用 ai 帮自己辅助整理学习）。PS：每位老师的理念和出题风格不同，助教本人只是去年于老师班上的“背诵大赛冠军”（但是背诵的关键在于理解，这一点便不简单了），今年刘老师会如何出题，风格如何，还请自行调研斟酌。至于更多的理解和学习建议，请详见评课社区即可。

好了，看到了这里，你真是个爱学习的好孩子！分享点题外话：首先，在做题中出现了 9/10 的，应该都是借用了 ai 之类解题工具的结果。我是乐于看见大家合理使用 AI 工具的（我也用），毕竟自己对自己负责，各取所需，把知识真正学到手，得到自己想要的分数，为之后的学习打牢基础就好。

AI 的使用在之后的学习和科研中几乎可以说必不可少，大家可以去闲鱼上搜一搜“gemini 大学生认证”，“ai 会员”，“ai 团队”之类的，用较便宜的钱用上顶尖的 ai 模型（Gemini, GPT, Claude 等等），辅助自己的工作学习。

以及，最近的 AI agent 也发展迅猛，大家可以在这个网站上看看 opencode 的安装使用之类的：<https://ucny77rqcmoi.feishu.cn/wiki/O51rwN28liEu2ekMkhsc9npGnNz>，（算法基础课上的助教分享的），b 站上也有对应的好视频。注意：这个可以不需要单独去买 API key 和 token（烧钱），而是可以直接通过 browser 端口接入你订阅了的 AI 模型（如 GPT 5.4，但是在让其写代码时会调用 codex，而 codex 无论如何是有使用限额的，可以在对应处查询到）。（以及，这个接入过程对于电脑的网络借口连接要求很高，建议自行上网查攻略，并且反复拷打 AI，让他帮你搞定）不要来问我关于安装使用之类的，每个人的配置不同，我也不懂，正好也是锻炼自己搜集资源，解决问题的好机会。

至于拿到了好武器后怎么使用，那便见仁见智了。海阔凭鱼跃，天高任鸟飞！