第七次习题课讲义

涂嘉乐

2026 年 6 月 6 日

习题 1（Stein,Ch3,T3）设 0 是 $E\subset\mathbb{R}$ 的密度点，证明存在一列 $\{x_n\}\subset E$ 满足 $x_n\neq 0$ 且 $x_n\to 0$，这列 x_n 分别（不是同时）满足

(1) 对所有 $n,-x_n\in E$

(2) 对所有 $n,2x_n\in E$

注 回忆密度点的定义：设 E 是可测集，$x\in\mathbb{R}^n$，如果

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{m(E\cap B(x,r))}{m(B(x,r))}=1$$

则称 x 是 E 的一个密度点

证明 (1). 注意到 $-x_n\in E\iff x_n\in -E$，即我们需要找到一列 $x_n\to 0$ 满足 $x_n\in E\cap(-E)$，由 0 是 E 的密度点知对 $\forall 0<\alpha<1,\exists r_0\ll 1,\text{s.t.}\ \forall 0<r<r_0$，有

$$m(E\cap B(0,r))\geq\frac{\alpha+1}{2}m(B(0,r))=(\alpha+1)r$$

由对称性知

$$m(-E\cap B(0,r))=m(E\cap B(0,r))\geq(\alpha+1)r$$

因此

$$\begin{aligned}m(E\cap(-E)\cap B(0,r))&=m(E\cap B(0,r))+m((-E)\cap B(0,r))-m([E\cup(-E)]\cap B(0,r))\\&\geq 2(\alpha+1)r-2r=2\alpha r>0\end{aligned}$$

所以我们可以在 $E\cap(-E)\cap B(0,r)$ 中找到一个点 x 满足 $x\in E\cap -E$（因为集合测度大于 0），因此我们取一列 $r_n\to 0$ 且 $r_n<r_0$，在每个 $E\cap(-E)\cap B(0,r_n)$ 里取一个 x_n，进而这一列 $x_n\to 0$

(2). 注意到 $2x_n\in E\iff x_n\in\frac{E}{2}$，即我们需要找到一列 $x_n\to 0$ 满足 $x_n\in E\cap\frac{E}{2}$，由 0 是 E 的密度点知对 $\forall 0<\alpha<1,\exists r_0\ll 1,\text{s.t.}\ \forall 0<r<r_0$，有

$$m(E\cap B(0,r))\geq\frac{\alpha+2}{3}m(B(0,r))=\frac{2\alpha+4}{3}r$$

由 Lebesgue 测度的伸缩性质（$m(\frac{A}{2})=\frac{1}{2^d}m(A)$，这里维数为 d），我们有

$$m(\frac{E}{2}\cap B(0,\frac{r}{2}))\geq\frac{\alpha+2}{3}m(B(0,\frac{r}{2}))=\frac{\alpha+2}{3}r$$

因此

$$\begin{aligned} m(E\cap(\frac{E}{2})\cap B(0,r)) &= m(E\cap B(0,r))+m(\frac{E}{2}\cap B(0,r))-m([E\cup\frac{E}{2}]\cap B(0,r)) \\ &\geq \frac{2\alpha+4}{3}r+m(\frac{E}{2}\cap B(0,\frac{r}{2}))-m(B(0,r)) \\ &= \frac{2\alpha+4}{3}r+\frac{\alpha+2}{3}r-2r=\alpha r>0 \end{aligned}$$

所以我们可以在 $E\cap\frac{E}{2}\cap B(0,r)$ 中找到一个点 x 满足 $x\in E\cap\frac{E}{2}$（因为集合测度大于 0），因此我们取一列 $r_n\to 0$ 且 $r_n<r_0$，在每个 $E\cap\frac{E}{2}\cap B(0,r_n)$ 里取一个 x_n，进而这一列 $x_n\to 0$ □

注 实际上系数 $\frac{\alpha+1}{2},\frac{\alpha+2}{3}$ 是待定出来的，因为它们分别大于 $\frac{1}{2},\frac{2}{3}$，大家写 $m(E\cap B(0,r))\geq\beta m(B(0,r))$，然后找到合适的 β 即可

习题 2（2026 中国科大“数学有理”科学营实分析 T3）设 $E_1,E_2\subseteq\mathbb{R}^2$ 是正测集，求证：$\exists h\in\mathbb{R}^2$, s.t.

$$m(E_1\cap(E_2+h))>0$$

注 回忆 Lebesgue 密度定理：对 a.e $x\in E, x$ 均为 E 的密度点，所以正测集一定有密度点

证明 方法一：取 $x_1\in E_1,x_2\in E_2$ 是 E_1,E_2 的密度点，取 $\alpha\in(\frac{1}{2},1)$，则 $\exists\delta_1,\delta_2>0$, s.t. $\forall 0<r<\delta_i$

$$m(E_i\cap B(x_i,r))>\alpha m(B(x_i,r)),\quad i=1,2$$

取 $r<\min\{\delta_1,\delta_2\}$，考虑 $h=x_1-x_2$，则 $B(x_1,r)=B(x_2,r)+h$，由 Lebesgue 测度的平移不变性

$$m((E_2+h)\cap B(x_1,r))=m(E_2\cap B(x_2,r))>\alpha m(B(x_2,r))=\alpha m(B(x_1,r))$$

记 $A=E_1\cap B(x_1,r),B=(E_2+h)\cap B(x_1,r)$，则 $m(A)>\alpha m(B(x_1,r)),m(B)>\alpha m(B(x_1,r))$，所以

$$\begin{aligned} m(E_1\cap(E_2+h)) &\geq m(A\cap B)=m(A)+m(B)-m(A\cup B) \\ &\geq m(A)+m(B)-m(B(x_1,r)) \\ &> (2\alpha-1)m(B(x_1,r))>0 \end{aligned}$$

方法二：对 $i=\{1,2\}$，由 E_i 正测度以及 $E_i=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_i\cap B(0,n))$ 知 $\exists n_i\in\mathbb{N}^*$, s.t. $m(E_i\cap B(0,n_i))>0$，对 $\forall h\in\mathbb{R}^2$，设

$$A=E_1\cap B(0,n_1),\quad B=E_2\cap B(0,n_2),\quad \varphi(h)=m(A\cap(B+h))$$

注意到 $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\chi_B(x),\chi_{B+h}(x)=\chi_B(x-h)$（因为 $x\in B+h\iff x-h\in B$）

$$\varphi(h)=\int_{\mathbb{R}^2}\chi_A(x)\chi_{B+h}(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^2}\chi_A(x)\chi_B(x-h)\mathrm{d}x$$

由 $\varphi(h)$ 非负可测，使用 Tonelli 得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(h)\mathrm{d}h&=\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\chi_A(x)\chi_B(x-h)\mathrm{d}x\mathrm{d}h\\&=\int_{\mathbb{R}^2}\chi_A(x)\left(\int_{\mathbb{R}^2}\chi_B(x-h)\mathrm{d}h\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^2}\chi_A(x)m(B)\mathrm{d}x=m(A)m(B)>0\end{aligned}$$

其中第二行到第三行使用了 Lebesgue 积分的平移不变性和反射不变性，故 $\varphi(h)$ 不恒为零，则 $\exists h\in\mathbb{R}^2,\text{s.t. }\varphi(h)>0$，则对这个 h 有

$$m(E_1\cap(E_2+h))\geq m(A\cap(B+h))=\varphi(h)>0$$

□

习题 3（2024Final,T6）设 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 满足

$$\limsup_{\varepsilon\to0^+}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{|f(x)f(y)|}{(x-y)^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty$$

证明 $f(x)=0$ a.e $x\in\mathbb{R}$

证明 取一列递减到 0 的正实数 $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$，由单调收敛定理可知

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(x)||f(y)|}{|x-y|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(x)||f(y)|}{|x-y|^2+\varepsilon_k^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\limsup_{\varepsilon\to0^+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(x)||f(y)|}{|x-y|^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$$

所以 $\frac{|f(x)||f(y)|}{|x-y|^2}\in L(\mathbb{R}^2)$，对 $|f|\in L^1(\mathbb{R})$ 使用 LDT(Lebesgue 微分定理) 知

$$|f(x_0)|=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{2r}\int_{x_0-r}^{x_0+r}|f(x)|\,\mathrm{d}x\text{ a.e }x_0\in\mathbb{R}$$

所以（平方的其中一项的积分变量 x 换成 y，再由可积性使用 Fubini 或由非负性使用 Tonelli 进行换序；不等号是因为 $x,y\in(x_0-r,x_0+r),|x-y|<2r$）

$$|f(x_0)|^2=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{4r^2}\int_{x_0-r}^{x_0+r}\int_{x_0-r}^{x_0+r}|f(x)||f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\liminf_{r\to0}\int_{x_0-r}^{x_0+r}\int_{x_0-r}^{x_0+r}\frac{|f(x)||f(y)|}{|x-y|^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{ a.e }x_0\in\mathbb{R}$$

故由积分的绝对连续性（$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，若 $m(E)<\delta$，就有 $\int_E|g|\mathrm{d}x<\varepsilon$）可知

$$\liminf_{r\to0}\int_{x_0-r}^{x_0+r}\int_{x_0-r}^{x_0+r}\frac{|f(x)||f(y)|}{|x-y|^2}\,dxdy=0$$

所以 $f(x_0)=0$ a.e $x\in\mathbb{R}$ □

放一道宝宝题，以防大家看到这种题目不会做

习题 4（周民强 P218,T1）计算全变差 $\bigvee_{-1}^1(x-x^3)$

注 我们上课证明过（见 Lec21）：若 f 在 $[a,b]$ 上有界、单调，则

$$\bigvee_a^b f = |f(b)-f(a)|$$

因此对于这种题目，我们只需找到 f 在 $[a,b]$ 上的所有单调区间即可

证明 使用求导的知识可知 $f(x)=x-x^3$ 在 $[-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}],[\frac{1}{\sqrt{3}},1]$ 上单调递减，在 $[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$ 上单调递增，所以

$$\begin{aligned}\bigvee_{-1}^{1}(x-x^3) &= \bigvee_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}(x-x^3)+\bigvee_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x-x^3)+\bigvee_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}(x-x^3)\\ &= \left|f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-f(-1)\right|+\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|+\left|f(1)-f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|\\ &= \frac{2}{3\sqrt{3}}+\frac{4}{3\sqrt{3}}+\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{8}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

□

> **习题 5**（周民强 P232,T4）设 $f\in BV[0,1]$，若对 $\forall\varepsilon>0, f(x)\in AC[\varepsilon,1]$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，证明 $f\in AC[0,1]$

证明 对给定 $x\in(0,1]$，取 $0<\varepsilon<x$，对 $f\in AC[\varepsilon,1]$ 使用微积分基本定理

$$\int_\varepsilon^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x)-f(\varepsilon)$$

左边可以看作 ε 的函数，我们令 $\varepsilon\to 0^+$ 得

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^x f'(t)\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(x)-f(\varepsilon)=f(x)-f(0)$$

另一方面，由 $f\in BV[0,1]$ 知 $f'\in L^1[0,1]$，且由积分的绝对连续性知

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$$

结合两式即有

$$\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(0)$$

由微积分基本定理，f 作为 $f'\in L^1[0,1]$ 的原函数，$f\in AC[0,1]$ □

注 第二个极限是由 $f'\in L^1[0,1]$，进而由积分的绝对连续性

$$\left|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t-\int_\varepsilon^x f'(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^\varepsilon f'(t)\mathrm{d}t\right|\le\int_0^\varepsilon |f'(t)|\mathrm{d}t\to 0 \text{ as } \varepsilon\to 0$$

> **习题 6**（周民强 P242,T4）设 $f\in BV[0,a]$，证明函数
>
> $$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\quad F(0)=0$$
>
> 是 $[0,a]$ 上的有界变差函数

证明 对 $\forall f \in BV[0,a]$，定义算子 T 将 f 打到 Tf 满足

$$Tf(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, & x \in (0,a] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

因此我们只需证明 $Tf \in BV[0,a]$ 即可，由有界变差函数的 Jordan 分解定理，$\exists g, h$ 单调增，使得 $f = g - h$，因此我们只需证明对单调增的函数 f，$Tf \in BV[0,a]$ 即可

实际上对单调增的函数 f 我们有观察

(1) Tf 也单调增：设 $0 < x < y \le a$，则

$$\begin{aligned} Tf(y) - Tf(x) &= \frac{1}{y}\int_0^y f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{y}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{y}\int_x^y f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \\ &\ge \frac{x-y}{xy}\int_0^x f(x)\mathrm{d}t + \frac{1}{y}\int_x^y f(x)\mathrm{d}t \\ &= \frac{x-y}{xy}\cdot xf(x) + \frac{y-x}{y}\cdot f(x) = 0 \end{aligned}$$

其中第三行 $\frac{x-y}{xy}$ 是负的，我们把被积函数放到最大

(2) $Tf(a) < +\infty$，由 f 单调增、$f \in BV[0,a]$ 知 $\bigvee_0^a f = f(a) - f(0) < +\infty$，故 $f(a) < +\infty$ ，所以

$$Tf(a) = \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\mathrm{d}t \le \frac{1}{a}\int_0^a f(a)\mathrm{d}t = f(a) < +\infty$$

结合这两点观察可知

$$\bigvee_0^a Tf = Tf(a) - Tf(0) \le f(a) < +\infty$$

所以 $Tf \in BV[0,a]$ □

习题 7

(1)（2023Final,T7; 本题出自 Folland,Ch1,T33）证明：$[0,1]$ 中存在正测集 A，使得对于 $[0,1]$ 中的任一开区间 I，都满足：$0 < m(A \cap I) < m(I)$

(2)（Folland,Ch3,T41）对 (1) 中的集合 A，设 $F(x) = m([0,x] \cap A)$，证明 $F \in AC[0,1]$，且在 $[0,1]$ 上严格增，F' 在一个正测度集合上为零

(3) 对 (1) 中的集合 A，设 $G(x) = m([0,x] \cap A) - m([0,x] \backslash A)$，证明 $G \in AC[0,1]$，但对任意区间 I，G 在 I 上不单调

注 由 $m(I) = m(I \cap A) + m(I \cap A^c)$ 知，$0 < m(I \cap A^c) < m(I)$，即我们要找的 A 它满足和自身和补集在 I 中都有正的“质量”；我们考虑类 Cantor 集，它在 $[0,1]$ 区间上具有正测度，且无内点（这个性质很重要，这说明它无法将 $[0,1]$ 区间填满，从而还可以在空隙中继续操作）

证明 (1). 由有理数可数知，我们首先设

$$J_n = (a_n, b_n), \quad a_n, b_n \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

是 $[0,1]$ 所有端点为有理数的区间，接下来我们递归构造两两不交的闭集 $C_n, D_n \subset J_n$，使得 C_n, D_n 均为有正测度的类 Cantor 集，且它们两两不交（$C_i \cap C_j = \varnothing, C_i \cap D_j = \varnothing, D_i \cap D_j = \varnothing, C_i \cap D_i = \varnothing, \forall i \neq j$）

Step 1. 对于 J_1，我们先将 J_1 分为两个区间：$J_1 = (a_1, \frac{a_1+b_1}{2}) \cup [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1) \overset{\text{def}}{=} J_1^{(1)} \cup J_1^{(2)}$，我们将

$J_1^{(1)},J_1^{(2)}$ 向内缩一点得到两个闭区间 F_1,F_2，由类 Cantor 集的构造知我们可以在 F_1,F_2 中分别构造出具有正测度的类 Cantor 集 C_1,D_1（我们先前在 $[0,1]$ 上构造过类 Cantor 集 $\mathcal{C}$，则在任意 $[a,b]$ 上，我们只需考虑它的伸缩与平移 $(b-a)\mathcal{C}+a$ 即可）

Step 2. 假设我们已经归纳构造出了两两不交的 $C_k,D_k,\forall k\le n-1$，当 $k=n$ 时我们如下构造 C_n,D_n，令

$$F_{n-1}=\bigcup_{k=1}^{n-1}(C_k\cup D_k)$$

Claim：设 E,F 是两个无内点的闭集，则 $E\cup F$ 仍然无内点

Proof Of Claim：反设 $E\cup F$ 有内点，则 $\exists$ 开区间 $I\subset E\cup F$，由于 E 无内点，所以 $I\not\subset E$，取 $x\in I\backslash E$，由 E 闭知 $I\backslash E=I\cap E^c$ 是开集，进而 $\exists$ 开区间 $J,\text{s.t. } x\in J\subset I\backslash E$，且 $J\subset I\subset E\cup F,J\notin E$，故只能是 $J\subset F$，这与 F 无内点矛盾！

由断言（将两个推广到有限个）知，F_{n-1} 是无内点的闭集，因此对于 $J_n\not\subset F_{n-1}$，取 $x_n\in J_n\backslash F_{n-1}$，由 $J_n\backslash F_{n-1}$ 是开集知，$\exists\varepsilon>0,\text{s.t. }(x_n-3\varepsilon,x_n+3\varepsilon)\subset J_n\backslash F_{n-1}$，我们考虑 $K_n^{(1)}=[x_n-2\varepsilon,x_n-\varepsilon],K_n^{(2)}=[x_n+\varepsilon,x_n+2\varepsilon]$，则同上我们可以在 $K_n^{(1)},K_n^{(2)}$ 中构造出具有正测度的类 Cantor 集 C_n,D_n，且

$$C_n\subset K_n^{(1)}\subset J_n\backslash F_{n-1},\quad D_n\subset K_n^{(2)}\subset J_n\backslash F_{n-1},\quad C_n\cap D_k=\varnothing,C_k\cap D_n=\varnothing,\forall k\le n$$

以此类推我们归纳构造了两列两两不交的具有正测度的 Cantor 集 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty},\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$，最后我们设

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$$

由于每个 C_n 都是闭集，所以 A 是 F_σ 集，故 A 是 Borel 集，故可测，接下来我们证明 A 满足题意

对任意开区间 $I\subset[0,1]$，由有理数的稠密性，存在 $J_n\subset I$，由构造知 $C_n\subset J_n\subset I$，且 $C_n\subset A$，所以

$$m(A\cap I)\ge m(C_n)>0$$

另一方面，由构造知 $D_n\subset J_n\subset I$，且 D_n 与任意 $C_k,k\in\mathbb{N}^*$ 都不交，所以 $D_n\cap A=\varnothing$，故 $D_n\subset I\backslash A$，则

$$m(I\backslash A)\ge m(D_n)>0$$

从而

$$m(A\cap I)=m(I)-m(I\backslash A)\le m(I)-m(D_n)<m(I)$$

所以对 $[0,1]$ 中的任意开区间 I，都有 $0<m(A\cap I)<m(I)$

(2). 因为

$$F(x)=\int_0^x\chi_A(t)\mathrm{d}t$$

由 A 可测知 $\chi_A\in L^1[0,1]$，由微积分基本定理，F 作为原函数，故绝对连续，且对 $\forall y>x$ 有

$$\begin{aligned}F(y)-F(x)&=m([0,y]\cap A)-m([0,x]\cap A)\\&=m((x,y]\cap A)=m((x,y)\cap A)>0\end{aligned}$$

作为原函数有 $F'(x)\overset{\text{a.e}}{=}\chi_A(x)$，且由上分析知 $m([0,1]\backslash A)>0$，所以 $F'=0$ 在一个正测集上成立

(3). 注意到 $m([0,x]\backslash A)=x-m([0,x]\cap A)$，则 $G(x)=2F(x)-x$，由 $F'(x)\overset{\text{a.e}}{=}\chi_A(x)$ 知

$$G'(x)\overset{\text{a.e}}{=}2\chi_A(x)-1=\begin{cases}1, & x\in A\\ -1, & x\in[0,1]\backslash A\end{cases}$$

对任意区间 I，因为 $m(I\cap A)>0$ 且 $m(I\backslash A)>0$，所以在 $I\cap A$ 的一个正测度子集上有 $G'(x)=1$；在 $I\backslash A$ 的一个正测度子集上有 $G'(x)=-1$

若 G 在 I 上单调递增，则 $G'(x)\geq 0$ a.e $x\in I$，与 G' 在 $I\backslash A$ 的一个正测度子集上为 -1 矛盾！

若 G 在 I 上单调递减，则 $G'(x)\leq 0$ a.e $x\in I$，与 G' 在 $I\cap A$ 的一个正测度子集上为 1 矛盾！ □

习题 8（Stein,Ch3,T11;2024Final,T3）若 $a,b>0$，定义

$$f(x)=\begin{cases}x^a\sin(x^{-b}), & 0<x\leq 1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

证明

(1) $f\in BV[0,1]\iff a>b$

(2) 对 $\forall\alpha\in(0,1)$，取特定的（与 α 有关的）$a=b$，使得 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 α 阶 Hölder 连续的（课本上也说这叫指数为 α 的 Lipschitz 条件），即满足

$$|f(x)-f(y)|\leq A|x-y|^\alpha$$

证明 (1).($\Longleftarrow$) 对任意 $x\in(0,1]$，求导得

$$f'(x)=ax^{a-1}\sin(x^{-b})-bx^{a-b-1}\cos(x^{-b})$$

$$|f'(x)|\leq ax^{a-1}+bx^{a-b-1}$$

对 $[0,1]$ 的任意分割 $\mathcal{P}:0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$，任取 $0<\varepsilon<t_1$，积分得

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1|f'(x)|\mathrm{d}x&\leq\int_\varepsilon^1(ax^{a-1}+bx^{a-b-1})\mathrm{d}x=\left(x^a+\frac{b}{a-b}x^{a-b}\right)\Big|_\varepsilon^1\\&=\frac{a}{a-b}-\varepsilon^a-\frac{b}{a-b}\varepsilon^{a-b}\leq\frac{a}{a-b}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}V(f,\mathcal{P})&=\sum_{i=1}^n|f(t_i)-f(t_{i-1})|=|f(t_1)-f(t_0)|+\sum_{i=2}^n|f(t_i)-f(t_{i-1})|\\&=|f(t_1)|+\sum_{i=2}^n\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}f'(x)\mathrm{d}x\right|\leq|f(t_1)|+\sum_{i=2}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}|f'(x)|\mathrm{d}x\\&\leq 1+\int_{t_1}^1|f'(x)|\mathrm{d}x\leq 1+\int_\varepsilon^1|f'(x)|\mathrm{d}x=1+\frac{a}{a-b}\end{aligned}$$

在 LHS 关于 $\mathcal{P}$ 取上确界即得 $\bigvee_0^1 f\leq 1+\frac{a}{a-b}<+\infty$，即 $f\in BV[0,1]$

($\Longrightarrow$) 证明逆否命题，即证明 $a\leq b$ 时 $f\notin BV[0,1]$，我们考虑 $[0,1]$ 的一个特殊分割 $\mathcal{P}:0=t_0<$

$t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = 1$，其中

$$t_i = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(m-i+1)} \right)^{\frac{1}{b}}, \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

则对 $1 \le i \le m-1$ 有 $f(t_i) = t_i^a \sin(\frac{\pi}{2} + \pi(m-i+1)) = (-1)^{m-i+1} t_i^a$，故

$$\begin{aligned} V(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \ge \sum_{i=2}^{m-1} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=2}^{m-1} (t_i^a + t_{i-1}^a) \ge \sum_{i=2}^{m-1} t_i^a = \sum_{i=2}^{m-1} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(m-i+1)} \right)^{\frac{a}{b}} \\ &= \sum_{j=2}^{m-1} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi j} \right)^{\frac{a}{b}} \ge \sum_{j=2}^{m-1} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi j} \to +\infty \end{aligned}$$

所以 $f \notin BV[0,1]$

(2). 首先当 $a = b$ 时，由 (1) 知有导数估计

$$|f'(x)| \le a x^{a-1} + a x^{-1}, \quad x \in (0, 1]$$

设 $0 < h < 1$，我们有如下两种估计

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= |(x+h)^a \sin[(x+h)^{-a}] - x^a \sin(x^{-a})| \\ &= (x+h)^a \left| \sin[(x+h)^{-a}] - \left(\frac{x}{x+h} \right)^a \sin(x^{-a}) \right| \\ &\le 2(x+h)^a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= |f'(\xi)| h \le (a\xi^{a-1} + a\xi^{-1}) h \\ &= a(\xi^a + 1) \frac{h}{\xi} \le \frac{2ah}{\xi} \le \frac{2ah}{x} \end{aligned}$$

当 $x^{a+1} \ge h > 0$ 时

$$|f(x+h) - f(x)| \le \frac{2ah}{x} \le 2ah^{\frac{a}{a+1}}$$

当 $x^{a+1} < h$ 时

$$|f(x+h) - f(x)| \le 2(x+h)^a \le 2(h^{\frac{1}{a+1}} + h)^a = 2(1 + h^{\frac{a}{a+1}})^a h^{\frac{a}{a+1}} \le 2^{a+1} h^{\frac{a}{a+1}}$$

所以我们取 $\alpha = \frac{a}{1+a}$，即 $a = \frac{\alpha}{1-\alpha}$，且 $A = \max\{2a, 2^{a+1}\}$，从而对任意 $x, x+h \in [0,1], 0 < h < 1$ 有

$$|f(x+h) - f(x)| \le A h^\alpha$$

综上

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}), & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上是 α 阶 Hölder 连续的（课本上也说这叫指数为 α 的 Lipschitz 条件），但 $f \notin BV[0,1]$ $\square$

习题 9（一个引理）设 $E_n \nearrow E$（均不必可测），即 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$，且 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，则

$$\lim_{n\to\infty} m_*(E_n) = m_*(E)$$

证明 只证明有限情形，无穷情形是平凡的：取 E_n 的 G_δ-等测包 G_n，即 $G_n \supset E_n$ 且 $m(G_n) = m_*(E_n)$，考虑

$$C_n = \bigcap_{k\geq n} G_n$$

则对 $\forall k \geq n$ 有 $E_n \subset E_k \subset G_k \Longrightarrow E_n \subset C_n$，又因为 $C_n \subset G_n$，所以

$$m_*(E_n) \leq m(C_n) \leq m(G_n) = m_*(E_n) \Longrightarrow m(C_n) = m_*(E_n) = m(G_n)$$

又因为

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

所以

$$m_*(E) \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \xlongequal{C_n\nearrow} \lim_{n\to\infty} m(C_n) = \lim_{n\to\infty} m_*(E_n)$$

另一边不等号由 $E_n \subset E$ 以及外测度的单调性易知 □

习题 10（有关导数的测度估计）

(1) 设 f 是 $[a,b]$ 上的实值函数，$E \subset [a,b]$（不必可测），若 $f'(x)$ 在 E 上存在且 $|f'(x)| \leq M$，则

$$m_*(f(E)) \leq M m_*(E)$$

(2) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数，$E \subset [a,b]$ 是可测集，且 $f(x)$ 在 E 上可微，则

$$m_*(f(E)) \leq \int_E |f'(x)| \mathrm{d}x$$

证明 (1). 固定 $x \in E$，由

$$|f'(x)| = \lim_{y\to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq M$$

知，固定的 $\varepsilon > 0, \exists n = n(x,\varepsilon), \text{s.t.} \ \forall |y-x| < \frac{1}{n}$，有 $\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq M+\varepsilon$，因此考虑将点集 E 做分解，定义

$$E_n = \left\{ x \in E : \text{当} |y-x| < \frac{1}{n} \text{时，有} |f(y)-f(x)| \leq (M+\varepsilon)|x-y| \right\}$$

因此由定义知 $E_n \nearrow E$，故有 $f(E_n) \nearrow f(E)$，接下来我们证明对每个 n 有

$$m_*(f(E_n)) \leq (M+\varepsilon)(m_*(E_n)+\varepsilon)$$

由外测度的定义，取 $\{I_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ 覆盖 E_n，满足

- $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k^{(n)}| < m_*(E_n) + \varepsilon$
- $|I_k^{(n)}| < \frac{1}{n}, \forall k \in \mathbb{N}^*$（考虑不断二分使得长度满足要求）

若 $s,t\in E_n\cap I_k^{(n)}$，我们有

$$|f(s)-f(t)|\le (M+\varepsilon)|s-t|\le (M+\varepsilon)|I_k^{(n)}|$$

即 $\operatorname{diam}(f(E_n\cap I_k^{(n)}))\le (M+\varepsilon)|I(n)_k|$，于是我们有

$$\begin{aligned}m_*(f(E_n))&=m_*\left(f(E_n\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k^{(n)})\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}m_*(f(E_n\cap I_k^{(n)}))\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{diam}(f(E_n\cap I_k^{(n)}))\le (M+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}|I_k^{(n)}|\\&<(M+\varepsilon)(m_*(E_n)+\varepsilon)\end{aligned}$$

由上一题的引理，我们在不等号两端令 $n\to\infty$ 得

$$m_*(f(E))\le (M+\varepsilon)(m_*(E)+\varepsilon)$$

再由 ε 的任意性，令 $\varepsilon\to 0^+$ 即证

(2). 首先 f' 作为 $g_n(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$ 的极限函数仍可测，对任意 $\varepsilon>0$，考虑集合列

$$E_n=\{x\in E:(n-1)\varepsilon\le|f'(x)|<n\varepsilon\},\quad n\in\mathbb{N}^*$$

则 E_n 可测，且由 (1) 知

$$\begin{aligned}m_*(f(E_n))&\le n\varepsilon m(E_n)=(n-1)\varepsilon m(E_n)+\varepsilon m(E_n)\\&\le\int_{E_n}|f'(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon m(E_n)\end{aligned}$$

因为 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，所以 $f(E)=f\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}f(E_n)$，故

$$\begin{aligned}m_*(f(E))&\le\sum_{n=1}^{\infty}m_*(f(E_n))\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f'(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)\\&=\int_E|f'(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon m(E)\end{aligned}$$

由 ε 的任意性以及 $E\subset[a,b]$ 测度有限知，令 $\varepsilon\to 0^+$ 即证 □

习题 11（Banach-Zaretsky）我们上课学习了绝对连续函数是有界变差函数，本题我们考虑有界变差函数添加什么条件后能够成为绝对连续函数

(1) 若 $f\in C([a,b])$，且把零测集打到零测集，则是否有 $f\in AC[a,b]$？

(2) 若 $f\in C([a,b])\cap BV[a,b]$，则是否有 $f\in AC[a,b]$？

(3) 证明：$f\in AC[a,b]\iff f\in C([a,b])\cap BV[a,b]$，且对零测集 Z 有 $m(f(Z))=0$

证明 (1). 否，考虑 $[a,b]=[0,1],f(x)=x\sin x^{-1}$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$f\in AC[\varepsilon,1]$，设 $Z\subset[0,1]$ 是零测集，注意到

$$[0,1]=\{0\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1\right]\Longrightarrow Z=(Z\cap\{0\})\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}Z\cap\left[\frac{1}{n},1\right]\right)$$

由于 $Z\cap\{0\}\subset\{0\}$，而 $f(\{0\})=\{f(0)\}$ 是一个点，故测度为零，且对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$，由 $f\in AC[\frac{1}{n},1]$ 和

$Z\cap\left[\frac{1}{n},1\right]$ 是零测集知，$f\left(Z\cap\left[\frac{1}{n},1\right]\right)$ 也是零测集，故

$$f(Z)=f(Z\cap\{0\})\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}f\left(Z\cap\left[\frac{1}{n},1\right]\right)$$

为可数个零测集的并，故仍为零测集，但是由第八题知 $f\notin BV[0,1]$，进而 $f\notin AC[0,1]$

(2). 否，考虑作业中见过的 Cantor-Lebesgue 函数，它连续且单调增，故为有界变差函数

(3).($\Longrightarrow$) 由绝对连续可推连续、有界变差，且作业题中证明过绝对连续函数把零测集打到零测集

($\Longleftarrow$) 由 $f\in BV[a,b]$ 知 f' a.e 存在，且 $f'\in L^1([a,b])$，考虑两两不交的开区间 $I_k=(a_k,b_k)\subseteq[a,b],k=1,2,\cdots,N$，由 f' a.e 存在知可设 $I_k=A_k\sqcup N_k$，其中 f' 在 A_k 上存在，N_k 是零测集，又因为 $f(I_k)=f(N_k)\cup f(A_k)$，且由条件知 $m(f(N_k))=0$，利用习题 10 的 (2) 知

$$m(f(I_k))=m(f(A_k))\leq\int_{A_k}|f'(x)|\mathrm{d}x=\int_{I_k}|f'(x)|\mathrm{d}x$$

由 f 连续知 $f(I_k)$ 是一个区间，所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}|f(b_k)-f(a_k)|\leq\sum_{k=1}^{N}m(f(I_k))&\leq\sum_{k=1}^{N}\int_{I_k}|f'(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_{\bigcup\limits_{k=1}^{N}I_k}|f'(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为 $f'\in L^1([a,b])$，所以由积分的绝对连续性知，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，只要 $\sum\limits_{k=1}^{N}|b_k-a_k|=m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{N}I_k\right)<\delta$，就有

$$\sum_{k=1}^{N}|f(b_k)-f(a_k)|\leq\int_{\bigcup\limits_{k=1}^{N}I_k}|f'(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

即 $f\in AC[a,b]$ □