第一次习题课讲义

涂嘉乐

2026 年 3 月 21 日

1　作业解答

习题 1（Stein,Chapter 1,T1） Prove that the Cantor set $\mathcal{C}$ constructed in the text is totally disconnected and perfect. In other words, given two distinct points $x, y \in \mathcal{C}$, there is a point $z \notin \mathcal{C}$ that lies between x and y, and yet $\mathcal{C}$ has no isolated points.

证明（本题中有关 Cantor 集的记号见老师讲义）

Totally disconnected：对 $\forall x < y \in \mathcal{C}, \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t. } |x-y| > \frac{1}{3^N}$，回忆 Cantor 集的构造，第 N 步后余下的区间长度均为 $\frac{1}{3^N}$，故 x, y 必属于 $F_N \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{k=1}^{2^N} F_{N,k}$ 中的两个不同的区间，因此 $\exists z \notin \mathcal{C}, \text{s.t. } x < z < y$

Has no isolated points：对 $\forall x \in \mathcal{C} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t. } \frac{1}{3^N} < \varepsilon$，由于 $x \in F_N = \bigcup\limits_{k=1}^{2^N} F_{N,k}$，故 $\exists k_0, \text{s.t. } x \in F_{N,k_0}$，取 F_{N,k_0} 异于 x 的端点 y_N，则由 Cantor 集的构造知 $y_N \in \mathcal{C}$ 且 $|x - y_N| \leq \frac{1}{3^N} < \varepsilon$，即 $\forall x \in \mathcal{C}, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon)$ 中都有在 $\mathcal{C}$ 中的点，故 $\forall x \in \mathcal{C}$ 都不是孤立点 □

习题 2（Stein,Chapter 1,T2） The Cantor set $\mathcal{C}$ can also be described in terms of ternary expansions.

(1) Every number in $[0,1]$ has a ternary expansion

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}, \quad a_k = 0, 1, 2$$

Note that this decomposition is not unique since, for example $\frac{1}{3} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k}$. Prove that $x \in \mathcal{C} \iff x$ has a representation as above where every a_k is either 0 or 2.

(2) The Cantor-Lebesgue function is defined on $\mathcal{C}$ by

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k} \quad \text{if } x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \text{ where } b_k = \frac{a_k}{2}$$

In this definition, we choose the expansion of x in which $a_k = 0$ or 2. Show that F is well defined and continuous on $\mathcal{C}$, and moreover $F(0) = 0$ as well as $F(1) = 1$.

(3) Prove that $F : \mathcal{C} \to [0,1]$ is surjective, that is, for every $y \in [0,1]$ there exists $x \in \mathcal{C}$ such that $F(x) = y$.

(4) One can also extend F to be a continuous function on $[0,1]$ as follows. Note that if (a,b) is an open interval of the complement of $\mathcal{C}$, then F(a) = F(b). Hence we may define F to have the constant value F(a) in that interval.

证明（本题中有关 Cantor 集的记号见老师讲义）

(1).($\Longrightarrow$) : 设 $x \in \mathcal{C} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$，则 $\forall n \in \mathbb{N}^*, x \in F_n = \bigcup\limits_{k=1}^{2^n} F_{n,k}$，其中 F_{n_k} 是闭区间，则必存在某个 k_0, s.t. $x \in F_{n,k_0}$，记这个闭区间为 $I_n(x)$，则由构造知 $I_n(x) \searrow$，即 $I_1(x) \supset I_2(x) \supset \cdots$，我们如下归纳定义 $\{a_n\}$ 和 $\{x_n\}$：$n=1$ 时，$F_1 = F_{1,1} \cup F_{1,2} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$，定义

$$a_1 = \begin{cases} 0, & x \in F_{1,1}\text{或}I_1(x) = F_{1,1} \\ 2, & x \in F_{1,2}\text{或}I_1(x) = F_{1,2} \end{cases} \qquad x_1 = \frac{a_1}{3}$$

假设 $n \le m$ 时 a_n, x_n 已经定义，则当 $n = m+1$ 时，由于 $I_m(x)$ 将被挖去中间的 $\frac{1}{3}$，得到左右两个子闭集，由 Cantor 集的构造知 $I_{m+1}(x)$ 必为其中一个，所以我们定义

$$a_{m+1} = \begin{cases} 0, & I_{m+1}(x)\text{是左边那个子闭集} \\ 2, & I_{m+1}(x)\text{是右边那个子闭集} \end{cases} \qquad x_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{a_k}{3^k}$$

结合 Cantor 集的构造，容易验证 x_n 是 $I_n(x)$ 的左端点，它不会在构造中被挖掉，故 $x_n \in \mathcal{C}$，且由 $x \in I_n$ 知

$$x_n \le x \le x_n + \frac{1}{3^n} \Longrightarrow |x_n - x| \le \frac{1}{3^n}$$

即 $x_n \to x$，又因为

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^n} \to 0$$

所以 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$，由极限唯一知 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$

($\Longleftarrow$) : 假设 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, a_k = 0$ 或 2，则同上定义 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}$，上面已经验证 $x_n \to x$，且 $x_n \in \mathcal{C}$，由 $\mathcal{C}$ 是闭集知 $x \in \mathcal{C}$

(2). 本题要求证明 F 是良定的，我们需要证明两点

- $F(x)$ 的取值由 x 的三进制表达（系数 $a_k \ne 1$）唯一确定，实际上我们断言：若 $x \in \mathcal{C}$，且 x 的三进制表达中系数 $a_k \ne 1, \forall k$，则该表达唯一
  反证，设 $\mathcal{C} \ni x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}, \forall k, a_k, b_k \in \{0,2\}$，若表达不唯一，则 $\exists k \in \mathbb{N}^*$, s.t. $a_k \ne b_k$，假设 $k_0 = \min\{k : a_k \ne b_k\}$，不失一般性我们设 $a_{k_0} = 0, b_{k_0} = 2$，则

$$0 = x - x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k - a_k}{3^k} = \frac{2}{3^{k_0}} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{b_k - a_k}{3^k} \ge \frac{2}{3^{k_0}} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^{k_0}}$$

  矛盾！因此 $\forall x \in \mathcal{C}$，$x$ 的系数不为 1 的三进制表达唯一，故 $F(x)$ 由该表达唯一确定
- $F(x)$ 定义的级数收敛，这是显然的，因为 $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k} \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$

接下来验证 F 的连续性，我们断言：若 $x, y \in \mathcal{C}$，且 $|x-y| < \frac{1}{3^{k_0}}$，则在 x, y 的系数不为 1 的三进制表达中，前 k_0 项系数都相同

Proof Of Claim : 设 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}$，记 $s = \min\{k : a_k \ne b_k\}$，假设断言不成立，则 $s \le k_0$，不失一般性我们设 $a_s = 0, b_s = 2$，则

$$y - x = \frac{2}{3^s} + \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{b_k - a_k}{3^k} \ge \frac{2}{3^s} + \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^s} \ge \frac{1}{3^{k_0}}$$

矛盾！因此断言成立

对 $\forall \varepsilon > 0$，我们选取 k_0, s.t. $\frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon$，再取 $\delta = \frac{1}{3^{k_0}}$，结合断言知，若 $x, y \in \mathcal{C}, |x-y| < \delta$，则它们的

前 k_0 项系数相同，故

$$|F(y)-F(x)| = \left|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{b_k^{(y)}-b_k^{(x)}}{2^k}\right| \le \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon$$

即 F 在 $\mathcal{C}$ 上连续

最后我们注意到 $0=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{0}{3^k}, 1=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}$，故 $F(0)=0, F(1)=1$

(3). 对 $\forall y\in[0,1]$，均存在二进分解 $y=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{2^k}$，我们定义 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2b_k}{3^k}$，由 (1) 知 $x\in\mathcal{C}$，且 $F(x)=y$，故 $F:\mathcal{C}\to[0,1]$ 是满射

(4). 因为 $[0,1]\backslash\mathcal{C}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n, G_n=\bigcup\limits_{k=1}^{2^{n-1}}G_{n,k}$ 是 Cantor 集构造过程中被挖去的开区间，接下来我们证明在任意被挖去的开区间的两个端点上 F 的取值相等，即若 $G_{n,k}=(a,b)$，其中 $a,b\in\mathcal{C}$，则 $F(a)=F(b)$

回忆 (1) 中定义的 $I_n(x)$，由 Cantor 集的构造过程知，$I_m(a)=I_m(b),\forall m<n$，而当 $m=n$ 时，$I_n(a)$ 是 $I_{n-1}(a)$ 的挖去中间 $\frac{1}{3}$ 后得到的左边的闭子空间，$I_n(b)$ 是 $I_{n-1}(a)$ 的挖去中间 $\frac{1}{3}$ 后得到的右边的闭子空间，当 $m>n$ 时，$I_m(a)$ 是 $I_{m-1}(a)$ 的挖去中间 $\frac{1}{3}$ 后得到的右边的闭子空间，$I_m(b)$ 是 $I_{m-1}(a)$ 的挖去中间 $\frac{1}{3}$ 后得到的左边的闭子空间，(可以画图感受一下)，所以 a,b 的系数不为 1 的三进制表达的前 $n-1$ 位相同，而第 n 位时 a 的系数全为 0，b 的系数为 2，从第 $n+1$ 位开始 a 的系数全为 2，b 的系数全为 0，因此

$$F(b)-F(a)=\frac{1}{2^n}-\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^m}=0$$

我们定义

$$\tilde{F}:[0,1]\longrightarrow[0,1]$$
$$x\longmapsto\begin{cases}F(x), & x\in\mathcal{C}\\ F(a)=F(b), & x\in(a,b)\subset[0,1]\backslash\mathcal{C}\end{cases}$$

由 $\tilde{F}$ 定义不难看出 $\tilde{F}$ 是单调不减的，假设 $\exists x_0\in(0,1)$, s.t. $\tilde{F}$ 在 x_0 处不连续，则由 $\tilde{F}$ 单调有界知 $a\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{x\to x_0^-}\tilde{F}(x), b\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{x\to x_0^+}\tilde{F}(x)$ 均存在，进而由单调性知 $\tilde{F}$ 的值域

$$\text{Range}(\tilde{F})\subseteq[0,a]\cup[b,1]$$

但是由 (3) 知 $\tilde{F}$ 的值域为 $[0,1]$，这显然矛盾！最后我们验证 $\tilde{F}$ 在 $x=0,1$ 处连续，我们只验证 $x=0$ 的情况，$x=1$ 完全类似，对 $\forall\varepsilon>0$，由 F 在 $\mathcal{C}$ 上的连续性知 $\exists\delta>0$, s.t. $\forall x\in\mathcal{C},|x-0|<\delta$，就有 $|F(x)-F(0)|<\varepsilon$，取 $x=\delta'$，由 $\tilde{F}$ 的单调性知 $\forall 0<y<\delta'$，有

$$|\tilde{F}(y)-\tilde{F}(0)|=\tilde{F}(y)<F(x)=|F(x)-F(0)|<\varepsilon$$

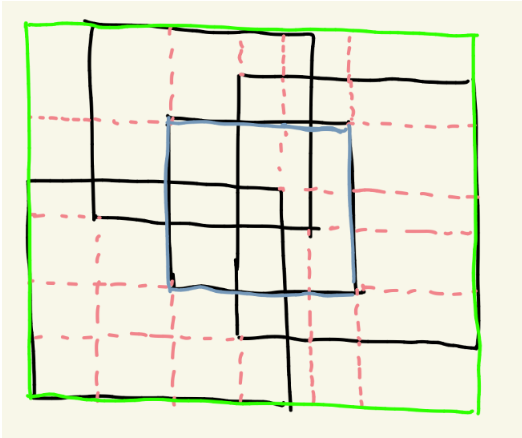
进而 $\tilde{F}$ 在 $x=0$ 连续

综上 $\tilde{F}$ 在 $[0,1]$ 上连续 □

习题 3 (Stein,Lemma 1.2) If $R,R_1,\cdots,R_N$ are rectangles, and $R\subset\bigcup\limits_{k=1}^{N}R_k$, then

$$|R|\le\sum_{k=1}^{N}|R_k|$$

证明



我们考虑将 $R_1,\cdots,R_N$，以及 R 的所有边进行无限延拓得到的网络，记包含于 $\bigcup\limits_{k=1}^{N} R_k$ 中的分割后得到的几乎不交的新矩体为 $\tilde{R}_1,\cdots,\tilde{R}_M$（就是图中黑框里面的小矩形），则我们有

$$\bigcup_{i=1}^{N} R_i = \bigcup_{k=1}^{M} \tilde{R}_k$$

因为 $R\subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} R_k$，且我们也将 R 的所有边进行延伸，所以 $\exists\{k_1,\cdots,k_l\}\subseteq\{1,2,\cdots,M\}$, s.t.（就是图中蓝框里面的小矩形）

$$R=\bigcup_{i=1}^{l}\tilde{R}_{k_i}$$

因此

$$|R|=\sum_{i=1}^{l}|\tilde{R}_{k_i}|\le\sum_{k=1}^{M}|\tilde{R}_k|\le\sum_{i=1}^{N}|R_i|$$

最后一个小于等于号是因为有些 $\tilde{R}_i$ 可能属于多个 R_j 中 □

习题 4（Stein,Chapter 1,T13） The following deals with G_δ and F_σ sets

(1) Show that a closed set is a G_δ and an open set an F_σ
[Hint：If F is closed, consider $\mathcal{O}_n=\left\{x:\mathrm{d}(x,F)<\frac{1}{n}\right\}$]

(2) Give an example of an F_σ which is not a G_δ.
[Hint：This is more difficult; let F be a denumerable set that is dense]

(3) Give an example of a Borel set which is not a G_δ nor an F_σ

评价 这里的

$$\mathrm{d}(x,F)=\inf_{y\in F}\mathrm{d}(x,y)$$

数分中我们证明过他是关于 x 的连续函数，$\mathcal{O}_n$ 为它在开集 $\left(-\infty,\frac{1}{n}\right)$ 下的像，故为开集

证明 (1). 考虑 $\mathcal{O}_n=\left\{x:\mathrm{d}(x,F)<\frac{1}{n}\right\}$，首先证明 $\mathcal{O}_n$ 是开集：对于 $\forall x\in\mathcal{O}_n$，取 $\varepsilon=\frac{1}{n}-\mathrm{d}(x,F)$，则对 $\forall x'\in B(x,\varepsilon),\forall y\in F$，由三角不等式有

$$\mathrm{d}(x',y)\le\mathrm{d}(x',x)+\mathrm{d}(x,y)<\varepsilon+\mathrm{d}(x,F)=\frac{1}{n}$$

取下确界得 $\mathrm{d}(x',F)<\frac{1}{n}$，故 $B(x,\varepsilon)\subseteq\mathcal{O}_n$，由 x 的任意性知 $\mathcal{O}_n$ 是开集

接下来证明 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n$

$F\subseteq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n$：对 $\forall x\in F, \mathrm{d}(x,F)=0$，故 $x\in\mathcal{O}_n,\forall n$，所以 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n\Longrightarrow F\subseteq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n$

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n\subseteq F$：对 $\forall x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n$，假设 $x\notin F$，由 F^c 是开集知 $\exists N\in\mathbb{N}^*,\text{s.t. } B(x,\frac{1}{N})\subseteq F^c$，故 $\mathrm{d}(x,F)\geq\frac{1}{N}$，即 $x\notin\mathcal{O}_N$，这与假设矛盾！

进而闭集是 G_δ 集；反过来设 O 为开集，则 O^c 是闭集，故存在可数开集族 $\{\mathcal{O}_n\}_{n=1}^{\infty}$, s.t. $O^c=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n$，由 De Morgan's law 知

$$O=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n\right)^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n^c$$

其中 $\mathcal{O}_n^c$ 是闭集，即开集是 F_σ 集

(2). 考虑 $\mathbb{Q}=\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}}\{r\}$，由单点集是闭集、$\mathbb{Q}$ 可数知 $\mathbb{Q}$ 是 F_σ 集，下面证明 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集

假设 $\mathbb{Q}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，其中 G_n 是开集，设 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个排列，定义 $V_n=G_n\backslash\{r_n\}$，则 V_n 仍为开集，再定义 $O_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n}V_k$，则我们有如下观察

1. $O_1\supseteq O_2\supseteq\cdots$
2. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}V_n$
3. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}V_n\subseteq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n\Big\backslash\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{r_n\}\right)=\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Q}=\varnothing$，故 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}V_n=\varnothing$
4. $\mathbb{Q}\backslash\{r_n\}\subseteq G_n\backslash\{r_n\}=V_n$，由于 $\mathbb{Q}$ 删去有限个数仍为 $\mathbb{R}$ 的稠密子集，故 $\forall n, V_n$ 是 $\mathbb{R}$ 的稠密子集
5. 有限多个稠密开集的交仍为稠密子集（见本题最后的注释），故 $\forall n, O_n$ 也是 $\mathbb{R}$ 的稠密子集

接下来构造矛盾，由于 O_1 是 $\mathbb{R}$ 的稠密开集，所以 $\exists I_1=[a_1,b_1]\subset O_1$，且 $b_1-a_1<1$；由于 O_2 是 $\mathbb{R}$ 的稠密开集，所以可以在 $I_1=[a_1,b_1]$ 中找到 $I_2=[a_2,b_2]$，且 $b_2-a_2<\frac{1}{2}$，归纳地，我们可以得到一列闭区间 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$I_1\supset I_2\supset\cdots,\quad\lim_{n\to\infty}|I_n|\to 0$$

由闭区间套定理知 $\exists x_0,\text{s.t. } x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_1\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}V_n=\varnothing$，矛盾！

(3). 答案 1：$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^c$

我们需要如下几点补充

- 设 $E\subseteq\mathbb{R}^2$，定义它的竖直截面和水平截面如下

$$E_x=\{y\in\mathbb{R}:(x,y)\in E\}\subseteq\mathbb{R},\quad E^y=\{x\in\mathbb{R}:(x,y)\in E\}\subseteq\mathbb{R}$$

- 若 E 是闭集，则每个 E_x,E^y 都是闭集：若 $\{y_n\}\subseteq E_x,\text{s.t. } y_n\to y$，那么 $(x,y_n)\to(x,y)$，由 E 是闭集知 $(x,y)\in E$，进而 $y\in E_x$，故 E_x 是闭集
- 若 E 是 F_σ 集，则每个 E_x,E^y 都是 F_σ 集：若 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，其中 F_n 是闭集，则

$$E_x=\{y\in\mathbb{R}:(x,y)\in E\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{y\in\mathbb{R}:(x,y)\in F_n\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n)_x$$

- 若 E 是开集，则每个 E_x,E^y 都是开集：若 $y\in E_x$，则 $(x,y)\in E,\exists\varepsilon>0,\text{s.t. } B((x,y),\varepsilon)\subseteq E$，进而 $(y-\varepsilon,y+\varepsilon)\subseteq E_x$，故 E_x 是开集

- 若 E 是 G_δ 集，则每个 E_x, E_y 都是 G_δ 集：若 $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$，其中 G_n 是开集，则

$$E_x=\{y\in\mathbb{R}:(x,y)\in E\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{y\in\mathbb{R}:(x,y)\in G_n\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n)_x$$

接下来我们说明 $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^c$ 既不是 G_δ 集也不是 F_σ 集，若它是 G_δ 集，任取 $r\in\mathbb{Q}^c$，则 $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^c)^r=\mathbb{Q}$ 是 G_δ 集，但这与 (2) 矛盾！

若它是 F_σ 集，任取 $q\in\mathbb{Q}$，则 $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^c)_q=\mathbb{Q}^c$ 是 F_σ 集，进而 $\mathbb{Q}=(\mathbb{Q}^c)^c$ 是 G_δ 集，但这与 (2) 矛盾！

答案 2：$E=(\mathbb{Q}\cap[0,1])\cup((1,2)\cap\mathbb{Q}^c)$

论述过程较为复杂，助教摆了 □

评价 若 A,B 都是 $\mathbb{R}$ 的稠密开集，则 $A\cap B$ 也是 $\mathbb{R}$ 的稠密子集（再由数学归纳法可以推广到有限交）

证明 回忆稠密的等价命题：$X\subseteq\mathbb{R}$ 是稠密子集 $\iff\forall$ 非空开集 O，$O\cap X\neq\varnothing$

对 $\forall O\subset\mathbb{R}$ 是开集，$\exists$ 开区间 $I\subseteq O$，由 A 稠密知 $I\cap A\neq\varnothing$，而 $I\cap A$ 也是开集，结合 B 稠密知 $(I\cap A)\cap B\neq\varnothing$，而 $I\cap(A\cap B)\subseteq O\cap(A\cap B)$，故 $O\cap(A\cap B)\neq\varnothing$，所以 $A\cap B$ 是 $\mathbb{R}$ 的稠密开集

习题 5（Stein,Chapter 1,T19） Here are some observations regarding the set operation $A+B$

(1) Show that if either A and B is open, then $A+B$ is open.（注意这里是 either 不是 both）

(2) Show that if A and B are closed, then $A+B$ is measurable.

(3) Show, however, that $A+B$ might not be closed even though A and B are closed.

评价 这里的集合 A,B 均为 $\mathbb{R}^d$ 的子集

$$A+B=\{x+y:x\in A,y\in B\}$$

证明 (1). 不妨设 A 是开集，下面用定义证明 $A+B$ 是开集：对 $\forall x+y\in A+B$，因为 A 是开集，$x\in A$，故 $\exists\varepsilon>0,\text{s.t. } B(x,\varepsilon)\subseteq A$，下证 $B(x+y,\varepsilon)\subseteq A+B$

对 $\forall a\in B(x+y,\varepsilon)$，因为 $a=(a-y)+y$，所以我们只需验证 $a-y\in A$，进而 $a=(a-y)+y\in A+B$，注意到

$$|(a-y)-x|=|a-(x+y)|<\varepsilon$$

即 $a-y\in B(x,\varepsilon)\subseteq A\Longrightarrow B(x+y,\varepsilon)\subseteq A+B$，故 $A+B$ 是开集

或者也可以如下证明

$$A+B=\bigcup_{b\in B}A+\{b\}$$

由 $A+\{b\}$ 表示开集 A 的平移，故仍为开集，$A+B$ 为一族开集之并，故仍为开集

(2). Case 1.A,B 都是紧集

我们证明 $A+B$ 也是紧集，由于在 $\mathbb{R}^d$ 中紧集与有界闭集等价，我们只需证明 $A+B$ 有界且为闭集，一方面由 A,B 是紧集知 $\exists M_1,M_2,\text{s.t.}$

$$|x|\leq M_1\ \ |y|\leq M_2,\quad\forall x\in A,\forall y\in B$$

进而对 $\forall x+y\in A+B$，我们有

$$|x+y|\leq|x|+|y|\leq M_1+M_2$$

故 $A+B$ 有界，另一方面假设 $\{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq A+B$，且 $x_n+y_n\to a$，下面证明 $a\in A+B$，由 A 是紧集知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, s.t. $x_{n_k}\to x_0\in A$，由 B 是紧集知 $\{y_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ 存在收敛子列 $\{y_{n_{k_l}}\}_{k=1}^{\infty}$, s.t. $y_{n_{k_l}}\to y_0\in B$，故我们考虑子列 $\{x_{n_{k_l}}+y_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$，有 $x_{n_{k_l}}+y_{n_{k_l}}\to x_0+y_0\in A+B$，由极限唯一知 $a=x_0+y_0\in A+B$，故 $A+B$ 是闭集

综上 A,B 是紧集时，$A+B$ 也是紧集，故可测

Case 2. 一般情况

因为 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A\cap\overline{B(0,k)}, B=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B\cap\overline{B(0,k)}$，对 $\forall k\in\mathbb{N}^*, A\cap\overline{B(0,k)}, B\cap\overline{B(0,k)}$ 是有界闭集，故为紧集，注意到

$$\begin{aligned}A+B&=\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}A\cap\overline{B(0,k)}\right]+\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}B\cap\overline{B(0,k)}\right]\\&=\bigcup_{k,l=1}^{\infty}\left([A\cap\overline{B(0,k)}]+[B\cap\overline{B(0,l)}]\right)\end{aligned}$$

是可数个紧集的并集，故可测

(3). 反例 1：考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的集合

$$A=\{(x,y):xy=1,x>0\},B=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$$

其中 A 是双曲线的上半支（常用来构造反例），B 是 x 轴，则

$$A+B=\left\{(x+y,\frac{1}{x}):x>0,y\in\mathbb{R}\right\}$$

取 $y=-x=n$，则 $(0,\frac{1}{n})\in A+B$，且 $(0,\frac{1}{n})\to(0,0)$，但是 $(0,0)\notin A+B$

反例 2：考虑 $\mathbb{R}$ 上的集合

$$A=\mathbb{Z},B=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{n+\frac{1}{n}\right\}$$

取 $m=-n\in A, n+\frac{1}{n}\in B$，则 $\frac{1}{n}\in A+B$，且 $\frac{1}{n}\to 0$，但是 $0\notin A+B$ □

习题 6（Stein,Chapter 1,T25）An alternative definition of measurability is as follows: E is measurable if for every $\varepsilon>0$ there is a closed set F contained in E with $m_*(E\backslash F)<\varepsilon$. Show that this definition is equivalent with the one given in the text.

证明 书上的定义：称 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 可测，若对 $\forall\varepsilon>0,\exists O$ 是开集，使得 $E\subseteq O$ 且 $m_*(O\backslash E)<\varepsilon$；记书上的定义为 (1)，题中的定义为 (2)

(1) $\Longrightarrow$ (2)：由 E 可测知 E^c 也可测，则对 $\forall\varepsilon>0,\exists$ 开集 $O\supseteq E^c$, s.t. $m_*(O\backslash E^c)<\varepsilon$，考虑 $F=O^c$，则 F 是闭集且 $F\subseteq E$，$E\backslash F=E\cap F^c=E\cap O=(E^c)^c\cap O=O\backslash E^c$，故

$$m_*(E\backslash F)=m_*(O\backslash E^c)<\varepsilon$$

(2) $\Longrightarrow$ (1)：设 E 可测，则对 $\forall\varepsilon>0,\exists$ 闭集 $F\subseteq E$, s.t. $m_*(E\backslash F)<\varepsilon$，考虑 $O=F^c$，则 O 是开集，且 $E^c\subseteq O$，$O\backslash E^c=O\cap(E^c)^c=(F^c)^c\cap E=E\backslash F$，故

$$m_*(O\backslash E^c)=m_*(E\backslash F)<\varepsilon$$

进而 E^c 可测，再由补集可测知 E 也可测 □

习题 7 设 R 是闭矩体，证明 $m_*(\partial R)=0, m_*(R^\circ)=|R|$，其中 R° 表示 R 的内部

证明 要证明 $m_*(\partial R)=0$，只需证明 $\forall\varepsilon>0, m_*(\partial R)<\varepsilon$ 即可，还是考虑二进方体，记

$$\Gamma_k \overset{\text{def}}{=} \left\{\frac{1}{2^k}([0,1]^n+m) : m\in\mathbb{Z}^n\right\}$$

$$\mathcal{F}_k=\{Q\in\Gamma_k : Q\cap\partial R\neq\varnothing\}$$

则我们有如下观察

$$\#\mathcal{F}_k \le \frac{\text{Area}(\partial R)\times 2^{-k}\times 2}{2^{-kn}} = 2\text{Area}(\partial R)\cdot 2^{k(n-1)}$$

其中分子是覆盖的最大可能体积（底面积为 $\text{Area}(\partial R)$，高是 2^{-k}，$\times 2$ 是因为 ∂R 可能在上下两个二进方体的公共面上），分母是单个二进方体的体积，进而

$$m_*(\partial R)\le \sum_{Q\in\mathcal{F}_k}|Q| = 2^{-nk}\cdot\#\mathcal{F}_k = \frac{2\text{Area}(\partial R)}{2^k}$$

令 $k\to\infty$ 知 $m_*(\partial R)=0$

接下来证明 $m_*(R^\circ)=|R|$，一方面由单调性知 $m_*(R^\circ)\le m_*(R)=|R|$，另一方面，对 $\forall\varepsilon>0$，我们考虑将开矩体的每个面往内“推”一点，只要推的距离足够小，体积差距就不会“差太多”，因此存在闭矩体 $\exists\tilde{R}\subseteq R^\circ\subseteq R, \text{s.t. } |R|>|\tilde{R}|>|R|-\varepsilon$，进而由单调性有

$$m_*(R^\circ)\ge m_*(\tilde{R})=|\tilde{R}|=|R|-\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即得证 $\square$

2 补充内容

定理 1（De Morgan 律）设 I 是指标集（可以不可数），$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一族集合，则

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$$

证明

$$\begin{aligned} x\in\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c &\iff \forall\alpha\in I, x\notin A_\alpha \\ &\iff \forall\alpha\in I, x\in A_\alpha^c \\ &\iff x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x \in \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c &\iff x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \\
&\iff \exists \alpha \in I, x \notin A_\alpha \\
&\iff \exists \alpha \in I, x \in A_\alpha^c \\
&\iff x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c
\end{aligned}
$$

□

评价 进而 F_σ 集的补集就是 G_δ 集

定义 2（集合列的极限）设 $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ 是一列集合，令

$$
B_j = \bigcup_{k=j}^\infty A_k, \quad C_j = \bigcap_{k=j}^\infty A_k
$$

则显然有 $B_j \supset B_{j+1}, C_j \subset C_{j+1}$，即 $B_j \searrow, C_j \nearrow$，我们称

$$
\bigcap_{j=1}^\infty B_j = \bigcap_{j=1}^\infty \bigcup_{k=j}^\infty A_j, \quad \bigcup_{j=1}^\infty C_j = \bigcup_{j=1}^\infty \bigcap_{k=j}^\infty A_j
$$

为集合列 $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ 的上、下极限，记为

$$
\limsup_{n\to\infty} A_k = \bigcap_{j=1}^\infty \bigcup_{k=j}^\infty A_j, \quad \liminf_{n\to\infty} A_k = \bigcup_{j=1}^\infty \bigcap_{k=j}^\infty A_j
$$

评价 若 $A_k \searrow$，即 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，则可以定义 $\{A_k\}$ 的极限 $\lim\limits_{k\to\infty} \bigcap\limits_{k=1}^\infty A_k$；若 $A_j \nearrow$，即 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，则可以定义 $\{A_k\}$ 的极限 $\lim\limits_{k\to\infty} \bigcup\limits_{k=1}^\infty A_k$

命题 3 设 $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ 是一列集合，则

$$
\begin{cases}
\limsup\limits_{k\to\infty} A_k \overset{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{j=1}^\infty \bigcup\limits_{k=j}^\infty A_j = \{x: \text{存在无穷多个}i, \text{s.t. } x \in A_i\} \\
\liminf\limits_{k\to\infty} A_k \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{j=1}^\infty \bigcap\limits_{k=j}^\infty A_j = \{x: \text{存在某个}N, \text{s.t. } \forall i \geq N, x \in A_i\}
\end{cases}
$$

证明 (1)

$$
\begin{aligned}
x \in \limsup_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{j\geq 1} \bigcup_{i\geq j} A_i &\iff \forall j \in \mathbb{N}^*, x \in \bigcup_{i\geq j} A_i \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ with } N > n, \text{s.t. } x \in A_N \\
&\iff \exists \text{无穷多个 } N, \text{s.t. } x \in A_N \\
&\iff x \in \{x : x \in A_i \text{无穷多次发生}\}
\end{aligned}
$$

(2)

$$\begin{aligned} x \in \liminf_{i\to\infty} A_i = \bigcup_{j\geq 1}\bigcap_{i\geq j} A_i &\iff \exists j_0 \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } x \in \bigcap_{i\geq j_0} A_i \\ &\iff x \in A_i, \forall i \geq j_0 \\ &\iff x \in \{x : \text{从某时刻起} x \in A_i \text{一直发生}\} \end{aligned}$$

□

习题 8（Stein,Chapter 1,T3,Cantor sets of constant dissection） Consider the unit interval [0, 1], and let ξ be a fixed real number with $0 < \xi < 1$ (the case $\xi = \frac{1}{3}$ corresponds to the Cantor set $\mathcal{C}$ in the text). In stage 1 of the construction, remove the centrally situated open interval in $[0,1]$of length ξ. In stage 2, remove two central intervals each of relative length ξ, one in each of the remaining intervals after stage 1, and so on. Let $\mathcal{C}_\xi$ denote the set which remains after applying the above procedure indefi nitely.

(a) Prove that the complement of $\mathcal{C}_\xi$ in $[0,1]$ is the union of open intervals of total length equal to 1.

(b) Show directly that $m_*(\mathcal{C}_\xi) = 0$.

[Hint: After the k-th stage, show that the remaining set has total length $= (1-\xi)^k$.]

证明 (a). 第一步去掉了长度为 ξ 的开区间，余下长度为 $1-\xi$，产生了两个长度为 $\frac{1-\xi}{2}$ 的子闭区间；第二步将每个子闭区间去掉相对长度为 ξ 的子区间，即去掉了 2^{2-1} 个长度为 $\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{2-1}\xi$ 的开区间，产生了 4 个长度为 $\frac{1-\xi}{2}\cdot(1-\xi)\cdot\frac{1}{2} = \frac{(1-\xi)^2}{2^2}$ 的子闭区间，故余下长度为 $(1-\xi)^2$

用数学归纳法可证明，第 k 步去掉了 2^{k-1} 个长度为 $\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{k-1}\xi$ 的开区间，即去掉的开区间总长度为

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\cdot\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{k-1}\xi = \sum_{k=1}^{\infty}\xi(1-\xi)^{k-1} = 1$$

(b). 记第 k 步后产生的集合为 $C_{\xi,k}$，则同 Cantor 集的构造有 $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_{\xi,k}$，且 $m_*(C_{\xi,k}) \leq (1-\xi)^k$ 进而

$$m_*(\mathcal{C}_\xi) \leq m_*(C_{\xi,k}) \leq (1-\xi)^k \to 0$$

左边与 k 无关，故 $m_*(\mathcal{C}_\xi) = 0$ □

习题 9（Stein,Chapter 1,T11） Let A be the subset of $[0,1]$ which consists of all numbers which do not have the digit 4 appearing in their decimal expansion. Find $m(A)$.

证明 考虑将 $[0,1]$ 进行 10 等分，我们第一步删去 $(0.4,0.5)$，（注意我们没删去 0.4，我们稍后会处理这些数）记第 i 步操作后余下的集合记为 A_i，则 $m(A_1) = \frac{9}{10}$；第二步我们删去 $(0.04,0.05),(0.14,0.15),\cdots,(0.94,0.95)$，共删去 9 个长度为 $\frac{1}{100}$ 的区间；故 $m(A_2) = \frac{9}{10} - \frac{9}{100} = \left(\frac{9}{10}\right)^2$，同理第三步我们删去 9^2 个长度为 $\frac{1}{1000}$ 的区间，$m(A_3) = \left(\frac{9}{10}\right)^3$，用数学归纳法可证明 $m(A_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$，进而

$$\tilde{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad m(\tilde{A}) \leq m(A_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n \to 0$$

最后我们考虑那些漏网之鱼,如 0.4, 0.04 等,具体可以写为 $C = \{x \in [0,1] : x\text{是有限小数，但十进制展开后含}4\}$，它们是有限小数，故为有理数，即 $C \subseteq \mathbb{Q}$，所以 $m(C) = 0$，因此

$$m(A) = m(\tilde{A}\backslash C) = m(\tilde{A}) - m(C) = m(\tilde{A}) = 0$$

□

习题 10（Stein,Chapter 1,T4,Cantor-like sets） Construct a closed set $\hat{\mathcal{C}}$ so that at the k-th stage of the construction one removes 2^{k-1} centrally situated open intervals each of length l_k, with

$$l_1+2l_2+\cdots+2^{k-1}l_k<1$$

(a). If l_j are chosen small enough, then $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k<1$. In this case, showthat $m(\hat{\mathcal{C}})>0$, and in fact, $m(\hat{\mathcal{C}})=1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k$

(b). Show that if $x\in\hat{\mathcal{C}}$, then there exists a sequence of points $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that $x_n\notin\hat{\mathcal{C}}$, yet $x_n\to x$ and $x_n\in I_n$, where I_n is a sub-interval in the complement of $\hat{\mathcal{C}}$ with $|I_n|\to 0$.

(c). Prove as a consequence that $\hat{\mathcal{C}}$ is perfect, and contains no open interval.

(d). Show also that $\hat{\mathcal{C}}$ is uncountable.

证明 (a). 记第 k 次操作后得到的集合为 $\hat{\mathcal{C}}_k$，由操作规则知（这里是因为去掉的都是开区间，故可以不写外测度，直接写成测度）$m(\hat{\mathcal{C}}_k)=1-\sum\limits_{i=1}^{k}2^{i-1}l_i$，又因为 $\hat{\mathcal{C}}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\hat{\mathcal{C}}_k$，由测度的单调性知

$$m(\hat{\mathcal{C}})=\lim_{k\to\infty}m(\hat{\mathcal{C}}_k)=1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k>0$$

(b). 对 $\forall x\in\hat{\mathcal{C}}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\hat{\mathcal{C}}_k$，则 $x\in\hat{\mathcal{C}}_k,\forall k$，记 $J_n(x)$ 是 $\hat{\mathcal{C}}_n$ 中包含 x 的那个闭区间，$I_n(x)$ 是第 $n+1$ 次操作时删去的 $J_n(x)$ 中的开区间，取 $I_n(x)$ 的中点为 x_n，则 $x_n\notin\hat{\mathcal{C}}$，且

$$|x_n-x|\le|J_n|\to 0$$

且 $I_n\subseteq J_n$，故 $|I_n|\le|J_n|\to 0$（这里由于第 n 步在 $[0,1]$ 中产生了 2^n 个闭区间，故每个闭区间的长度 $|J_n|\le\frac{1}{2^n}$）

(c). 完全集（没有孤立点）：沿用 (b) 的记号，对 $\forall x\in\hat{\mathcal{C}}$，取 I_n 中离 x 较近的端点记为 y_n，则 $y_n\in\hat{\mathcal{C}}$，且 $|y_n-y|\le|J_n|\to 0$，故 $\hat{\mathcal{C}}$ 没有孤立点

不含任何开区间：假设含有开区间 $(a,b)\subset\hat{\mathcal{C}}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\hat{\mathcal{C}}_n$，我们取 n 充分大，使得 $\frac{1}{2^n}<b-a$，那么 $(a,b)\subset\hat{\mathcal{C}}_n$，但是 $\hat{\mathcal{C}}_n$ 中每个区间长度 $\le\frac{1}{2^n}$，这显然矛盾！

(d). 我们可以考虑将 $\hat{\mathcal{C}}$ 中的元素与 Cantor 集 $\mathcal{C}$ 做一一对应：因为若将每次去掉的相对长度从 l_k 改为 $\frac{1}{3}$ 时，即为 Cantor 集，进而我们可以按照“位置”将 $\hat{\mathcal{C}}$ 和 $\mathcal{C}$ 中的点做一一对应（更严谨的我们可以用二进制小数表示：若该数在第 n 次操作后，在 I_n（定义同 (b)）左（右）边，则第 n 位数记为 $0(1)$，进而 $\hat{\mathcal{C}},\mathcal{C}$ 中元素的用二进制小数表示时是一样的），而在作业中我们证明过存在 $\mathcal{C}$ 到 $[0,1]$ 的满射，故 $\mathcal{C}$ 不可数（否则 $[0,1]$ 可数，矛盾！），进而 $\hat{\mathcal{C}}$ 也不可数 □

习题 11（等测包）设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$（不必可测），证明存在 G_δ 集 G, s.t. $E\subset G$，且 $m(G)=m_*(E)$，这个集合 G 称为集合 E 的等测包

证明 若 $m_*(E)=\infty$，取 $G=\mathbb{R}^d$ 即可；若 $m_*(E)<\infty$，由外测度的外正则性，对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\exists$ 开集 $\mathcal{O}_n$, s.t. $E\subseteq\mathcal{O}_n$，且 $m_*(\mathcal{O}_n)<m_*(E)+\frac{1}{n}$，我们取 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n$，则 $E\subset G$，且

$$m_*(E)\le m_*(G)=m(G)\le m(\mathcal{O}_n)<m_*(E)+\frac{1}{n}$$

令 $n\to\infty$ 即得证 $\square$

评价 一般题目中没有可测的条件时，我们可以考虑用集合的等测包过渡一下

定理 4 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$，如果 $m_*(A)=m_*(A\cap E)+m_*(A\cap E^c),\forall A\subseteq\mathbb{R}^n$，则称 E 是 Carathedory 可测，证明：Lebesgue 可测 $\Longleftrightarrow$ Carathedory 可测

证明 $(\Longrightarrow)$：假设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ Lebesgue 可测，则对 $\forall A\subseteq\mathbb{R}^n$，取 A 的等测包（见上一题）G 满足 $m_*(A)=m(G)$，且 $A\subseteq G$，则

$$m_*(A\cap E)+m_*(A\cap E^c)\le m(G\cap E)+m_*(G\cap E^c)=m(G\cap E)+m(G\cap E^c)=m(G)=m_*(A)$$

另一边不等式由外测度的次可数可加性保证，故 $m_*(A)=m_*(A\cap E)+m_*(A\cap E^c)$

$(\Longleftarrow)$：假设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ Carathedory 可测，取 G 为 E 的等测包，则 $G\supset E$，且

$$m_*(E)=m(G)=m_*(E\cap G)+m_*(E^c\cap G)=m_*(E)+m_*(G\backslash E)\Longrightarrow m_*(G\backslash E)=0$$

即 $G\backslash E$ 是零测集，故 Lebesgue 可测，所以 $E=G\backslash(G\backslash E)$ 为 Lebesgue 可测集的差集，故 E 是 Lebesgue 可测的 $\square$

习题 12（Stein,Chapter 1,P48,Problems,T5） Suppose E is measurable with $m(E)<\infty$, and

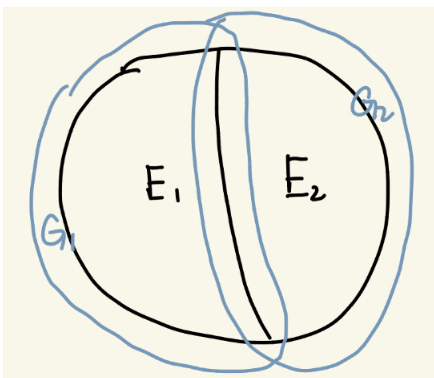
$$E=E_1\cup E_2,\quad E_1\cap E_2=\varnothing$$

If $m(E)=m_*(E_1)+m_*(E_2)$, then E_1 and E_2 are measurable

In particular, if $E\subset Q$, where Q is a finite cube, then E is measurable if and only if $m(Q)=m_*(E)+m_*(Q\backslash E)$.

证明 记 E_i 的等测包为 $G_i,i=1,2$，则 G_i 可测，且 $E_i\subseteq G_i,m_*(E_i)=m_*(G_i)$，考虑 $H_i=G_i\cap E,i=1,2$，则 H_1,H_2 可测，且我们有 $E_1=H_1\backslash(H_1\backslash E_1),E_2=H_2\backslash(H_2\backslash E_2)$（大家可以画个图感受一下，以下是严谨证明）

$$\begin{aligned}H_i\backslash(H_i\backslash E_i)&=H_i\cap(H_i\cap E_i^c)^c=H_i\cap(H_i^c\cup E_i)\\&=H_i\cap E_i=E_i,i=1,2\end{aligned}$$



如果我们能证明 $H_1\backslash E_1,H_2\backslash E_2$ 可测，那么 E_1,E_2 为可测集的差集，故可测，因为

$$\begin{aligned}0&\le m(H_1\cap H_2)=m(H_1)+m(H_2)-m(H_1\cup H_2)\\&\le m(H_1)+m(H_2)-m(E)\\&=m_*(E_1)+m_*(E_2)-m(E)=0\end{aligned}$$

进而 $m(H_1\cap H_2)=0$，又因为

$$H_1\backslash E_1=G_1\cap E\cap E_1^c=G_1\cap E_2\subseteq G_1\cap H_2=H_1\cap H_2$$

所以 $m_*(H_1\backslash E_1)=m_*(H_1\cap H_2)=0$，进而 $H_1\backslash E_1$ 是零测集，故可测，同理有 $H_2\backslash E_2$ 也是零测集，故可测，进而 E_1,E_2 可测 □

习题 13 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是互不相交的可测集列，$B_n\subseteq A_n, n=1,2,\cdots$（注意 B_n 不一定可测），证明

$$m_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m_*(B_n)$$

证明 首先证明两个的情形，即 $m_*(B_1\cup B_2)=m_*(B_1)+m_*(B_2)$，由于 A_1 可测，取测试集为 $B_1\cup B_2$，则

$$\begin{aligned}m_*(B_1\cup B_2)&=m_*((B_1\cup B_2)\cap A_1)+m_*(B_1\cup B_2\cap A_1^c)\\&=m_*(B_1)+m_*(B_2)\end{aligned}$$

进而由数学归纳法，对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$m_*\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)=\sum_{k=1}^{n}m_*(B_k)$$

利用外测度的单调性有

$$\sum_{k=1}^{n}m_*(B_k)=m_*\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)\le m_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\right)$$

右边与 n 无关，左边令 $n\to\infty$ 即可得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}m_*(B_k)\le m_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\right)$$

另一边不等式由外测度的次可数可加性得到 □

习题 14（Stein,Chapter 1,T28）Let E be a subset of $\mathbb{R}$ with $m_(E)>0$. Prove that for each $0<\alpha<1$, there exists an open interval I so that

$$m_*(E\cap I)\ge\alpha m_*(I)$$

Loosely speaking, this estimate shows that E contains almost a whole interval.

[Hint: Choose an open set O that contains E, and such that $m_*(E)\ge\alpha m_*(O)$. Write O as the countable union of disjoint open intervals, and show that one of these intervals must satisfy the desired property.

证明 由外正则性以及 $m_*(E)>0$ 知，存在开集 $O\supseteq E$, s.t. $m_*(O)<\frac{1}{\alpha}m_*(E)$，即 $\alpha m_*(O)<m_*(E)$，由 $\mathbb{R}$ 上的开集结构定理知，存在可数不相交的开集族 $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$, s.t. $O=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}I_j$，我们断言 $\exists I_j$, s.t. $m_*(E\cap I_j)\ge\alpha m_*(I_j)$，否则 $\forall I_j, m_*(E\cap I_j)<\alpha m_*(I_j)$

$$E=E\cap O=E\cap\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j=\bigcup_{j=1}^{\infty}(E\cap I_j)$$

$$\alpha m(O) < m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E \cap I_j) < \alpha \sum_{j=1}^{\infty} m_*(I_j) = \alpha m(O)$$

最后一个等号是因为测度的可数可加性，但 $\alpha m(O) < \alpha m(O)$ 显然不成立，进而命题得证 $\square$