5.20 实分析课后作业

康托尔-勒贝格函数与绝对连续性

Cantor-Lebesgue 函数的构造步骤回顾

1. **Cantor 三分集的构造**：从闭区间 $[0,1]$ 开始，首先挖去中间的开区间 $I_{1,1} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$。在第 k 步（$k = 1, 2, \dots$），对留下的每个闭区间均挖去其中间的开区间。记第 k 步所挖去的开区间为：
$$I_{k,j} = \left(\frac{3j-2}{3^k}, \frac{3j-1}{3^k}\right), \quad j = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$$
令所有被挖去开区间的并集为 Cantor 开集 G：
$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} I_{k,j}$$
则区间 $[0,1]$ 中剩余的部分即为 Cantor 三分集 $C = [0,1] \setminus G$。

2. **函数 $f(x)$ 在开集 G 上的定义**：对于属于第 k 步被挖出的第 j 个开区间 $x \in I_{k,j}$ 的点，其函数值规定为恒定的常数：
$$f(x) = \frac{2j-1}{2^k}$$

3. **函数 $f(x)$ 在三分集 C 上的定义**：对于属于 Cantor 三分集 C 的点 x，其函数值通过下式给出：
$$f(x) = \sup\{f(t) : t \in [0,x) \cap G\}$$
特别地，规定端点值 $f(0) = 0$ 且 $f(1) = 1$。

题目部分

题目 1. 根据上述关于 *Cantor-Lebesgue* 函数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 的完整构造细节，请严谨地证明该函数在 $[0,1]$ 上是**单调递增**的。

在完成下一题之前，我们先回顾课堂讲义中关于绝对连续性的严格定义：

定义 1 (绝对连续)**.** 对函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，如果 $\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得对 $[a,b]$ 中任意有限多个互不相交的开区间 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^N$，只要满足

$$\sum_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\delta$$

就有

$$\sum_{k=1}^{N}|f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon$$

那么我们称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上是绝对连续的。

题目 2 (Ex. 13)**.** *Show directly from the definition that the Cantor-Lebesgue function is not absolutely continuous.*
（请直接根据上述绝对连续的定义，证明 *Cantor-Lebesgue* 函数在 $[0,1]$ 上不是绝对连续的。）