

习题 1 对 $f \in L^1_{\text{loc}}$, 定义

$$f^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f| dm$$
$$(Mf)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f| dm$$

分别称为 f 的非中心 Hardy-Littlewood 极大函数和中心 Hardy-Littlewood 极大函数, 证明

$$(Mf)(x) \leq f^*(x) \leq 2^n (Mf)(x)$$

习题 2 证明: 若 $f \in L^1_{\text{loc}}$, 则 f^* 可测