

# 实分析课后作业：4.20,4.22

讲义第十四讲 & 第十五讲

## 第十四讲 (2026.4.20)

**题目 1:** 研究  $L^\infty$  收敛 (即当  $k \rightarrow \infty$  时  $\|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$ ) 与近一致收敛 (Almost Uniform Convergence) 之间的逻辑关系。

**题目 2:** 研究近一致收敛与几乎处处 (a.e.) 收敛的关系, 以及它与依测度收敛 (Convergence in Measure) 的关系。

## 第十五讲 (2026.4.22)

**题目 3: Urysohn 引理的构造与证明**

设  $F$  为  $\mathbb{R}^n$  中的非空闭集,  $G$  为开集, 且  $F \subset G$ 。利用讲义提供的构造公式:

$$f(x) = \frac{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G)}{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G) + \text{dist}(x, F)}$$

证明  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上的连续函数, 且满足  $0 \leq f \leq 1$ , 并在  $F$  上恒为 1, 在  $\mathbb{R}^n \setminus G$  上恒为 0。

**题目 4:  $L^p$  空间的稠密性结论**

设  $1 \leq p < \infty$ , 证明以下三类函数在  $L^p(E)$  空间中均是稠密的:

1. 简单函数类 (Simple functions);
2. 阶梯函数类 (Step functions);
3.  $C_c(\mathbb{R}^n)$  (当底层空间为  $\mathbb{R}^n$  时)。

**题目 5:  $L^1$  收敛的判定定理 (Scheffé 定理变体)**

设  $f_k, f \in L^1(E)$ , 且  $f_k \rightarrow f$  a.e. 成立。证明:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_1 = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k| dm = \int_E |f| dm$$