实分析作业整理

2026 年 4 月 8 日

1. 举例说明：存在非负可测函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得：

   (i) $\lim_{k\to\infty} f_k$ 存在；

   (ii) $\lim_{k\to\infty} \int f_k \, dm$ 存在；

   (iii) $\int \lim_{k\to\infty} f_k \, dm < \lim_{k\to\infty} \int f_k \, dm$。

2. 举例说明：Riemann 可积与绝对可积（即 $|f|$ Riemann 可积）不等价。

3. 证明：若 $f \in L^1$，则
$$\sum_{k=1}^{\infty} m(\{|f| \geq k\}) < +\infty$$

4. If f is integrable on $\mathbb{R}$, show that $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt$ is uniformly continuous.

5. **Tchebychev inequality.** Suppose $f \geq 0$, and f is integrable. If $\alpha > 0$ and $E_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$, prove that
$$m(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int f.$$