第二十七讲 (2026.6.3)

Def $X \neq \phi$

如果函数 $\mu^*: 2^X \to [0, +\infty]$ s.t.

(i) $\mu^*(\phi) = 0$

(ii) (单调性) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$

(iii) (可数次可加性) $\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$

则称 μ^* 是 X 上的一个外测度.

Def 设 μ^* 是 X 上的外测度, $E \subset X$.

如果

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

$\forall A \subset X$ (试验集)

则称 E 是 μ^*-可测的.

Rmk: 上述条件称为卡氏条件 (Carathéodory

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 有界, $\Rightarrow \exists Q$ s.t. $E \subset Q$

设 $Q \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$

$$\Longrightarrow \quad Q \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right) \subset E$$ ②

"内测度":

$$\mu_*(E) \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{ |Q| - \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| : Q \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \right\}$$

$$= |Q| - \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| : Q \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \right\}$$

$$= |Q| - \mu^*(Q \setminus E)$$

$$\mu^*(E) = \mu_*(E) \iff |Q| = \mu^*(E) + \mu^*(Q \setminus E)$$

<u>Thm</u> (Caratheodory)

(i) $\mathcal{M} \overset{\text{def}}{=} \{\mu^*\text{-可测集}\}$ 是 X 上的 σ-代数

(ii) $\mu \overset{\text{def}}{=} \mu^*|_{\mathcal{M}}$ 是一个完备测度

(称 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 完备是指：任一 μ-零集的子集即可测)

<u>Pf</u>: <u>Step 1</u> $\mathcal{M}$ 是代数.

只需证：$\mathcal{M}$ 对有限并封闭. i.e.

$\forall\ E_1, E_2 \in \mathcal{M}$,

$$E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}.$$

i.e. $\forall A \subset X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)$$

LHS $\leq$ RHS 由次可加性立见

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c)$$

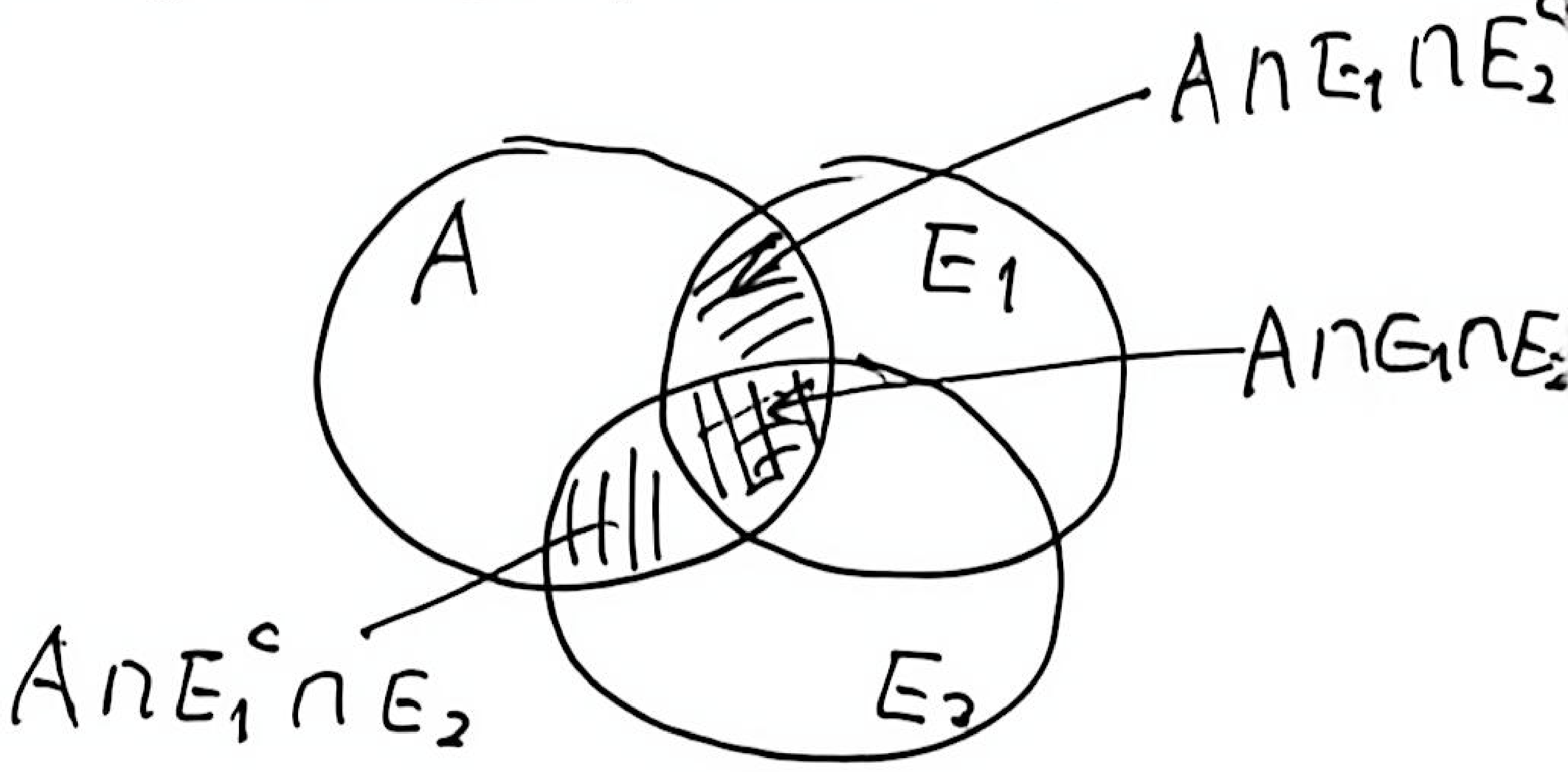
$$= \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2^c)$$

$$+ \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(\underbrace{A \cap E_1^c \cap E_2^c}_{A \cap (E_1 \cup E_2)^c})$$

$$\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2))$$

$$+ \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)$$

$\uparrow$ 次可加性



Step 2 $\quad \mu^*|_{\mathfrak{M}}$ 有限可加

設 $\begin{cases} E_1, E_2 \in \mathfrak{M} \\ E_1 \cap E_2 = \phi \end{cases}$

$$\mu^*(E_1 \sqcup E_2)$$

$$= \mu^*(\underbrace{(E_1 \sqcup E_2) \cap E_1}_{E_1}) + \mu^*(\underbrace{(E_1 \sqcup E_2) \cap E_1^c}_{E_2})$$

Step 3 $\mathcal{M}$ 是 σ-代数

设 $E_k \in \mathcal{M}$, $k = 1, 2, \cdots$

不妨设它们互不相交（否则 $\begin{cases} \tilde{E}_1 = E_1 \\ \tilde{E}_k = E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \end{cases}$ $k \geq 2$）

Claim $$\mu^*\left(A \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k)$$

$$\forall A \subset X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

（Note: 不能由 Step 2 得到. $\because A \cap E_k \notin \mathcal{M}$）

$n = 1$ 时平凡

假设对 $n = N$ 成立.

当 $n = N+1$ 时

$$\mu^*\left(A \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^{N+1} E_k\right)\right)$$

$$= \mu^*\Big(\underbrace{A \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^{N+1} E_k\right) \cap E_{N+1}}_{A \cap E_{N+1}}\Big) + \mu^*\Big(\underbrace{A \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^{N+1} E_k\right) \cap E_{N+1}^c}_{A \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^{N} E_k\right)}\Big)$$

$$= \mu^*(A \cap E_{N+1}) + \sum_{k=1}^{N} \mu^*(A \cap E_k)$$ （由归纳假设）

$$= \sum_{k=1}^{N+1} \mu^*(A \cap E_k)$$

現在，令

$$E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

$\forall A \subset X, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E^c)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*\Big(A \cap \big(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\big)^c\Big)$$

$$\overset{\text{by Claim}}{=} \mu^*\Big(A \cap \big(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\big)\Big) + \mu^*\Big(A \cap \big(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\big)^c\Big)$$

$$= \mu^*(A) \qquad \Big(\because \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M} \text{ by Step 1}\Big)$$

$$\overset{n \to \infty}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A) \qquad (\star)$$

$$\Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E^c)$$

$$\leq \mu^*(A)$$

$$\Longrightarrow \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

$$\Longrightarrow E \in \mathcal{M}.$$

Step 4 $\mu \overset{def}{=} \mu^*|_{\mathcal{M}}$ 可数可加

从而是测度.

设 $E_k \in \mathcal{M}$, $k=1,2,\cdots$ 互不相交

令 $E \overset{def}{=} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$

$$\overset{\text{Step 3}}{\Longrightarrow} \mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E^c)$$

$\forall A \subset X$.

取 $A = E$

$$\Longrightarrow \mu^*(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$$

Step 5 μ 完备

只需证: $\forall E$ with $m^*(E) = 0$

$$\Longrightarrow E \in \mathcal{M}.$$

$\forall A \subset X$.

$$\mu^*(A) \leq \underbrace{\mu^*(A \cap E)}_{=0} + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A$$

$$\Longrightarrow E \in \mathcal{M}.$$

Def 设 $\mathcal{A}$ 是 X 上的代数

如果 $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ s.t.

(i) $\mu_0(\phi) = 0$

(ii) $\forall A_k \in \mathcal{A}$, $k = 1.2 \cdots$ 互不相交 with $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$,

$$\mu_0\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k)$$

则称 μ_0 是 X 上的一个预测度 (premeasure).

Rmk: (ii) $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \text{单调性} \\ \text{有限可加性} \end{cases}$

Thm $\mathcal{A}$ —— X 上代数

$\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ 为预测度.

对 $E \subset X$, 令

$$\mu^*(E) \overset{\text{def}}{=} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k) : A_k \in \mathcal{A},\ k = 1, 2, \cdots \ E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}$$

则

(i) μ^* 是 X 上的外测度

(ii) $\mu^*\big|_{\mathcal{A}} = \mu_0$

(iii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \overset{\text{def}}{=} \{\mu^*\text{-可测集}\}$

(iv) $\mu \overset{\text{def}}{=} \mu^*\big|_{\mathcal{M}}$ 是测度

(v) 如果 ν 是 $\mathcal{M}$ 上的测度 with

$$\nu\big|_{\mathcal{A}} = \mu_0,$$

则 $\nu \leq \mu$

进而，如果 $\mu(E) < \infty$，则

$$\nu(E) = \mu(E).$$

Pf (i) 只需验证可数次可加性

设 $E_k \subset X$, $k = 1, 2, \cdots$, 不妨设

$$\mu^*(E_k) < +\infty, \quad \forall k$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall E_k$, $\exists A_j^{(k)} \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \cdots$

s.t.

$$\begin{cases} E_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^{(k)} \\ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j^{(k)}) < \mu^*(E_k) + \dfrac{\varepsilon}{2^k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \le \sum_{k,j} \mu_0(A_j^{(k)})$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) + \varepsilon$$

(ii) 设 $E \in \mathcal{A}$，则

$$\mu^*(E) \le \mu_0(E) \quad (\because \{E\} \text{ 是 } E \text{ 的覆盖})$$

另一方面，

$\forall A_k \in \mathcal{A}$，$k = 1, 2, \cdots$，with $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

令

$$\begin{cases} E_1 \stackrel{\text{def}}{=} E \cap A_1 \\ E_k \stackrel{\text{def}}{=} E \cap \left(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right), \quad k \ge 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow E_k \in \mathcal{A}$，$k = 1, 2, \cdots$ 互不相交

且

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k = E \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \mu_0(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k) \underset{\text{(单调性)}}{\le} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k)$$

$$\Rightarrow \quad \mu_0(E) \leqslant \mu^*(E)$$