第二十六讲 (2026.6.1)

Def 对集合列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset 2^X$

$$\limsup_{k\to\infty} A_k \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j \qquad (\text{上限集})$$

$$\liminf_{k\to\infty} A_k \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j \qquad (\text{下限集})$$

Rmk: $x \in \limsup\limits_{k\to\infty} A_k \iff \forall k,\ \exists j \geq k$ s.t. $x \in A_j$

$\iff x$ 属于无穷多个 A_k

Thm (Borel-Cantelli lemma)

$(X, \mathcal{M}, \mu)$

$\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$.

如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$, 则

$$\mu(\limsup_{k\to\infty} A_k) = 0$$

Pf $\bigcup\limits_{j=k}^{\infty} A_j \searrow \limsup\limits_{k\to\infty} A_k$

測度的連續性 $\Longrightarrow$ $\mu(\limsup_{k\to\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j)$

$$\le \lim_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) = 0$$

次可加性

$$\left(\because \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty\right)$$

Def $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

稱事件族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \mathcal{F}$ 相互独立是指：

$\forall\ n \ge 2,\ \forall$ 互不相同的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I$

$$P(A_{\alpha_1} \cap \cdots \cap A_{\alpha_n}) = P(A_{\alpha_1}) \cdots\cdots P(A_{\alpha_n})$$

Cor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ 相互独立．則

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty \Rightarrow P(\limsup_{k\to\infty} A_k) = 0$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty \Longrightarrow P(\limsup_{k\to\infty} A_k) = 1.$

Pf (1) 已证.

Note that

$$\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j^c = \liminf_{k\to\infty} A_k^c$$

因:

$$P\left(\liminf_{k\to\infty} A_k^c\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j^c\right)$$

$\Rightarrow$ 为证明 $P\left(\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right)^c\right) = 0$

只需证

$$P\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j^c\right) = 0, \quad \forall k$$

$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 相互独立 $\Rightarrow$ $\{A_k^c\}_{k=1}^{\infty}$ 相互独立.

(由 Jordan 公式 即容斥原理公式).

$$P\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j^c\right) = \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{j=k}^{N} A_j^c\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \prod_{j=k}^{N} P(A_j^c)$$

$p_j \overset{\text{def}}{=} P(A_j)$ $\longrightarrow$ $$= \lim_{N\to\infty} \prod_{j=k}^{N} (1-p_j)$$

$1-x \le e^{-x}$ $\longrightarrow$ $$\le \lim_{N\to\infty} \prod_{j=k}^{\infty} e^{-p_j}$$

$$= \lim_{N\to\infty} e^{-\sum_{j=k}^{N} p_j} = 0$$

Def $(X, \mathcal{M})$

如果函数 $f: X \to [-\infty, +\infty]$ s.t.

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\{f > a\} \in \mathcal{M}$

则称 f 是 $\mathcal{M}$-可测的.

Rmk: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

实值可测函数 $f: \Omega \to \mathbb{R}$ 称为随机变量.

Prop

f_n 可测, $n = 1, 2 \cdots \Longrightarrow \sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ 均可测

Cor 可测函数全体对极限运算封闭

Def $L^+(X) \overset{\text{def}}{=} \{X$ 上非负可测函数$\}$

Def 简单函数 $\overset{\text{def}}{=}$ 可测集示性函数的线性组合.

Thm $\forall f \in L^+(X)$，$\exists$ 非负简单函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使

s.t.

$$\varphi_k \nearrow f$$

Pf 对 $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$j = 0, 1, 2, \cdots, 2^{2k} - 1$$

$$E_{k,j} \overset{\text{def}}{=} \left\{ \frac{j}{2^k} < f \leq \frac{j+1}{2^k} \right\}$$

$$F_k \overset{\text{def}}{=} \{ f > 2^k \}$$

$$\varphi_k \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{2^{2k}-1} \frac{j}{2^k} \chi_{E_{k,j}} + 2^k \chi_{F_k}$$

Def $(X, \mathcal{M}, \mu)$

(i) 对非负简单函数 $\varphi = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}$

with E_k, $k = 1, 2, \cdots, N$. 可以 $\Rightarrow$ 不相交.

$$\int_X \varphi \, d\mu \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N} c_k \mu(E_k)$$

(ii) 对 $f \in L^+(X)$

$$\int_X f \, d\mu \overset{\text{def}}{=} \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \begin{array}{c} \varphi \text{ 简单} \\ 0 \leq \varphi \leq f \end{array} \right\}$$

称为 f 在 X 上关于 μ 的积分.

(iii) 对可测函数 $f: X \to [-\infty, +\infty]$, 如果 $\int_X f^+ d\mu$ 和 $\int_X f^- d\mu$ 中至少有一个有限,

则

$$\int_X f\, d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

如果 $\int_X f^+ d\mu$ 和 $\int_X f^- d\mu$ 均有限,

则称 f 在 X 上可积.

$$L^1(X, \mu) \overset{\text{def}}{=} \{ X \text{ 上可积函数} \}$$

(iv) 设 $E \in \mathcal{M}$. f 在 X 上可测

$$\int_E f\, d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X f \cdot \chi_E\, d\mu$$

Rmk: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

f —— 随机变量.

$\mathbb{E} f \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega f\, dP$ 称为 f 的期望.

Prop (线性)

$\forall f, g \in L^1(X, \mu)$. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu$$

Thm (MCT)

设 $L^+(X) \ni f_k \nearrow f$, 则

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

Thm (Fatou)

对 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^+(X)$

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k\, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu$$

Thm (DCT) $(X, \mathcal{M}, \mu)$

设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 可测, $f_k \to f$ μ-a.e.

如果 $\exists g \in L^1(X, \mu)$ s.t. $|f_k| \leq g$ μ-a.e

则

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

例：$(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$

其中 μ 是计数测度. i.e.

$$\mu(E) \overset{def}{=} \begin{cases} \# E, & \text{if } E \text{ 是有限集.} \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

对函数 $f: \mathbb{N} \to [0, +\infty)$

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

事实上，

$$f \cdot \chi_{\{k\}} = f(k) \chi_{\{k\}} \quad \text{简单}$$

$$\int_{\mathbb{N}} f \cdot \chi_{\{k\}} \, d\mu = f(k) \underbrace{\mu(\{k\})}_{=1} = f(k)$$

MCT $\Rightarrow$ 逐项积分

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f \cdot \chi_{\{k\}} \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

进一步有

$$f \in L^1(\mathbb{N}, \mu) \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| < +\infty$$

（绝对收敛级数）

例: $(X, 2^X, \delta_a)$ ⑨

$\forall f : X \to \mathbb{R}$.

$$\int_X f \, d\delta_a = f(a)$$

$$\int_X f \, d\delta_a = \int_{\{a\}} f \, d\delta_a + \int_{X \setminus \{a\}} f \, d\delta_a$$

$$= f(a) \, \delta_a(\{a\})$$

$$= f(a)$$