第二十五讲 (2026.5.27)

Q: C^1曲线的弧长公式

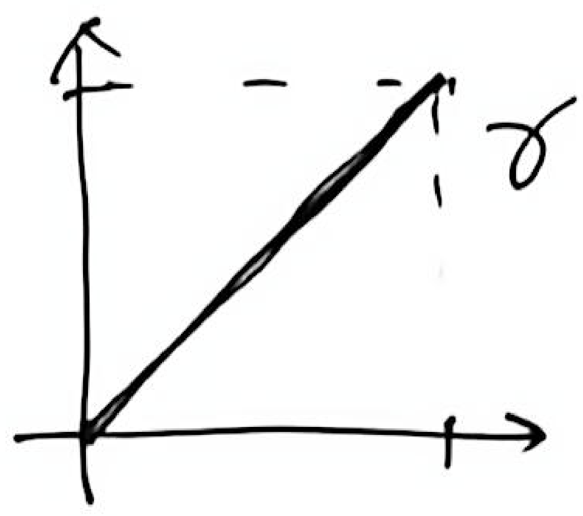
$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

对一般可求长曲线是否成立？

反例: $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto (F(t), F(t))$$

其中 F 是 C-L 函数.



(i) $F \in C[0,1]$

(ii) $F \nearrow$

(iii) F 是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的满射

$\Rightarrow$ $L(\gamma) = \sqrt{2}$

而 $\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = 0.$

Def 设 $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

如果 $x, y \in AC[a,b]$, 则称 γ 是 AC 曲线

Thm γ 是 AC 曲线，则

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Pf 令

$$f(t) \overset{\text{def}}{=} x(t) + i\, y(t), \quad t \in [a,b]$$

$$\gamma \text{ 可求长} \iff f \in BV[a,b] \text{ 且 } L(\gamma) = V_a^b(f)$$

只需证明

Claim $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)|\,dt$ (Ex. 16).

Step 1 LHS $\le$ RHS

对 $[a,b]$ 的任一划分 P

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| &\overset{N-L}{=} \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f'(t)\,dt \right| \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f'(t)|\,dt \\
&= \int_a^b |f'(t)|\,dt
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad V_a^b(f) \le \int_a^b |f'(t)|\,dt$$

Step 2 $\quad$ LHS $\geq$ RHS

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 阶梯函数 ψ s.t.

$$\|f' - \psi\|_1 < \varepsilon$$

令

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^x \psi(t)\,dt$$

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^x [f'(t) - \psi(t)]\,dt$$

$$\overset{N-L}{\Longrightarrow} \quad f = g + h + f(a)$$

$\forall P$

$$\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |h(t_k) - h(t_{k-1})|$$

$$\Longrightarrow \quad V_a^b(g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(h)$$

$$\Longrightarrow \quad V_a^b(f) \geq V_a^b(g) - V_a^b(h) \qquad (*)$$

而由 LDT.

$$h' = f' - \psi \quad \text{a.e.}$$

$$\overset{\text{Step 1}}{\Longrightarrow} \quad V_a^b(h) \leq \int_a^b |h'(t)|\,dt = \|f' - \psi\|_1 < \varepsilon$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad V_a^b(f) \geq V_a^b(g) - \varepsilon$$

现在令
$$\psi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{[t_{k-1}, t_k)}$$

$$\Rightarrow \quad V_a^b(g) \geq \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi(t)\,dt \right|}_{= |c_k (t_k - t_{k-1})|}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\psi(t)|\,dt$$

$$= \int_a^b |\psi(t)|\,dt$$

$$= \|\psi\|_1 \geq \|f'\|_1 - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad V_a^b(f) \geq \|f'\|_1 - 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad V_a^b(f) \geq \|f'\|_1$$

抽象测度论与积分论.

$$X \neq \emptyset$$

$$2^X \overset{\text{def}}{=} \{ X \text{ 的子集} \}$$

Def 如果 $\mathscr{A} \subset 2^X$ s.t.

(i) $\emptyset, X \in \mathscr{A}$

(ii) $E \in \mathscr{A} \Rightarrow E^c \in \mathscr{A}$

(iii) $E_1, E_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$

则称之为 X 上的一个代数.

Def 如果 $\mathcal{M} \subset 2^X$ s.t.

(i) $\phi, X \in \mathcal{M}$

(ii) $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$

(iii) $E_k \in \mathcal{M}, k=1,2\cdots \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$

则称之为 X 上的一个 σ-代数.

$(X, \mathcal{M})$ 称可测空间

$\mathcal{M}$ 的元素称为可测集 ($\mathcal{M}$-可测集)

例: $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$

$\{\phi, X\}$. 2^X

Def $(X, \mathcal{M})$ —— 可测空间

如果集函数 $\mu: \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ s.t.

(i) $\mu(\phi) = 0$

(ii) (可数可加性) $\forall E_k \in \mathcal{M}, k=1,2\cdots$ 互不相交

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

则称 μ 是 $(X, \mathfrak{M})$ 上的一个测度.

$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 称为一个测度空间.

如果 $\mu(X) < +\infty$, 则称 μ 是有限测度.

例. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, m)$

例: Dirac 测度

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1 & \text{if } E \ni a \\ 0. & \text{otherwise}. \end{cases}$$

称为质量集中于 a 的 Dirac 测度.

例: 计数测度

$$\mu(E) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \# E & \text{if } E \text{ 是有限集.} \\ +\infty & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Def $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ —— 测度空间

如果 $P(\Omega) = 1$, 则称 P 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 称为概率空间.

Ω 称为样本空间.

$A \in \mathcal{F}$ (即可测集) 称为事件

$P(A)$ 称为 A 的概率

Thm 设 μ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的测度.

(i)（单调性） 对 $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$.

$$E_1 \subset E_2 \implies \mu(E_1) \le \mu(E_2)$$

(ii)（次可加性）

$$E_k \in \mathcal{M},\ k = 1, 2, \ldots \implies \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

(iii)（连续性）

（向上的） $\mathcal{M} \ni E_k \nearrow E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

$$\implies \mu(E) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$$

（向下的） $\left.\begin{array}{l} \mathcal{M} \ni E_k \searrow E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \\ \mu(E_1) < +\infty \end{array}\right\}$

$$\implies \mu(E) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$$

Pf (ii) 令

$$\begin{cases} \tilde{E}_1 = E_1 \\ \tilde{E}_k \overset{\text{def}}{=} E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j, & k \ge 2 \end{cases}$$

$$\implies \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k$$

$$\implies \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{E}_k)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

单调性

(iii) 先证明向上的连续性.

令 $$\begin{cases} \tilde{E}_1 \overset{def}{=} E_1 \\ \tilde{E}_k \overset{def}{=} E_k \setminus \underbrace{\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j}_{= E_{k-1}} = E_k \setminus E_{k-1}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k$$

$$\Rightarrow \quad \mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{E}_k) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(\tilde{E}_k) = \lim_{N\to\infty} \mu(E_N)$$

Def $(X, \mathfrak{M}, \mu)$

如果 $E \in \mathfrak{M}$ s.t.

$$\mu(E) = 0$$

则称之为 μ-零集

例: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 是 δ_0-零集.

Def 如果一个性质对除某个 μ-零集外的所有 $x \in X$ 都成立, 则称它几乎处处成立

记为 μ-a.e.