第二十三讲 (2026.5.20) ①

Thm (单调函数微分定理)

如果 f 在 $[a,b]$ 上单调增，则

(i) f a.e. 可微

(ii) $f' \in L^1[a,b]$

(iii) $\int_a^b f'(x)\,dx \leq f(b)-f(a)$.

Lem (Vitali 覆盖引理)

设 $E \subset \mathbb{R}$, $m_*(E) < \infty$

$\Gamma = \{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 E 的 Vitali 覆盖.

则: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists I_1, \cdots, I_N \in \Gamma$ 互不相交, s.t.

$$m_*\left(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^N I_k\right) < \varepsilon$$

这里 Vitali 覆盖是指: $\forall x \in E$, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists I \in \Gamma$ s.t.

$$\begin{cases} x \in I \\ |I| < \varepsilon \end{cases}$$

Def 设 f 在 x 附近有定义

$$D^+f(x) \overset{\text{def}}{=} \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (右上 Dini 导数

$$D_+f(x) \overset{\text{def}}{=} \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (右下 Dini 导数

$$D^-f(x) \overset{\text{def}}{=} \limsup_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (左上 ‐‐

$$D_-f(x) \overset{\text{def}}{=} \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (左下 ‐‐‐

Rmk: $D^+f(x) \geq D_+f(x)$

$D^-f(x) \geq D_-f(x)$

Pf of Thm

Step 1 对 a.e. $x\in(a,b)$, f 在 x 处的四个 Dini 导数相等.

令

$$E_1 \overset{\text{def}}{=} \{x\in(a,b) : D^+f(x) > D_-f(x)\}$$

$$E_2 \overset{\text{def}}{=} \{x\in(a,b) : D^-f(x) > D_+f(x)\}$$

故只需证:

$$m(E_1) = m(E_2) = 0.$$

$$E_1 = \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}} A_{r,s}$$

其中

$$A_{r,s} \overset{\text{def}}{=} \{x\in(a,b):\ D^+f(x) > r > s > D_-f(x)\}$$

$\Longrightarrow$ 进一步的化为证明:

$$m_*(A_{r,s}) = 0 \ ,\quad \forall r,s\in\mathbb{Q}.$$

以下 $A_{r,s}$ 简记为 A.

假设 $m_*(A) > 0$.

$\Longrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists G \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$ s.t.

$$\begin{cases} A\subset G \\ m(G) < (1+\varepsilon)\, m_*(A) \end{cases}$$

设 $x\in A$.

$\Longrightarrow D_-f(x) < s$

$\Longrightarrow \exists h_x^{(n)} \to 0^+$ s.t.

$$\frac{f(x-h_x^{(n)}) - f(x)}{-h_x^{(n)}} < s \ ,\quad n=1,2,\cdots$$

$$\Longrightarrow f(x) - f(x-h_x^{(n)}) < s\cdot h_x^{(n)} \ ,\quad n=1,2,\cdots$$

不妨设

$$[x-h_x^{(n)}, x] \subset G, \quad \forall n$$

($\because$ x 是 G 的内点)

$\Rightarrow$ $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \left\{ [x-h_x^{(n)}, x] \right\}_{x\in A,\, n\in\mathbb{N}}$

是 A 的 Vitali 覆盖

$\overset{\text{Lem}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ $[x_1-h_1, x_1], \cdots, [x_N-h_N, x_N] \in \Gamma$

互不相交 s.t.

$$m_*\left(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} [x_k-h_k, x_k]\right) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$

$$m_*\left(A \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^{N} [x_k-h_k, x_k]\right)\right) > m_*(A) - \varepsilon \quad (\star)$$

以

$$\sum_{k=1}^{N} h_k \le m(G) < (1+\varepsilon)\, m_*(A)$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{N} [f(x_k) - f(x_k-h_k)]$$

$$< s \sum_{k=1}^{N} h_k$$

$$< s\,(1+\varepsilon)\, m_*(A).$$

令 $B \overset{\text{def}}{=} A \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^{N} (x_k - h_k, x_k) \right)$

这里改为开区间
与(☆)中相比较

设 $y \in B$

$\Longrightarrow \quad D^+ f(y) > r$

$\overset{\text{同上}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, l_y^{(m)} \to 0^+ \quad$ s.t.

$$f(y + l_y^{(m)}) - f(y) > r\, l_y^{(m)}, \quad m = 1, 2, \cdots$$

取 $l_y^{(m)}$ 充分小 s.t.

$$[y, y + l_y^{(m)}] \subset (x_k - h_k, x_k)$$

for some $k \in \{1, \cdots, N\}$

($\because$ y 是 $\bigsqcup_{k=1}^{N} (x_k - h_k, x_k)$ 的内点)

$$\Gamma' \overset{\text{def}}{=} \left\{ [y, y + l_y^{(m)}] \right\}_{y \in B,\, m \in \mathbb{N}}$$

是 B 的 Vitali 覆盖

$\overset{\text{Lem}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, [y_1, y_1 + l_1], \cdots, [y_J, y_J + l_J] \in \Gamma'$

互不相交 s.t.

$$m_*\left(B \setminus \left(\bigsqcup_{j=1}^{J} [y_j, y_j + l_j] \right)\right) < \varepsilon$$

⑥

$$\Longrightarrow \quad m_*\Big(B \cap \big(\bigsqcup_{j=1}^{J} [y_j, y_j + l_j]\big)\Big) > m_*(B) - \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{J} [f(y_j + l_j) - f(y_j)]$$

$$> r \sum_{j=1}^{J} l_j$$

$$> r\,(m_*(B) - \varepsilon)$$

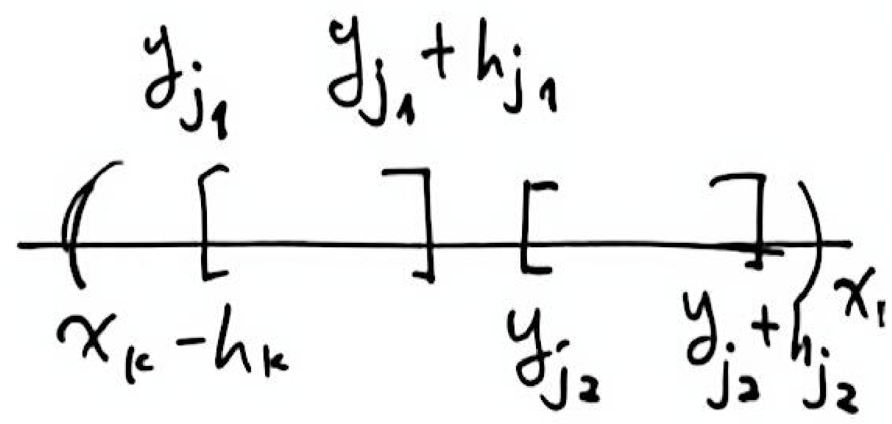
$$> r\,(m_*(A) - 2\varepsilon) \qquad (\text{by } (\star))$$

由 f 单调增，则

$$[y_j, y_j + l_j] \subset (x_k - h_k, x_k)$$

则 互不相交. for some $k \in \{1, \cdots, N\}$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{J} [f(y_j + l_j) - f(y_j)]$$



$$\le \sum_{k=1}^{N} [f(x_k) - f(x_k - h_k)]$$

$$< s\,(1 + \varepsilon)\, m_*(A)$$

$$\Longrightarrow \quad r\,(m_*(A) - 2\varepsilon) < s\,(1 + \varepsilon)\, m_*(A)$$

$$\xRightarrow{\varepsilon \to 0^+} \quad r\, m_*(A) \le s\, m_*(A)$$

$$\xRightarrow{r > s} \quad m_*(A) = 0$$

Note: 此时尚未证明 f a.e. 可微.

$f'(x)$ 可能为 $+\infty$

Step 2 $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,dx \le f(b) - f(a)$

令

$$g_n(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \quad x \in [a,b]$$

这里，为保证 $f(x+\frac{1}{n})$ 有定义，延拓 f

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(a), & x \in (-\infty, a) \\ f(x), & x \in [a, b] \\ f(b), & x \in (b, +\infty) \end{cases}$$

f 单调增 $\Longrightarrow g_n \ge 0$

By step1, $g_n \to f'$ a.e.

Fatou

$$\Longrightarrow \int_a^b f'(x)\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx$$

$$= \liminf_{n\to\infty} n \int_a^b \left[f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x) \right] dx$$

$$= \liminf_{n\to\infty} n \left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right]$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \Big[\underbrace{n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx}_{= f(b)} - \underbrace{n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx}_{\ge f(a)}$$

$\leq f(b) - f(a)$

$\Rightarrow f' \in L^1[a,b]$

$\Rightarrow f'$ a.e. 有限

$\Rightarrow f$ a.e. 可微.

Cor. $f \in BV[a,b] \Rightarrow \begin{cases} f \text{ a.e. 可微} \\ f' \in L^1[a,b] \end{cases}$

Q: $\left.\begin{array}{l} f \text{ 单调增} \\ f \in C[a,b] \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

A: No!

回忆 Cantor 三分集的构造

$I_{k,1} \overset{def}{=} \left(\frac{1}{3^k}, \frac{2}{3^k}\right), \cdots, I_{k,2^{k-1}} \overset{def}{=} \left(\frac{3^k-2}{3^k}, \frac{3^k-1}{3^k}\right)$

$k = 1, 2, \cdots$

$G \overset{def}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} I_{k,j}$

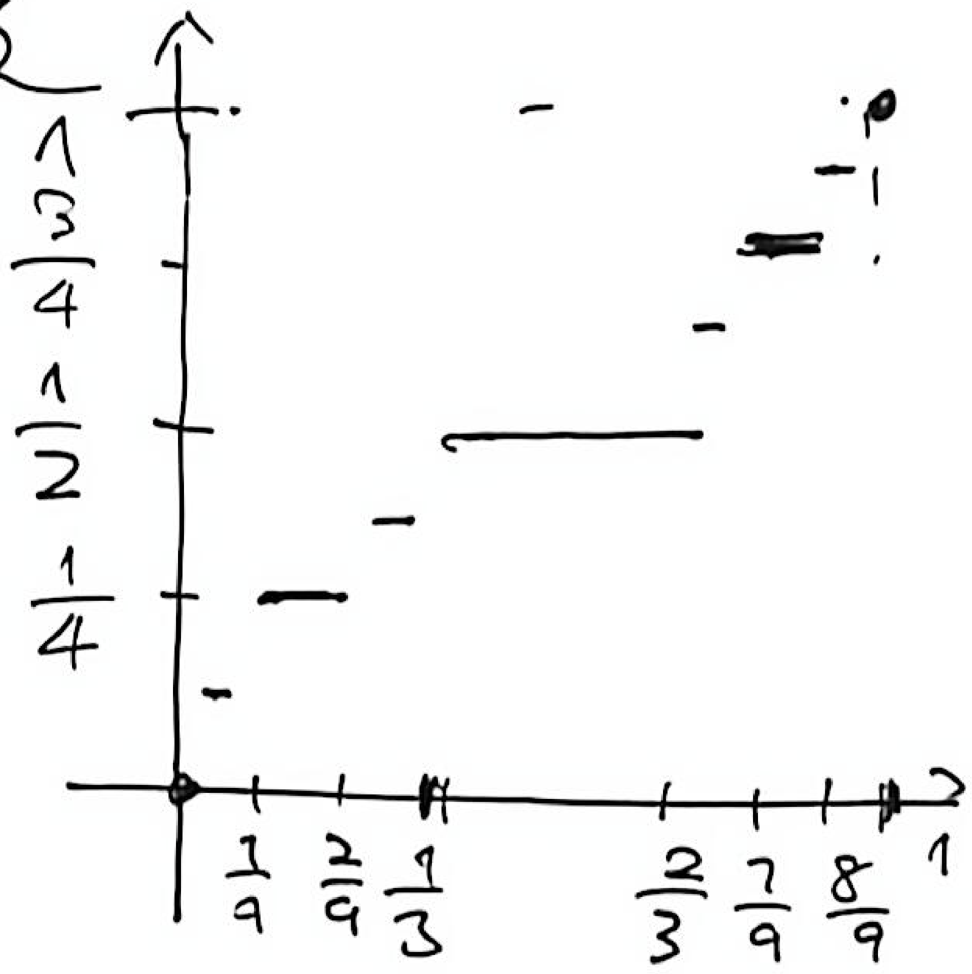
称为 Cantor 开集.

$C \overset{def}{=} [0,1] \setminus G$ 称 Cantor 三分集

$$g \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \frac{2j-1}{2^k} \cdot \chi_{I_{k,j}}$$

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sup\limits_{t \in [0,x) \cap G} g(t), & x \in (0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

称为 Cantor-Lebesgue 函数



g 的图像

Claim 1 $\quad f$ 单调增

(HW)

Claim 2 $\quad f(G) \overset{\text{dense}}{\subset} [0,1]$

In fact

$$f(G) = \left\{ \frac{2j-1}{2^k} : j = 1, \cdots, 2^{k-1},\ k = 1, 2 \cdots \right\} \cup \{0, 1\}$$

Claim 3 $\quad f \in C[0,1]$

否则，由于单调函数只有跳跃间断点。

与 Claim 2 矛盾

Claim 4. $\quad f' = 0 \quad$ a.e.

$\forall x \in G, \quad \exists I_{k,j} \ni x$

$$f \equiv \frac{2j-1}{2^k} \quad \text{on} \quad I_{k,j}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = 0$$

于是

$$0 = \int_0^1 f'(x)\,dx < f(1) - f(0) = 1.$$

Def 对函数 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

如果 $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$, s.t.

对 $[a,b]$ 中任意有限多个互不相交

的开区间 $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N$，只要

$$\sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta$$

就有

$$\sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上绝对连续

HW: Ex. 13.