第二十二讲 (2026.5.18) ①

回忆: 对 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 和划分 P

$$V(f,P)\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{N}|f(t_k)-f(t_{k-1})|$$

如果

$$V_a^b(f)\overset{\text{def}}{=}\sup_P V(f,P)<+\infty$$

则称 $f\in BV[a,b]$

Prop 设 $f\in BV[a,b]$

(i) $\forall x\in[a,b]$

$$V_a^b(f)=V_a^x(f)+V_x^b(f)$$

(ii) $x\longmapsto V_a^x(f)$ 单调增

Pf (i) Step 1 LHS $\le$ RHS

约定: $V_a^a(f)=0$

$\Rightarrow$ 不妨设 $x\in(a,b)$

设 $P=\{t_0,t_1,\cdots,t_N\}$ 是 $[a,b]$ 的划分

Case 1 $\quad x \in P$

i.e. $\quad x = t_j$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{j}}_{\leq V_a^x(f)} + \underbrace{\sum_{k=j+1}^{N}}_{\leq V_x^b(f)} \leq V_a^x(f) + V_x^b(f)$$

Case 2 $\quad x \notin P$

$\exists\, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, s.t.

$$t_{j-1} < x < t_j$$

$$\Rightarrow \quad |f(t_j) - f(t_{j-1})|$$

$$\leq |f(t_j) - f(x)| + |f(x) - f(t_{j-1})|$$

$\Rightarrow$

$$V(f, P) \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} + |f(t_j) - f(x)|}_{\leq V_a^x(f)} + \underbrace{|f(x) - f(t_{j-1})| + \sum_{k=j+1}^{N}}_{\leq V_x^b(f)}$$

$$\Rightarrow \quad V_a^b(f) \leq V_a^x(f) + V_x^b(f)$$

Step 2 LHS $\geq$ RHS

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_1: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N_1} = x$

s.t.

$$\sum_{k=1}^{N_1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| > V_a^x(f) - \varepsilon/2$$

$\exists P_2: x = s_0 < s_1 < \cdots < s_{N_2} = b$ s.t.

$$\sum_{j=1}^{N_2} |f(s_j) - f(s_{j-1})| > V_x^b(f) - \varepsilon/2$$

$\Rightarrow$ $P \stackrel{\text{def}}{=} P_1 \cup P_2$ 是 $[a,b]$ 的划分, s.t

$$V(f, P) > V_a^x(f) + V_x^b(f) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad V_a^b(f) \geq V_a^x(f) + V_x^b(f) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad V_a^b(f) \geq V_a^x(f) + V_x^b(f)$$

(ii) 设 $x_1 < x_2$

$$V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) = V_{x_1}^{x_2}(f) \geq 0$$

Thm (Jordan 分解)

任一实值有界变差函数均可表为两个有界单调增函数之差

Pf 对 $f \in BV[a,b]$

令 $g(x) \overset{def}{=} V_a^x(f)$

$h(x) \overset{def}{=} V_a^x(f) - f(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} g \nearrow \\ f = g - h \end{cases}$$

Claim $h \nearrow$

设 $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow h(x_2) - h(x_1) = \underbrace{V_{x_1}^{x_2}(f)}_{\geq |f(x_2) - f(x_1)|} - [f(x_2) - f(x_1)]$$

从而问题转化为

Q: 单调函数 a.e. 可微?

Thm 如果 f 在 $[a,b]$ 上单调增，则

(i) f a.e. 可微

(ii) $f' \in L^1[a,b]$

(iii) $\int_a^b f'(t)\,dt \leq f(b) - f(a)$

Def 设 $E \subset \mathbb{R}$，如果一族闭区间 ⑤

$\Gamma \overset{def}{=} \{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ s.t.

$$\forall x \in E, \quad \inf\{|I| : I \in \Gamma, x \in I\} = 0$$

则称 Γ 是 E 的一个 Vitali 覆盖.

Rmk: Γ 是 E 的 Vitali 覆盖

$\Longleftrightarrow \forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists I \in \Gamma$ s.t.

$$\begin{cases} x \in I \\ |I| < \varepsilon \end{cases}$$

Thm (Vitali 覆盖引理)

设 $E \subset \mathbb{R}$ with $m_*(E) < +\infty$.

Γ 是 E 的一个 Vitali 覆盖.

则: $\forall \varepsilon > 0, \exists I_1, \cdots, I_N \in \Gamma$ 互不相交

s.t.

$$m_*\left(E \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^{N} I_k\right)\right) < \varepsilon$$

Rmk: 回忆之前一个 Simple covering lemma:

$\forall \mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_N\}$, $\exists B_{k_1}, \cdots, B_{k_p} \in \mathcal{B}$ 互不相交

s.t.

$$\sum_{j=1}^{p} m(B_{k_j}) \geq \frac{1}{3^n} m\left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k\right).$$

Pf $\quad m_*(E) < \infty \Rightarrow \exists\, G \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$ s.t.

$$\begin{cases} m(G) < \infty \\ E \subset G \end{cases}$$

不妨设：

$\forall I \in \Gamma, \quad I \subset G \qquad (\because \text{Vitali})$

$$\Rightarrow \quad \delta_0 \overset{\text{def}}{=} \sup\{|I| : I \in \Gamma\} \leqslant m(G)$$

取 $I_1 \in \Gamma$ s.t.

$$\begin{cases} \cancel{I_1 \cap E \neq \phi} \\ |I_1| > \dfrac{\delta_0}{2} \end{cases}$$

(Note: $\#\Gamma = +\infty \Rightarrow$ 可能取不到最大的，但由 δ_0 的定义，以上总可以做到)

如果 $E \subset I_1$，则停下。 (Stopping-time argument)

否则，令

$$\delta_1 \overset{\text{def}}{=} \sup\{|I| : I \in \Gamma,\ I \cap I_1 = \phi\}$$

$\Rightarrow \quad \delta_1 > 0$

(HW)

取 $I_2 \in \Gamma$, s.t.

$$\begin{cases} \cancel{I_2 \cap E \neq \phi} \\ I_2 \cap I_1 = \phi \\ |I_2| > \frac{\delta_1}{2} \end{cases}$$

如果 $E \subset I_1 \sqcup I_2$，则停下

否则继续

⋮

如果 $E \subset \bigsqcup_{j=1}^{k} I_j$ 则停下.

否则令

$$\delta_k \stackrel{def}{=} \sup\left\{ |I| : I \in \Gamma, \ I \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^{k} I_j\right) = \phi \right.$$

取 $I_{k+1} \in \Gamma$ s.t.

$$\begin{cases} \cancel{I_{k+1} \cap E \neq \phi} \\ I_{k+1} \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^{k} I_j\right) = \phi \\ |I_{k+1}| > \frac{\delta_k}{2} \end{cases}$$

⋮

8

如果有限步后停下（停止条件：$E \subset \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k$）

则满足条件.

$$\left(\because \quad E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k = \phi\right)$$

否则得到一列互不相交的 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Gamma$

s.t.

$$|I_k| > \frac{\delta_{k-1}}{2}, \qquad k=1,2,\cdots$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq m(G) < +\infty$$

$\Longrightarrow \quad \exists N$ s.t.

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |I_k| < \frac{\varepsilon}{5}$$

令

$$A \overset{\text{def}}{=} E \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^{N} I_k\right)$$

<u>Claim</u> $\quad m_*(A) < \varepsilon$

对 $x \in A$,

$$r_x \overset{\text{def}}{=} \operatorname{dist}\Big(x, \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{N} I_k}_{\text{紧}}\Big) > 0$$

Γ 是 Vitali

$\Longrightarrow \quad \exists I \in \Gamma$ s.t.

$$\begin{cases} x \in I \\ |I| < r_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad I \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^{N} I_k \right) = \phi$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{|I| < \delta_N}_{\text{由 } \delta_N \text{ 的定义}} \underbrace{< 2|I_{N+1}|}_{\text{由 } I_{N+1} \text{ 的取法}}$$

$|I_k| \to 0 \quad \Rightarrow \quad \exists k \quad s.t. \quad I_k \cap I \neq \phi$

[否则 由 δ_k 的定义，$|I| < \delta_k$，$\forall k \in \mathbb{N}$
而 $\delta_k < 2|I_{k+1}| \to 0$，矛盾]

令

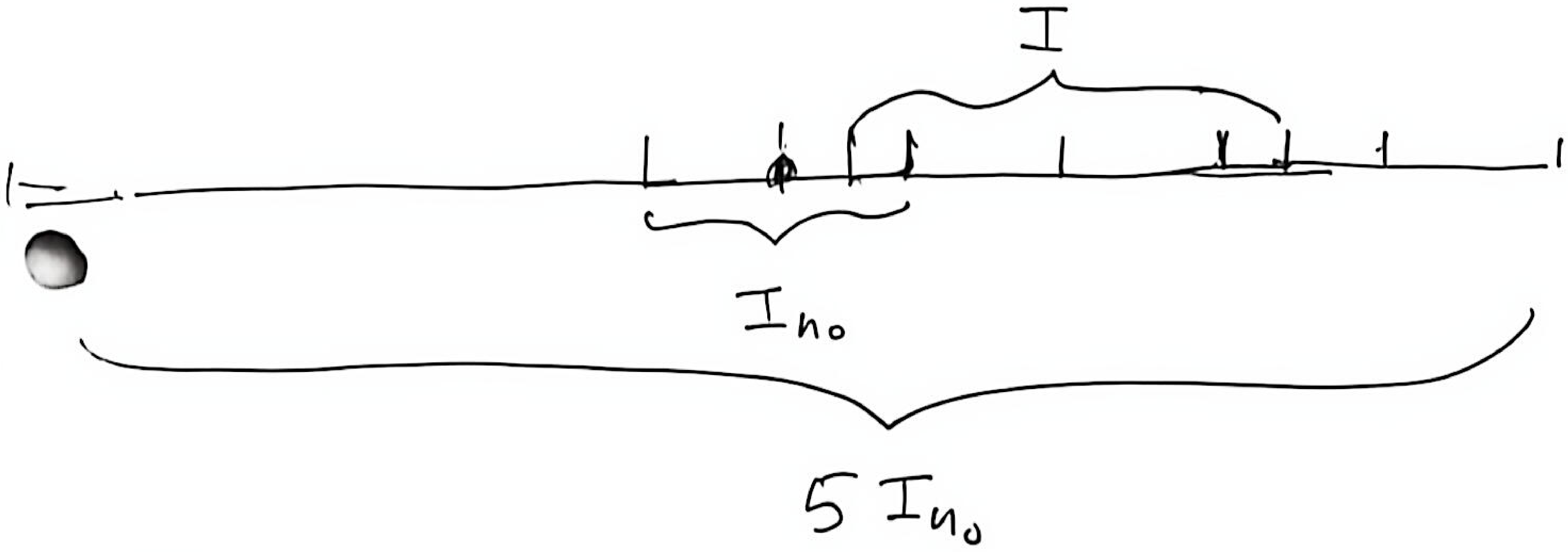
$$n_0 \overset{def}{=} \min\{k : I_k \cap I \neq \phi\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_0 > N & (\text{由上}) \\ \underbrace{|I| < \delta_{n_0-1}} < 2|I_{n_0}| \end{cases}$$

(n_0 是使 $I_k \cap I \neq \phi$ 的最小的 k
故 $I_{n_0-1} \cap I = \phi$)

$I_{n_0} \cap I \neq \phi \quad \Rightarrow \quad I \subset 5I_{n_0}$

这里 $5I_{n_0}$ 是与 I_{n_0} 同心，但长度为其 5 倍的闭区间



如前引理
$$\Longrightarrow \quad x \in 5 I_{n_0} \qquad (\text{即 } \forall x \in A,\ \exists\, n_0 > k \text{ s.t. } x \in 5 I_{n_0})$$

x 的任意性
$$\Longrightarrow \quad A \subset \bigsqcup_{k=N+1}^{\infty} 5 I_k$$

$$\Longrightarrow \quad m_*(A) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |5 I_k| < \varepsilon$$