第二十一讲 (2026.5.13)

Def 如果可测函数族 $\{K_t\}_{t>0}$ s.t.

(A1) $\int K_t \, dm = 1$

(A2) $\exists\, C_1 > 0$ s.t.

$$|K_t(x)| \leq \frac{C_1}{t^n}, \quad \forall\, t \in (0,1)$$

(A3) $\exists\, C_2 > 0$ s.t.

$$|K_t(x)| \leq \frac{C_2 t}{|x|^{n+1}}, \quad \forall\, t > 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

则称之为 A.I.

例: Poisson 核, 热核, Féjer 核

Thm 设 $\{K_t\}_{t>0}$ 是 A.I., 则 $\forall f \in L^1$

$$f * K_t \to f \quad \text{a.e.} \quad \text{as} \quad t \to 0^+$$

Thm 设 $\{K_t\}_{t>0}$ 是 A.I., 则 $\forall f \in L^1$

$$\| f * K_t - f \|_1 \to 0 \quad \text{as} \quad t \to 0^+$$

Lem（积分的平均连续性，见第十五讲） ②

$\forall f \in L^1$

$$\| \tau_h f - f \|_1 \to 0 \quad \text{as} \quad h \to 0$$

其中

$$(\tau_h f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x-h)$$

Pf of Thm

$$\| K_t \|_1 = \left(\int_{|y| \leq t} + \int_{|y|>t} \right) | K_t(y) | \, dy$$

$$\leq \int_{|y|\leq t} \frac{C_1}{t^n} \, dy + \underbrace{\int_{|y|>t} \frac{C_2 t}{|y|^{n+1}} \, dy}_{\stackrel{y=tx}{=} \int_{|x|>1} \frac{C_2 t \cdot t^n}{t^{n+1} |x|^{n+1}} \, dx}$$

$$\leq C$$

$$\int_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k < |x| \leq 2^{k+1}} \frac{dx}{|x|^{n+1}}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{n+1}} \int_{|x| \leq 2^{k+1}} dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(n+1)}} v_n \cdot (2^{k+1})^n = 2^n v_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$\| f * K_t - f \|_1$$

$$= \int \left| \int [f(x-y) - f(x)] K_t(y)\, dy \right| dx$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{\leq} \int \left[\int |f(x-y) - f(x)|\, dx \right] |K_t(y)|\, dy$$

$$= \int \| \tau_y f - f \|_1 \, |K_t(y)|\, dy$$

由积分的平均连续性,

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ s.t.$

$$\| \tau_y f - f \|_1 < \varepsilon, \quad \forall y \in B_\delta(0)$$

$$\Rightarrow \| f * K_t - f \|_1$$

$$\leq \underbrace{\int_{|y|<\delta} \| \tau_y f - f \|_1 \, |K_t(y)|\, dy}_{< C\varepsilon}$$

$$+ \underbrace{\int_{|y|\geq\delta} \| \tau_y f - f \|_1 \, |K_t(y)|\, dy}_{\leq 2\|f\|_1 \underbrace{\int_{|y|\geq\delta} |K_t(y)|\, dy}_{\leq \int_{|y|\geq\delta} \frac{C_2 t}{|y|^{n+1}} dy}}$$

$< \varepsilon$

(当 t 充分小)

$< (C+1)\varepsilon$

(当 t 充分小)

<u>Def</u> $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \overset{def}{=} \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : supp(f) \overset{cpt}{\subset} \mathbb{R}^n \}$

$= \{$紧支光滑函数$\}$

<u>Thm</u> $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \overset{dense}{\subset} L^1$

<u>Pf</u> 令

$$\psi(x) \overset{def}{=} \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-|x|^2}}, & \text{if } |x|<1 \\ 0, & \text{if } |x|\geq 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\ supp(\psi) \subset \overline{B_1(0)} \\ 0 \leq \psi \leq 1 \end{cases}$$

令 $K(x) \overset{def}{=} \dfrac{\psi(x)}{\|\psi\|_1}$

$K_t(x) \overset{def}{=} t^{-n}\psi(t^{-1}x)$

<u>Claim</u> $\{K_t\}_{t>0}$ 是 A.I.

$$\int K_t \, dm = 1 \quad \text{平凡}$$

$$|K_t(x)| \leq \frac{C_1}{t^n} \quad \text{with} \quad C_1 = \frac{1}{\|\psi\|_1}$$

$$\operatorname{supp}(K_t) \subset \overline{B_t(0)}$$

$\Rightarrow$ 当 $|x| > t$ 时 $|K_t(x)| = 0$

而 当 $|x| \leq t$ 时

$$|K_t(x)| \leq \frac{C_1}{t^n} = \frac{C_1 t}{t^{n+1}} \leq \frac{C_1 t}{|x|^{n+1}}$$

$\forall f \in L^1$, $\forall \varepsilon > 0$. $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ s.t.

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon/2$$

$$\operatorname{supp}(g * K_t) \subset \operatorname{supp}(g) + \operatorname{supp}(K_t) \overset{\text{cpt}}{\subset} \mathbb{R}^n$$

$g * K_t \in C^\infty$

$\Rightarrow g * K_t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\{K_t\}_{t>0}$ 是 A.I.

$\Rightarrow$ 当 t 充分小

$$\|g * K_t - g\|_1 < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \quad \| f - g * K_t \|_1$$

$$\leq \| f - g \|_1 + \| g - g * K_t \|_1 < \varepsilon$$

（当 t 充分小）

Q：N–L 成立的充要条件？

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F \quad \text{a.e. 可微} \\ F' \in L^1[a,b] \\ \underbrace{F \text{ 连续}} \end{cases}$$

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \int_{[x,x+h]} |F'(t)|\,dt$$

$$\to 0 \quad \text{as } h \to 0$$

（由积分的绝对连续性）

Q：何种函数 a.e. 可微？

Def 设 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 连续.

平面曲线 $t \mapsto (x(t), y(t)) = \gamma(t)$

如果 $\exists M > 0$ s.t. 对 $[a,b]$ 的任一划分 P

$$\sum_{k=1}^{N} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M$$

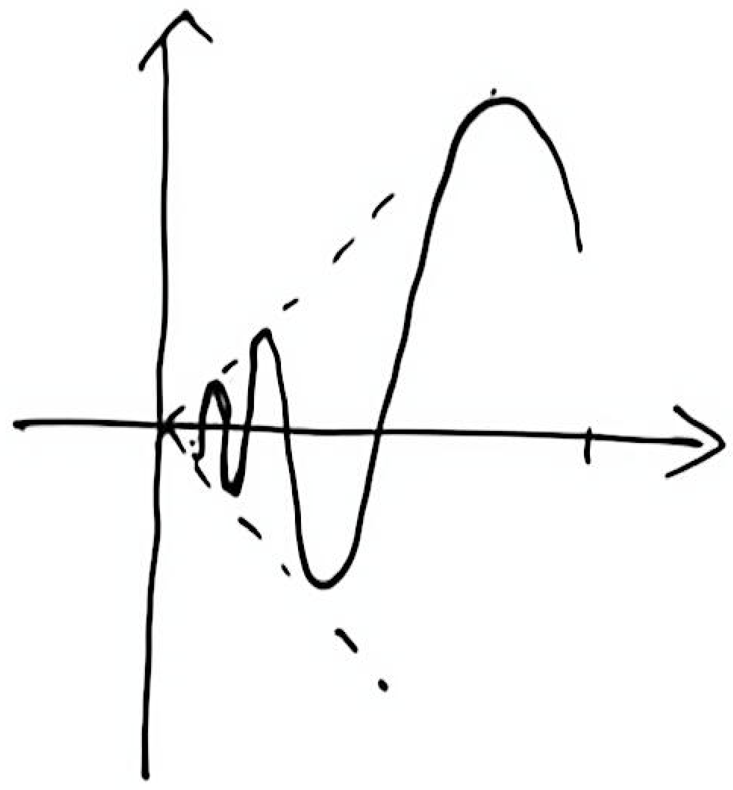
则称γ可求长，并定义

$$L(\gamma) \overset{def}{=} \sup_{P} \sum_{k=1}^{N} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$$

称为γ的弧长

例：C^1曲线可求长

例：（不可求长曲线）



$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (t, f(t))$$

$$f(t) = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t}, & t \in (0,1] \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Def 对 $f:[a,b] \to \mathbb{C}$ 和 $[a,b]$ 的划分 P

$$V(f,P) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

如果

$$\sup_{P} V(f,P) < +\infty$$

则称 f 是有界变差的

$$V_a^b(f) \overset{def}{=} \sup_{P} V(f,P)$$

称为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差.

- $BV[a,b] \overset{\text{def}}{=} \{ f:[a,b]\to\mathbb{C} \mid V_a^b(f) < +\infty \}$

例: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界、单调

$\Longrightarrow f\in BV[a,b]$ 且

$$V_a^b(f) = |f(b)-f(a)|$$

- Pf 不妨设 $f \nearrow$

$$\Longrightarrow V(f,P) = \sum_{k=1}^{N} |f(t_k)-f(t_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{N} [f(t_k)-f(t_{k-1})]$$

$$= f(b)-f(a)$$

- 例: $\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\to\mathbb{C} \text{ 可微} \\ f' \text{ 有界} \end{array}\right\} \Longrightarrow f\in BV[a,b]$

Pf 令 $M \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{t\in[a,b]} |f'(t)|$

拟微分中值定理

$$\Longrightarrow |f(t)-f(s)| \le M|t-s| \quad \forall\, t,s\in[a,b]$$

- $\Longrightarrow V(f,P) \le \sum\limits_{k=1}^{N} M(t_k-t_{k-1}) = M(b-a)$

例. $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} t \sin \frac{1}{t}, & t \in (0,1] \\ 0, & t = 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \quad f \notin BV[0,1]$

Pf $\quad \forall N$

令 $\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_k = \dfrac{1}{(N-k+\frac{1}{2})\pi}, & k = 1, 2, \cdots, N-1 \\ t_N = 1 \end{cases}$

$\Longrightarrow \quad P = \{t_0, t_1, \cdots, t_N\}$ 为 $[0,1]$ 的划分

$$f(t_k) = \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k+\frac{1}{2})\pi}, \quad k = 1, 2, \cdots, N-1$$

$$\Longrightarrow \quad |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \frac{1}{(N-k+\frac{1}{2})\pi} + \frac{1}{(N-k-\frac{1}{2})\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{2(N-k)}{(N-k)^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\geq \frac{2}{\pi} \frac{1}{N-k}$$

$$\Longrightarrow \quad V(f, P) \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{N-k} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}$$

$$\to +\infty$$

as $N \to \infty$

Prop 平面曲线 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

γ 可求长 $\Longleftrightarrow$ $x, y \in BV[a,b]$

Prop 设 $f \in C[a,b]$

$f \in BV[a,b] \Longleftrightarrow f$ 的图像可求长.

Prop $BV[a,b]$ 是向量空间.

Prop 设 $f \in BV[a,b]$

(i) $\forall x \in [a,b]$,

$$V_a^b(f) = V_a^x(f) + V_x^b(f)$$

(ii) $x \mapsto V_a^x(f)$ 是单调增函数.