第十八讲 (2026.5.6)

Fubini-Tonelli Thm

如果 $f \in L^1(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ or $f \in L^+(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$

则

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f \, dm = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,y)\,dx \right] dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x,y)\,dy \right] dx$$

例: 计算 $\int_E y \sin x \cdot e^{-xy} \, dx\,dy$

其中 $E = \{(x,y) : 0 < x < +\infty, \ 0 < y < 1\}$

Note that

$$\int_0^\infty \sin x \cdot e^{-xy} \, dx = \frac{1}{1+y^2}$$

(分部积分两次). 形式地

$$\int_E y \sin x \, e^{-xy} \, dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^\infty y \sin x \, e^{-xy} dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\log 2$$

合法性？

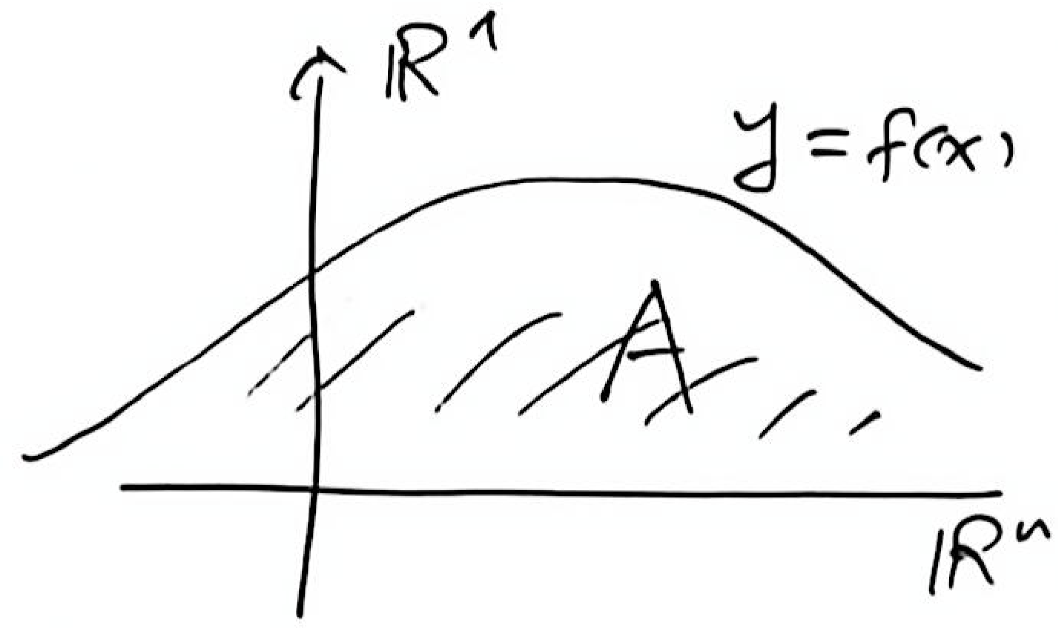
$$|f(x,y)| \leq y e^{-xy}$$

$$\int_E |f(x,y)|\,dx\,dy \leq \int_E y e^{-xy}\,dx\,dy$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_0^1 \left[\int_0^\infty y e^{-xy}\,dx\right] dy$$

$$= 1$$

从而，由 Fubini，可化重积分为累次积分.



积分的几何意义

Prop 3　设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上非负函数

$$A \overset{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

则

(i) $f \in L^+(\mathbb{R}^n) \iff A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n+1}}$

(ii) $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$ 时

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = m_{n+1}(A)$$

Lem 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测

$$\tilde{f}(x, y) \overset{def}{=} f(x), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

则 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上可测

Pf $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$E(a) \overset{def}{=} \{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) < a \} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$$

$$\Rightarrow \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tilde{f}(x, y) < a \}$$

$$= E(a) \times \mathbb{R} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n+1}} \quad (\text{by prop } 2)$$

Pf of prop 3

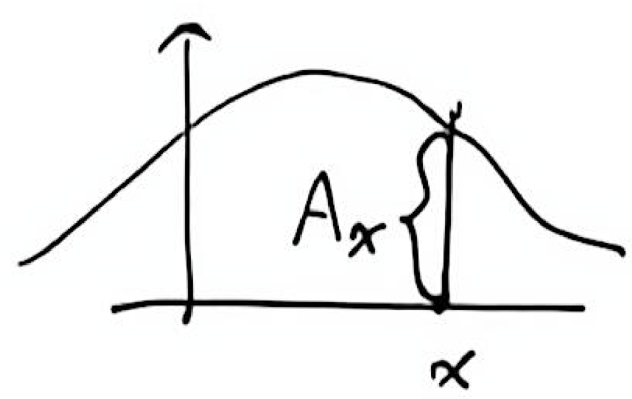
(i) " $\Rightarrow$ "

$$f \in L^+(\mathbb{R}^n)$$

$\overset{\text{Lem}}{\Longrightarrow}$ $F(x, y) \overset{def}{=} y - f(x)$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上可测

$$\Rightarrow A = \{ y \geq 0 \} \cap \{ F \leq 0 \} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

" $\Leftarrow$ " $\forall x \in \mathbb{R}^n$



$$A_x = [0, f(x)] \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^1}$$

(i)

$$\underbrace{x \longmapsto m_1(A_x)}_{f} \in L^+(\mathbb{R}^n)$$

(ii)

$$m_{n+1}(A) \overset{\text{by 祖暅}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \overbrace{m_1(A_x)}^{f(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

Prop 4 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测，则

$$(x, y) \longmapsto f(x-y)$$

在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上可测.

Pf $\forall\, a \in \mathbb{R}$,

$$E(a) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$$

下证:

$$\tilde{E}(a) \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : f(x-y) > a\} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{2n}}$$

令

$$\Phi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x, y) \longmapsto x - y$$

$$\Longrightarrow \tilde{E}(a) = \Phi^{-1}(E(a))$$

⑤

$$\left(\begin{aligned} (x,y) \in \tilde{E}(a) &\iff f(\Phi(x,y)) > a \\ &\iff \Phi(x,y) \in E(a) \\ &\iff (x,y) \in \Phi^{-1}(E(a)) \end{aligned} \right)$$

$\Rightarrow$ 只需证: $\forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$, $\Phi^{-1}(E) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{2n}}$

<u>Step 1</u> $\forall G \overset{G_\delta}{\subset} \mathbb{R}^n$, $\Phi^{-1}(G) \overset{G_\delta}{\subset} \mathbb{R}^{2n}$

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k, \quad G_k \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \Phi^{-1}(G) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi^{-1}(G_k)$$

with $\Phi^{-1}(G_k) \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{2n}$

($\because$ Φ 连续)

<u>Step 2</u> $\forall Z \subset \mathbb{R}^n$ with $m_n(Z) = 0$

$$m_{2n}(\Phi^{-1}(Z)) = 0$$

$\exists G \overset{G_\delta}{\subset} \mathbb{R}^n$ s.t.

$$\begin{cases} m_n(G) = 0 \\ Z \subset G \end{cases} \quad \text{(等测包)}$$

令 $\tilde{G} \overset{\text{def}}{=} \Phi^{-1}(G)$

$\overset{\text{Step 1}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{G} \overset{G_\delta}{\subset} \mathbb{R}^{2n}$

(i) (6)

$$m_{2n}(\tilde{G}) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi_{\tilde{G}} \, dm_{2n}$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{\tilde{G}})^y \, dx \right] dy$$

$\overset{7}{(11)}$

$$(\chi_{\tilde{G}})^y (x) = 1 \iff \chi_{\tilde{G}}(x, y) = 1$$

$$\iff (x, y) \in \Phi^{-1}(G)$$

$$\iff x - y \in G$$

$$\iff x \in G + y$$

$$\iff \chi_{G+y}(x) = 1.$$

$$\implies m_{2n}(\tilde{G}) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{G+y} \, dx \right] dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} m_n(G+y) \, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} m_n(G) \, dy = 0 .$$

$\Phi^{-1}(Z) \subset \tilde{G}$

$$\implies \qquad m_{2n}(\Phi^{-1}(Z)) = 0 .$$

Step 3 $\quad \forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, \quad \Phi^{-1}(E) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{2n}}$

$\exists\, G \overset{G_\delta}{\subset} \mathbb{R}^n,$

$\exists\, Z \subset \mathbb{R}^n$ with $m_n(Z) = 0$

s.t.

$$E = G \setminus Z$$

$$\Rightarrow \quad \Phi^{-1}(E) = \underbrace{\Phi^{-1}(G)}_{G_\delta\text{集}} \setminus \underbrace{\Phi^{-1}(Z)}_{\text{零集}} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{2n}}$$

Def 设 f, g 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测

如果对 a.e. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy \quad \text{有限}$$

则定义

$$(f * g)(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

称为 f 和 g 的卷积 (convolution)

Thm $\quad f, g \in L^1 \Rightarrow f * g \in L^1$

且 $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$

(HW: Ex. 21, 22. 24)

微积分基本定理（FTOC）

1° $f \in C[a,b]$

$\Rightarrow F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)\,dt$ 在 $[a,b]$ 上可微

且

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

2° $\left.\begin{array}{l} F \text{ 可微} \\ F' \in R[a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^x F'(t)\,dt$

$$= F(x) - F(a)$$

(Newton-Leibniz)

Q: 在 1° 中，条件 $f \in C[a,b]$ 改为 $f \in R[a,b]$，结论是否仍成立？

回忆（常.史 Thm 6.3.2）

设 $f \in R[a,b]$ 在 $x_0 \in [a,b]$ 连续

$\Rightarrow F$ 在 x_0 处可微 且 $F'(x_0) = f(x_0)$

而 $f \in R[a,b] \Leftrightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上 a.e. 连续

故 1° 的结论对 a.e. $x \in [a,b]$ 成立.

Q: 进一步，条件改为 $f \in L^1[a,b]$，又如何？

Lebesgue 微分定理

Q:（针对 2°）

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ a.e. 可微} \\ F' \in L^1[a,b] \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} N\text{-}L.$$

反例： $F(x) = \begin{cases} A, & x = a \\ 0 & a < x < b \\ B & x = b \end{cases}$

$(A \neq B)$

Q: $\left.\begin{array}{l} F \in C[a,b] \quad \text{a.e. 可微} \\ F' \in L^1[a,b] \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} N\text{-}L.$

反例： Cantor-Lebesgue 函数.

Q: 是否有 N-L 成立的充要条件？

AC（绝对连续函数）