第十六讲 (2026.4.27)　　①

回忆：对 $f \in C([a,b]\times[c,d])$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

重积分化为累次积分

$$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

累次积分换序

Q：如果 f 不连续？

例： $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$， $x,y\in[0,1]$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy\right]dx = \frac{\pi}{4}^2$$

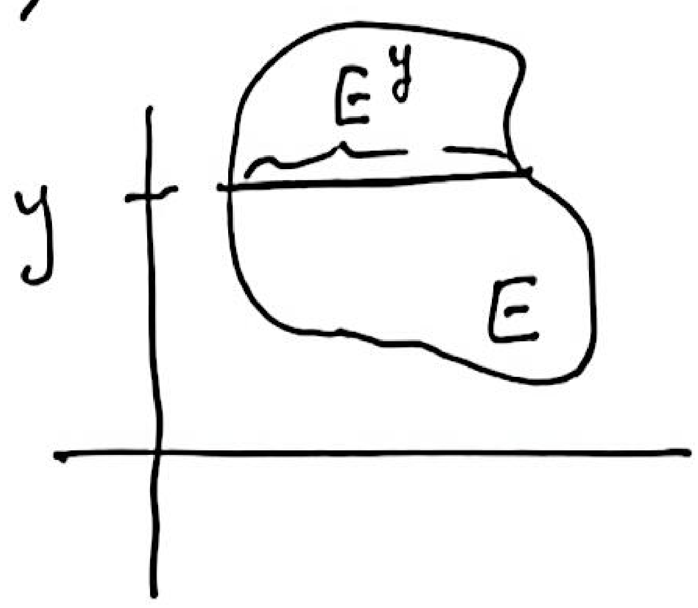
$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dx\right]dy = -\frac{\pi}{4}^2$$

(这里是广义积分，以往需加一致收敛条件才能交换积分次序)

Def 对 $E \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$

$$E^y \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^{n_1} : (x, y) \in E\}$$

称为E关于y的截面 (section)



对 $x \in \mathbb{R}^{n_1}$,

$$E_x \overset{def}{=} \{y \in \mathbb{R}^{n_2} : (x, y) \in E\}$$

称为E的x-截面

对 $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 上的函数 f 和 $y \in \mathbb{R}^{n_2}$

$$f^y(x) \overset{def}{=} f(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^{n_1}$$

称为 f 的 y-截面.

类似定义 f 的 x-截面.

Q:

$$E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} E^y \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1}} \\ E_x \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_2}} \end{cases}$$

$$f \text{ 在 } \mathbb{R}^{n_1+n_2} \text{ 上可积} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} f^y \text{ 在 } \mathbb{R}^{n_1} \text{ 上可积} \\ f_x \text{ 在 } \mathbb{R}^{n_2} \text{ 上可积} \end{cases}$$

反例：设 A 是 $\mathbb{R}^1$ 中不可测集.

$$E \overset{\text{def}}{=} A \times \{0\} = \{(x,0): x \in A\}$$

$$\Longrightarrow \quad m_2(E) = 0.$$

$$\Longrightarrow \quad E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}$$

但 $E^0 = A \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}^1}$

$f = \chi_E$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可测，但 $f^0 = \chi_A$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上不可测

Rmk. 在 a.e. 意义下正确.

Thm (Fubini)

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$$

(F1) 对 a.e. $y \in \mathbb{R}^{n_2}$，$f^y \in L^1(\mathbb{R}^{n_1})$

对 a.e. $x \in \mathbb{R}^{n_1}$，$f_x \in L^1(\mathbb{R}^{n_2})$

(F2) $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y \, dx \in L^1(\mathbb{R}^{n_2})$

$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n_2}} f_x \, dy \in L^1(\mathbb{R}^{n_1})$

(F3) $$\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f\, dm = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,y)\, dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x,y)\, dy \right] dx$$

Def $L^+ = \{$非负可测函数$\}$

Thm (Tonelli, 托内利)

$\forall f \in L^+(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$

(T1) 对 a.e. $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $f^y \in L^+(\mathbb{R}^{n_1})$

对 a.e. $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $f_x \in L^+(\mathbb{R}^{n_2})$

(T2) $$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,\cdot)\, dx \in L^+(\mathbb{R}^{n_2})$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(\cdot,y)\, dy \in L^+(\mathbb{R}^{n_1})$$

(T3) $$\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f\, dm = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,y)\, dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x,y)\, dy \right] dx$$

Pf of "Tonelli $\Rightarrow$ Fubini"

$f \in L^1(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$

$\Rightarrow f^+, f^- \in L^+(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$

$\xRightarrow{\text{Tonelli}}$ f^+, f^- 满足 (T1) – (T3)

同时 $f^+, f^- \in L^1(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$

$\Rightarrow$ (T2), (T3) 中的积分均有限或 a.e. 有限 $\Rightarrow$ (F1), (F2)

(T3) for f^+ 减 (T3) for f^- $\Longrightarrow$ (F3)

Idea of Pf of Tonelli

令 $L^+ \overset{\text{def}}{=} L^+(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$

$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{ f \in L^+ : f$ 满足 (T1) – (T3)$\}$

Tonelli $\Longleftrightarrow \mathcal{F} = L^+$

<u>Lem 1</u> $\mathcal{F}$ 是凸锥, i.e. 对加法和非负系数的数乘封闭 (平凡)

Lem 2 $\mathcal{F}$ 对单增序列极限封闭

i.e. $\mathcal{F} \ni f_k \nearrow f \Rightarrow f \in \mathcal{F}$

从而结论为:

Claim. $\forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}$, $\chi_E \in \mathcal{F}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Claim}\\ \text{Lem 1}\end{array}\right\} \Rightarrow \{\text{非负简单函数}\} \subset \mathcal{F}$$

$$\xRightarrow{\text{Lem 2}} L^+ \subset \mathcal{F}$$

$$\left(\forall f \in L^+,\ \exists \varphi_k \nearrow f \xRightarrow{\text{Lem 2}} f \in \mathcal{F} \right)$$

Pf of Lem 2

$\forall k$, $\exists A_k \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_2}}$ with $m_{n_2}(A_k) = 0$

s.t.

$\forall y \in \mathbb{R}^{n_2} \setminus A_k$, $(f_k)^y \in L^+(\mathbb{R}^{n_1})$

令 $A \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

$\Rightarrow m_{n_2}(A) = 0$ 且 $\forall y \in \mathbb{R}^{n_2} \setminus A$

$(f_k)^y \in L^+(\mathbb{R}^{n_1})$

$(f_k)^y \nearrow f^y$

$\Longrightarrow \quad f^y \in L^+(\mathbb{R}^{n_1}) \quad \underline{\text{(?)}}$

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y \, dx \overset{MCT}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} (f_k)^y \, dx$$

$$\in L^+(\mathbb{R}^{n_2})$$

((T1), (T2) ✓)

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f \, dm \overset{MCT}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f_k \, dm$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} (f_k)^y \, dx \right] dy$$

by (T3) for f_k

$$\overset{MCT}{=} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y \, dx \right] dy$$

((T3) ✓)

<u>Lem 3</u> $\forall f, g \in \mathcal{F}$

$$\left.\begin{array}{l} f - g \geq 0 \\ g \in L^1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f - g \in \mathcal{F}$$

Pf

$g \in \mathcal{F} \cap L^1$

$$\Rightarrow \quad +\infty > \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} g \, dm = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} g^y dx \right] dy$$

$$\Rightarrow \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n_1}} g^y dx \text{ 在 } \mathbb{R}^{n_2} \text{ 上 a.e. 有限}$$

$$\Rightarrow \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n_2} \text{ with } \int_{\mathbb{R}^{n_1}} g^y dx < +\infty$$

$$g^y \text{ 在 } \mathbb{R}^{n_1} \text{ 上 a.e. 有限}$$

$$\Rightarrow \quad f^y - g^y \quad \text{a.e. 有定义} \quad \underline{\omega}$$

$$(f-g)^y = f^y - g^y \quad \text{a.e. on } \mathbb{R}^{n_1}$$

$\boxed{3}$ 同理

$$(f-g)_x = f_x - g_x \quad \text{a.e. on } \mathbb{R}^{n_2}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y dx \right) dy \overset{(T3)}{=} \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f \, dm$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} (f-g) \, dm + \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} g \, dm$$

$$\overset{(T3)}{=} \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} (f-g)\, dm + \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} g^y \, dx \right] dy$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} (f-g)\, dm$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y \, dx \right) dy - \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} g^y \, dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y \, dx - \int_{\mathbb{R}^{n_1}} g^y \, dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} (f-g)^y \, dx \right] dy$$

$\Longrightarrow$ $f-g$ 满足 (T3)

<u>Lem 4</u> $\left. \begin{array}{l} f_k \in \mathcal{F} \cap L^1 \\ f_k \searrow f \end{array} \right\} \Longrightarrow f \in \mathcal{F}$

Pf 令 $g_k \overset{\text{def}}{=} f_1 - f_k$

$\overset{\text{Lem 3}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{F} \ni g_k \nearrow f_1 - f$

$\overset{\text{Lem 2}}{\Longrightarrow}$ $f_1 - f \in \mathcal{F}$

Lem 3

$$\Longrightarrow \quad f = f - (f_1 - f) \in \mathcal{F}.$$

Pf of Tonelli

只需证: $\forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}$, $\chi_E \in \mathcal{F}$.

Step 1 先设 $E = Q' \times Q''$

with $Q' \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $Q'' \subset \mathbb{R}^{n_2}$

$$E^y = \begin{cases} Q' & \text{if } y \in Q'' \\ \phi & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad E^y \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1}}$$

$$\Longrightarrow (\chi_E)^y = \chi_{E^y} \in L^+(\mathbb{R}^{n_1})$$

以

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} (\chi_E)^y \, dx = m_{n_1}(E^y)$$

$$= \begin{cases} |Q'| & \text{if } y \in Q'' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= |Q'| \chi_{Q''}(y)$$

$$\in L^+(\mathbb{R}^{n_2})$$