第十五讲 (2026.4.22)

Def 设 $1 \le p < \infty$, $\mathcal{F} \subset L^p$

如果 $\forall f \in L^p$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g \in \mathcal{F}$

s.t.

$$\|f - g\|_p < \varepsilon$$

则称 $\mathcal{F}$ 在 L^p 中稠密. 记为 $\mathcal{F} \overset{\text{dense}}{\subset} L^p$

Thm $\{$可积简单函数$\} \overset{\text{dense}}{\subset} L^1$

Pf $\exists$ 简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ s.t.

$$\begin{cases} |\varphi_k| \nearrow |f| \\ \varphi_k \to f \quad \text{pointwise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |f - \varphi_k| \le |f| + |\varphi_k| \le 2|f|$$

$$\overset{\text{DCT}}{\Longrightarrow} \lim_{k\to\infty} \int |f - \varphi_k| \, dm = 0$$

Thm $\{$阶梯函数$\}$ $\overset{\text{dense}}{\subset}$ L^1 ②

Pf 只需证：$\forall$ 简单函数 $\varphi \in L^1$,

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 阶梯函数 ψ s.t.

$$\|\varphi - \psi\|_1 < \varepsilon$$

$$\left(\Rightarrow \|f - \psi\|_1 \le \|f - \varphi\|_1 + \|\varphi - \psi\|_1 \right)$$

Note: $\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k} \in L^1$

$$\Longleftrightarrow m(\{\varphi \neq 0\}) < +\infty$$

故只需证：$\forall E \in \mathcal{L}$ with $m(E) < +\infty$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 阶梯函数 ψ s.t.

$$\|\chi_E - \psi\|_1 < \varepsilon$$

回忆：第九讲中 Thm：$\forall$ 可测函数 f,

$\exists$ 阶梯函数列 $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ s.t. $\psi_k \to f$ a.e.

ㅤ证明中：$\exists R_1, \cdots, R_M$ 互不相交 s.t.

$$m\left(\left\{\chi_E \neq \sum_{j=1}^{M} \chi_{R_j}\right\}\right) < \varepsilon$$

$\Longrightarrow \|\chi_E - \psi\|_1 < \varepsilon$ with $\psi = \sum_{j=1}^{M} \chi_{R_j}$

Def $C_c(\mathbb{R}^n) \overset{\text{def}}{=} \{ f \in C(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(f)$ 紧 $\}$

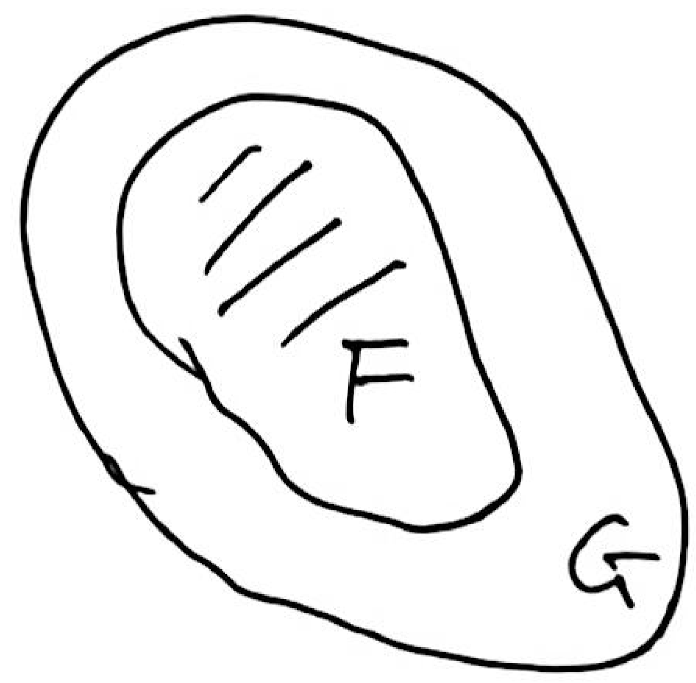
（紧支连续函数全体）

Thm $C_c(\mathbb{R}^n) \overset{\text{dense}}{\subset} L^1$

Lem (Urysohn 引理)

设 $\phi \neq F \overset{\text{closed}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $G \overset{\text{open}}{\subsetneqq} \mathbb{R}^n$ s.t.

$$F \subset G$$



则 $\exists f \in C(\mathbb{R}^n)$ s.t.

$$\begin{cases} 0 \leq f \leq 1 \\ f \equiv 1 \text{ on } F \\ f \equiv 0 \text{ on } \mathbb{R}^n \setminus G \end{cases}$$

Pf:

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R} \setminus G)}{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R} \setminus G) + \operatorname{dist}(x, F)} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

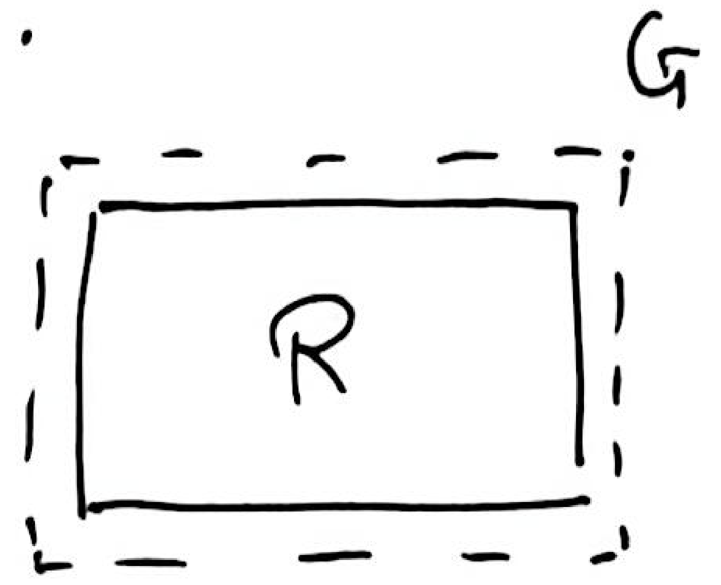
满足条件. (HW)

Pf of Thm

只需证: $\forall$ 长方体 R, $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists\, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ s.t.

$$\| \chi_R - g \|_1 < \varepsilon.$$



$\exists$ 开的长方体 G s.t.

$$\begin{cases} R \subset G \\ m(G \setminus R) < \varepsilon \end{cases}$$

Urysohn $\Longrightarrow$ $\exists\, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ s.t.

$$\begin{cases} 0 \le g \le 1 \\ g \equiv 1 \text{ on } R \\ g \equiv 0 \text{ on } \mathbb{R}^n \setminus G \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad g = \chi_R \text{ on } R \sqcup (\mathbb{R}^n \setminus G)$$

$$\Rightarrow \quad \| \chi_R - g \|_1 \le \int_{G \setminus R} 1 \, dm < \varepsilon$$

Thm 设 $1 \le p < \infty$. 则

1° $\{$可积简单函数$\} \overset{\text{dense}}{\subset} L^p$

2° $\{$阶梯函数$\} \overset{\text{dense}}{\subset} L^p$

3° $C_c(\mathbb{R}^n) \overset{\text{dense}}{\subset} L^p$

Pf: (HW)

Prop (平移不变性)

$\forall f \in L^1$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-h)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

Pf: Step 1 先设 $f = \chi_E$

$$\chi_E \in L^1 \iff m(E) < \infty$$

$$\chi_E(x-h) = \chi_{E+h}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x-h)\,dx = m(E+h)$$

$$= m(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x)\,dx$$

Step 2　f 为简单函数时

成立

Step 3　f 为非负可积函数时

∃ 非负简单函数 $\varphi_k \nearrow f$

$$\Longrightarrow \quad \varphi_k(\cdot - h) \nearrow f(\cdot - h)$$

$$\overset{MCT}{\Longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\,dx$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x-h)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-h)\,dx$$

Step 4　一般 $f \in L^1$

$$f = f^+ - f^-$$

Thm（平均连续性）$\forall f \in L^p \quad (1 \le p < \infty)$

$$\lim_{h\to 0} \int |f(x+h) - f(x)|^p\,dx = 0$$

i.e. $\|f(\cdot + h) - f\|_p \to 0$ as $|h| \to 0$.

Pf Step 1 先设 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$

假设 $\operatorname{supp}(f) \subset \overline{B(0,r)}$.

f 一致连续

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in (0,1)$ s.t.

$$|f(x') - f(x'')| < \left(\frac{\varepsilon}{m(B(0,r+1))}\right)^{1/p}$$

$$\forall x', x'' \in \mathbb{R}^n,\ |x'-x''| < \delta$$

$\Rightarrow$ 当 $|h| < \delta$ 时

$$\int |f(x+h) - f(x)|^p \, dx$$

$$= \int_{B(0,r+1)} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx < \varepsilon$$

Step 2 一般情形

$\forall f \in L^p,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ s.t.

$$\|f - g\|_p < \varepsilon/3$$

8

$$\Rightarrow \left(\int |f(x+h) - g(x+h)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p} < \varepsilon/3$$

而由 Step 1, 当 $|h| < \delta$ 时

$$\int |g(x+h) - g(x)|^p dx < \varepsilon/3$$

$$\Rightarrow \|f(\cdot + h) - f\|_p$$

$$\leq \|f(\cdot+h) - g(\cdot+h)\|_p + \|g(\cdot+h) - g\|_p$$

$$+ \|g - f\|_p$$

$$< \varepsilon$$

例: (Riemann-Lebesgue 引理)

设 $f \in L^1[a,b]$, 则

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x) \cos kx \, dx = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x) \sin kx \, dx = 0$$

Pf $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 阶梯函数 g s.t.

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon/2$$

设 $g = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{(x_{j-1}, x_j]}$

with $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x) \cos kx \, dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} c_j \cos kx \, dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\sin kx_j - \sin kx_{j-1}}{k}$$

$$\to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty$$

$\Rightarrow \exists N$ s.t. 当 $k \geq N$ 时

$$\left| \int_a^b g(x) \cos kx \, dx \right| < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) \cos kx \, dx \right|$$

$$\leq \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] \cos kx \, dx \right| + \left| \int_a^b g(x) \cos kx \, dx \right|$$

$$< \|f - g\|_1 + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

HW: יהי $E \in \mathcal{L}$

$$f,\ f_k \in L^1(E), \qquad f_k \to f \quad \text{a.e.}$$

הוכח:

$$f_k \xrightarrow{L^1} f \iff \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_1 = \|f\|_1$$