第十三讲（2026.4.15）

L^p 空间.（F. Riesz, 1910）

Def 设 $0<p<\infty$, $E\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

f 在 E 上可测

(i) 令

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\int_E |f|^p\,dm\right)^{1/p}$$

$$L^p(E) \overset{\text{def}}{=} \{f : \|f\|_p < +\infty\}$$

(ii) 如果 $\exists M>0$ s.t.

$$|f| \le M \quad \text{a.e. on } E$$

则称 f 在 E 上本性有界，M 称为 $|f|$ 的一个本性上界

$$\|f\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} |f(x)|$$

$$\overset{\text{def}}{=} \inf\{M>0 : |f|\le M \text{ a.e. on } E\}$$

$$L^\infty(E) \overset{\text{def}}{=} \{f : \|f\|_\infty < +\infty\}$$

Prop $L^p(E)$ $(0<p\le\infty)$ 是向量空间

Pf $p=\infty$ 时平凡

设 $1<p<\infty$, $f, g \in L^p(E)$

$$|f+g|^p \le \left(2\max\{|f|,|g|\}\right)^p$$

$$\le 2^p\left(|f|^p+|g|^p\right)$$

$$\Longrightarrow \int_E |f+g|^p\,dm \le 2^p\left[\int_E |f|^p\,dm+\int_E |g|^p\,dm\right]$$

Def X —— $\mathbb{R}$ 上向量空间

如果函数 $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$ s.t.

(i) (正定性) $\|x\|\ge 0$, $\forall x\in X$

$\|x\|=0 \iff x=0$

(ii) (齐次性) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$, $\forall x\in X$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

(iii) (三角不等式) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$, $\forall x, y\in X$

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数.

$(X,\|\cdot\|)$ 称为赋范空间

称序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ 收敛是指：

$\exists\, x \in X$ s.t.

$$\|x_k - x\| \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty$$

称 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 X 中的 Cauchy 列是指：

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N$ s.t.

$$\|x_k - x_j\| < \varepsilon, \quad \forall\, k, j \geq N.$$

如果 X 中每个 Cauchy 列都收敛，则称 X 完备.

完备的赋范空间称为 Banach 空间.

Prop 当 $0 < p < 1$, $\|\cdot\|_p$ 不是范数.

Pf 取 $E_1, E_2 \subset E$ 可测 s.t.

$$\begin{cases} E_1 \cap E_2 = \phi \\ 0 < m(E_1),\ m(E_2) < +\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|\chi_{E_1} + \chi_{E_2}\|_p &= \left(m(E_1) + m(E_2)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &> m(E_1)^{\frac{1}{p}} + m(E_2)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\chi_{E_1}\|_p + \|\chi_{E_2}\|_p \end{aligned}$$

$q > 1$ 时
$(a+b)^q > a^q + b^q$
$\forall\, a, b > 0$

Thm (Minkowski 不等式)

设 $1 \le p \le \infty$，$\forall f, g \in L^p(E)$

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

i.e.

$$\left(\int_E |f+g|^p dm\right)^{1/p} \le \left(\int_E |f|^p dm\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p dm\right)^{1/p}$$

(HW：何时等号成立？)

Thm (Hölder 不等式)

设 $1 < p < \infty$，$p' \overset{\text{def}}{=} \frac{p}{p-1}$ (称为 p 的共轭指标)

$\forall f \in L^p(E)$，$\forall g \in L^{p'}(E)$

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

(HW：何时等号成立？)

Lem $\forall a, b \ge 0$，$\forall \lambda \in (0,1)$

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \le \lambda a + (1-\lambda) b$$

Pf $b=0$ 平凡

设 $b\neq 0$，原不等式等价于

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} \leq \lambda\left(\frac{a}{b}\right) + 1-\lambda$$

归化为证明：

$$t^{\lambda} \leq \lambda t + 1-\lambda, \quad \forall t \in (0,\infty)$$

Pf of Hölder

平凡情形：$\|f\|_p = 0$ or $\|g\|_{p'} = 0$

or $\|f\|_p = +\infty$ or $\|g\|_{p'} = +\infty$

下设 $0 < \|f\|_p, \|g\|_{p'} < +\infty$

Step 1 先假设 $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$

令

$$a = |f|^p$$
$$b = |g|^{p'}$$
$$\lambda = \frac{1}{p} \Rightarrow 1-\lambda = \frac{1}{p'}$$

$$\overset{\text{Lem}}{\Longrightarrow} |fg| = a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p'}} = a^{\lambda} b^{1-\lambda}$$
$$\leq \lambda a + (1-\lambda) b$$
$$= \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{p'}|g|^{p'}$$

⑥

$$\Longrightarrow \quad \|fg\|_1 \leq \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{p'}\|g\|_{p'}^{p'}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

<u>Step 2</u> 一般情形

令 $\tilde{f} \stackrel{def}{=} \dfrac{f}{\|f\|_p}$, $\tilde{g} \stackrel{def}{=} \dfrac{g}{\|g\|_{p'}}$

$$\Longrightarrow \quad \|\tilde{f}\|_p = \|\tilde{g}\|_{p'} = 1$$

$$\stackrel{\text{Step 1}}{\Longrightarrow} \quad \|\tilde{f}\tilde{g}\|_1 \leq \|\tilde{f}\|_p \|\tilde{g}\|_{p'} = 1.$$

$$\Longrightarrow \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

<u>Pf of Minkowski</u>

当 $p=1$ or $p=\infty$ 平凡

下设 $1 < p < \infty$

$$\|f+g\|_p^p = \int_E |f+g| \cdot |f+g|^{p-1}\, dm$$

$$\leq \int_E |f| \cdot |f+g|^{p-1}\, dm$$

$$+ \int_E |g| \cdot |f+g|^{p-1}\, dm$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_E |f|^p dm\right)^{1/p} \left(\int_E |f+g|^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$+ \left(\int_E |g|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f+g|^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \|f+g\|_p^{p-1}$$

(Note: $(p-1)p' = p$)

$$\Longrightarrow \quad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Rmk. 三角不等式 ✓

齐次性 ✓

但 $\|f\|_p = 0 \not\Rightarrow f = 0$

(而是 $f = 0$ a.e.)

在 $L^p(E)$ 中引入等价关系:

$$f \sim g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f = g \text{ a.e.}$$

并将 $L^p(E)/\sim$ 等同于 $L^p(E)$.

Thm 设 $1 \leq p \leq \infty$. $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ 是赋范空间

Thm (Riesz-Fischer)

设 $1 \le p < \infty$，$L^p(E)$ 完备

Pf 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^p(E)$ 中 Cauchy 列)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists N$ s.t.

$$\|f_k - f_j\|_p < \varepsilon, \quad \forall k, j \ge N$$

$\Rightarrow \exists k_1$ s.t.

$$\|f_k - f_{k_1}\|_p < \frac{1}{2}, \quad \forall k \ge k_1$$

$\exists k_2 > k_1$ s.t.

$$\|f_k - f_{k_2}\|_p < \frac{1}{2^2}, \quad \forall k \ge k_2$$

$\vdots$

$\exists k_j > k_{j-1}$ s.t.

$$\|f_k - f_{k_j}\|_p < \frac{1}{2^j}, \quad \forall k \ge k_j$$

$\vdots$

$\Rightarrow$ 子列 $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ s.t.

$$\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p < \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

令 $$M \overset{\text{def}}{=} \|f_{k_1}\|_p + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p$$

$$g_N \overset{\text{def}}{=} |f_{k_1}| + \sum_{j=1}^{N} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|$$

$$g \overset{\text{def}}{=} |f_{k_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|$$

$$\overset{\text{Minkowski}}{\Longrightarrow} \quad \|g_N\|_p \leq \|f_{k_1}\|_p + \sum_{j=1}^{N} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p$$

$$\leq M$$

又 $g_N \nearrow g$

$$\overset{\text{MCT}}{\Longrightarrow} \quad \int_E g^p \, dm = \lim_{N \to \infty} \int_E g_N^p \, dm \leq M^p$$

$\Longrightarrow \quad g \in L^p(E)$

$\Longrightarrow \quad g$ a.e. 有限.

而

$$\begin{cases} f_{k_N} = f_{k_1} + \sum_{j=1}^{N-1} (f_{k_{j+1}} - f_{k_j}) \\ g_N \to g \quad \text{a.e.} \quad (\text{均為有限值}) \end{cases}$$

$\Longrightarrow \quad \exists f$ s.t.

$$f_{k_N} \to f \quad \text{a.e.}$$

(由 Cauchy 收斂原理)

由 Fatou Lem,

$$\int_E |f|^p \, dm \le \liminf_{N\to\infty} \int_E |f_{k_N}|^p \, dm$$

$$\le M^p$$

$\Rightarrow \quad f \in L^p(E).$

$\forall \ell$,

$$\|f - f_{k_\ell}\|_p^p = \int_E |f - f_{k_\ell}|^p \, dm$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_{j\to\infty} \int_E |f_{k_j} - f_{k_\ell}|^p \, dm$$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{\ell\to\infty} \|f - f_{k_\ell}\|_p$

$$\le \lim_{\ell\to\infty} \cdot \liminf_{j\to\infty} \|f_{k_j} - f_{k_\ell}\|_p = 0$$

$(\because$ Cauchy$)$

最后,

$$\|f_k - f\|_p \le \|f_k - f_{k_\ell}\|_p + \|f_{k_\ell} - f\|_p$$

$$\to 0 \quad \text{as} \quad k, \ell \to \infty$$