第十一讲 (2026.4.8)

上次讲了

Def 对 $\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k} \geq 0$.

$$\int \varphi \, dm \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k)$$

对非负可测函数 f

$$\int f \, dm \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{ \int \varphi \, dm : \varphi \text{ 简单}, 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

Thm (MCT)

$$0 \leq f_k \nearrow f \text{ a.e.} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \int f_k \, dm = \int f \, dm$$

Thm (Fatou 引理)

设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上非负可测，则

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \, dm \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k \, dm$$

Pf $\forall k$

$$\inf_{j\geq k} f_j \leq f_i , \quad \forall i \geq k$$

$\Longrightarrow$ $\forall i \geq k$

$$\int_E \inf_{j\geq k} f_j \, dm \leq \int_E f_i \, dm$$

$$\Longrightarrow \int_E \inf_{j\geq k} f_j \, dm \leq \inf_{i\geq k} \int_E f_i \, dm$$

$$\Longrightarrow \int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \, dm = \int_E \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} f_j \, dm$$

$$\overset{MCT}{=} \lim_{k\to\infty} \int_E \inf_{j\geq k} f_j \, dm$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \inf_{i\geq k} \int_E f_i \, dm$$

$$= \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k \, dm$$

HW: 举例说明: $\exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 非负可测 s.t.

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ 存在. (ii) $\lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \, dm$ 存在.

(iii) $\int \lim\limits_{k\to\infty} f_k \, dm < \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \, dm$

③

例1: Fatou $\Rightarrow$ MCT

Pf: $f_k \nearrow f$

$$\Rightarrow \int f_k \, dm \le \int f \, dm, \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \limsup_{k\to\infty} \int f_k \, dm \le \int f \, dm$$

而由 Fatou

$$\int f \, dm \le \liminf_{k\to\infty} \int f_k \, dm$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int f_k \, dm = \int f \, dm$$

Prop (正线性)

$\forall$ 非负可测 f, g, $\forall \alpha, \beta \ge 0$

$$\int (\alpha f + \beta g) \, dm = \alpha \int f \, dm + \beta \int g \, dm$$

Pf $\int \alpha f \, dm = \alpha \int f \, dm$ 平凡

只需证: $\int (f+g) \, dm = \int f \, dm + \int g \, dm$

④

$\exists$ 非负简单 φ_k, ψ_k $k=1,2,\cdots$ s.t.

$$\varphi_k \nearrow f, \quad \psi_k \nearrow g$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_k + \psi_k \nearrow f + g$$

$$\overset{\text{MCT}}{\Longrightarrow} \quad \int (f+g)\, dm = \lim_{k\to\infty} \int (\varphi_k + \psi_k)\, dm$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\int \varphi_k\, dm + \int \psi_k\, dm \right]$$

$$= \int f\, dm + \int g\, dm$$

<u>Prop</u> (逐项积分)

设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 非负可测

$$f \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

$$\Rightarrow \quad \int f\, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k\, dm$$

<u>Pf</u> $\forall N$,

$$\int \left(\sum_{k=1}^{N} f_k \right) dm = \sum_{k=1}^{N} \int f_k\, dm$$

5

而 $\sum_{k=1}^{N} f_k \nearrow f$

$\overset{MCT}{\Longrightarrow} \int f\,dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k\,dm$

Def 设 $E \in \mathcal{L}$，f 在 E 上可测.

如果 $\int_E f^+ dm$ 和 $\int_E f^- dm$ 中至少有一个有限，则定义

$$\int_E f\,dm \overset{def}{=} \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm$$

并称之为 f 在 E 上的积分.

如果 $\int_E f^+ dm$ 和 $\int_E f^- dm$ 均有限，则称 f 在 E 上可积.

$L^1(E) \overset{def}{=}$ E 上可积函数全体

$L^1 \overset{def}{=} L^1(\mathbb{R}^n)$

Prop $f \in L^1(E) \iff |f| \in L^1(E)$

(HW: 举例说明: f Riemann可积与 $|f|$ Riemann可积不等价)

Rmk: 为证明 f 可积, 只需证: $\int |f| \, dm < \infty$

Pf: "$\Rightarrow$" 平凡

"$\Leftarrow$"

$$f^+ \leq |f| \implies \int_E f^+ \, dm \leq \int_E |f| \, dm < +\infty$$

同理 $$\int_E f^- \, dm \leq \int_E |f| \, dm < +\infty$$

Prop. $f \in L^1(E) \implies f$ 在 E 上 a.e. 有限.

Prop $L^1(E)$ 是向量空间, i.e.

$\forall f, g \in L^1(E)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha f + \beta g \in L^1(E)$$

Pf $\quad f, g \in L^1$

$\Rightarrow f, g$ a.e. 有限

$\Rightarrow |\alpha f + \beta g| \leq |\alpha|\,|f| + |\beta|\,|g|$ a.e.

$$\Rightarrow \int |\alpha f + \beta g|\, dm \leq \int (|\alpha|\,|f| + |\beta|\,|g|)\, dm$$

$$\overset{\text{积分线性}}{=} |\alpha| \int |f|\, dm + |\beta| \int |g|\, dm$$

$$< +\infty$$

Prop (线性)

$\forall f, g \in L^1(E)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\, dm = \alpha \int_E f\, dm + \beta \int_E g\, dm$$

Pf 只证明: $\int (f+g)\, dm = \int f\, dm + \int g\, dm$

令 $\quad h \overset{\text{def}}{=} f + g$

$\Rightarrow h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$

$\Rightarrow \quad h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$ a.e.

($\because$ f, g, h 均 a.e. 有限)

由线性 $\Rightarrow$ $\int h^+ dm + \int f^- dm + \int g^- dm$

$$= \int f^+ dm + \int g^+ dm + \int h^- dm$$

$\Rightarrow \quad \int h^+ dm - \int h^- dm$

$$= \int f^+ dm - \int f^- dm + \int g^+ dm - \int g^- dm$$

Prop（可数可加性）

设 $f \in L^1$, $E_k \in \mathcal{L}$, $k = 1, 2, \cdots$ 互不相交

则
$$\int_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k} f \, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f \, dm$$

Pf 令
$$E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

$\forall N$,
$$\int_{\bigsqcup_{k=1}^{N} E_k} f^+ dm = \int f^+ \cdot \chi_{\bigsqcup_{k=1}^{N} E_k} dm$$

$$= \int f^+ \cdot \sum_{k=1}^{N} \chi_{E_k} \, dm$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int f^+ \chi_{E_k} \, dm$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int_{E_k} f^+ \, dm$$

而 $\quad f^+ \cdot \chi_{\bigsqcup_{k=1}^{N} E_k} \nearrow f \cdot \chi_E$

$$\Rightarrow \int_E f^+ \, dm = \int f^+ \cdot \chi_E \, dm$$

$$\overset{MCT}{=} \lim_{N \to \infty} \int f^+ \cdot \chi_{\bigsqcup_{k=1}^{N} E_k} \, dm$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \int_{E_k} f^+ \, dm$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^+ \, dm$$

同理,

$$\int_E f^- \, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^- \, dm$$

$$\Rightarrow \int_E f \, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f \, dm$$

Prop （单调性）

对 $f, g \in L^1$

$$f \le g \Rightarrow \int f\,dm \le \int g\,dm$$

Pf $0 \le g - f \Rightarrow 0 \le \int (g-f)\,dm$

Prop （三角不等式）

$\forall f \in L^1$,

$$\left| \int f\,dm \right| \le \int |f|\,dm$$

Pf

$$f \le |f| \Rightarrow \int f\,dm \le \int |f|\,dm$$

$$-f \le |f| \Rightarrow -\int f\,dm \le \int |f|\,dm$$

Thm 设 $f \in L^1$，则

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists B \in \mathcal{L}$. with $m(B) < \infty$

s.t.

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} |f|\,dm < \varepsilon$$

Pf 令

$$f_k \overset{\text{def}}{=} |f| \cdot \chi_{B_k(0)}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

$$\Rightarrow \quad f_k \nearrow |f|$$

$$\overset{\text{MCT}}{\Rightarrow} \quad \lim_{k \to \infty} \int f_k \, dm = \int |f| \, dm$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0. \quad \exists N \quad \text{s.t.} \quad \forall k \geq N$$

$$0 \leq \underbrace{\int |f| \, dm - \int f_k \, dm}_{= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_k(0)} |f| \, dm} < \varepsilon$$

HW: Ex. 9.10.

HW: $f \in L^1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} m(\{|f| \geq n\}) < \infty$