第九讲 (2026.3.30)

上次讲到

Thm $\forall$ 可测函数 f, $\exists$ 阶梯函数 $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ s.t.

$$\psi_k \to f \quad a.e.$$

Lem 1

$$\{f_k \not\to f\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \frac{1}{l}\}$$

Lem 2 对可测函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\left.\begin{array}{l} f_k \to f \quad a.e. \\ \sum_{k=1}^{\infty} m(\{f_k \neq g_k\}) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow g_k \to f \quad a.e$$

Pf of Thm

Step 1 先假设 $f = \chi_E$ with $m(E) < \infty$

Claim $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 阶梯函数 ψ s.t.

$$m(\{\psi \neq \chi_E\}) < \varepsilon$$

回忆第3讲中

$$m(E) < \infty \Rightarrow \exists Q_1, \cdots, Q_N \quad s.t.$$

$$m\left(E \Delta \left(\bigcup_{k=1}^{N} Q_k\right)\right) < \varepsilon/2$$

$\exists \tilde{R}_1, \cdots, \tilde{R}_M$ 内部不交长方体 s.t.

$$\bigcup_{k=1}^{N} Q_k = \biguplus_{j=1}^{M} \tilde{R}_j$$

收缩 $\tilde{R}_j$ 为 R_j s.t. R_j, $j=1,\cdots,M$ 互不相交

则

$$m\left(E \Delta \left(\bigsqcup_{j=1}^{M} R_j\right)\right) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x \in \left(E \Delta \left(\bigsqcup_{j=1}^{M} R_j\right)\right)^c$$

$$\chi_E(x) = \sum_{j=1}^{M} \chi_{R_j}(x)$$

$$\left(E \Delta \left(\bigsqcup_{j=1}^{M} R_j\right)\right)^c = \underbrace{\left[E^c \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^{M} R_j\right)^c\right]}_{\text{在这里 } \chi_E = 0 = \sum_{j=1}^{M} \chi_{R_j}} \cup \underbrace{\left[E \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^{M} R_j\right)\right]}_{\text{在这里 } \chi_E = 1 = \sum_{j=1}^{M} \chi_{R_j}}$$

$$\Rightarrow m\left(\left\{\chi_E \neq \sum_{j=1}^{M} \chi_{R_j}\right\}\right) < \varepsilon$$

Step 2 $\forall$ 紧支简单函数 φ

$\forall \varepsilon$, $\exists$ 阶梯函数 ψ s.t.

$$m(\{\psi \neq \varphi\}) < \varepsilon.$$

Step 3 对一般可测函数 f

由 Cor, $\exists$ 紧支简单函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ s.t.

$$\varphi_k \to f$$

$\overset{\text{Step 2}}{\Longrightarrow}$ $\forall k$, $\exists$ 阶梯函数 ψ_k s.t.

$$m(\{\psi_k \neq \varphi_k\}) < \frac{1}{2^k}$$

$\overset{\text{Lem 2}}{\Longrightarrow}$ $\psi_k \to f$ a.e.

Littlewood 三原理

1° 每个可测集都几乎是区间的有限并

$m(E) < \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists Q_1, \cdots, Q_N$ s.t.

$$m\left(E \,\Delta \left(\bigcup_{k=1}^{N} Q_k\right)\right) < \varepsilon$$

2° 每个可测函数都几乎是一个连续函数 (Lusin Thm)

3° 每个 a.e. 收敛的可测函数列都几乎是一致收敛的. (Egorov Thm)

Def f a.e. 有限 $\overset{\text{def}}{\iff} m(\{|f| = +\infty\}) = 0$

Thm (Egorov) 设 $m(E) < \infty$,

$f, f_k, k = 1, 2, \cdots$ 可测且 a.e. 有限. 则

$$f_k \to f \text{ a.e.} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \subset E \text{ s.t. } \begin{cases} m(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon \\ f_k \rightrightarrows f \text{ on } A_\varepsilon \end{cases}$$

Lem

$f_k \rightrightarrows f$ on $A \iff \exists \{k_l\}_{l=1}^\infty$ s.t.

$$A = \bigcap_{l=1}^\infty \bigcap_{k=k_l}^\infty \left\{ |f_k - f| < \frac{1}{l} \right\}$$

(HW)

- 问题转化为：

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists \{k_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$, s.t.

$$\begin{cases} A_\varepsilon = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} \bigcap_{k=k_\ell}^{\infty} \{ |f - f_k| < \frac{1}{\ell} \} \\ m(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon . \end{cases}$$

- Pf of Egorov

不妨设 $f_k \to f$ pointwise.

$$m(E \setminus A_\varepsilon) = m\left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{k=k_\ell}^{\infty} \{ |f - f_k| \geq \frac{1}{\ell} \} \right)$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} m\left(\bigcup_{k=k_\ell}^{\infty} \{ |f - f_k| \geq \frac{1}{\ell} \} \right)$$

$\Rightarrow$ 只需证： $\forall \ell$. $\exists k_\ell$ s.t.

$$m\left(\bigcup_{k=k_\ell}^{\infty} \{ |f_k - f| \geq \frac{1}{\ell} \} \right) < \frac{\varepsilon}{2^\ell}$$

由 Lem 1 $\{ f_k \not\to f \} = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \{ |f_k - f| \geq \frac{1}{\ell} \}$

$\Rightarrow \forall \ell$, $\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \{ |f_k - f| \geq \frac{1}{\ell} \} = \phi$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=j}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \frac{1}{l}\} \searrow \phi \quad (\text{as } j \to \infty)$$

测度的连续性 $\Rightarrow$ (这里用到 $m(E) < \infty$) $\exists\, k_l$ s.t.

$$m\left(\bigcup_{k=k_l}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \frac{1}{l}\}\right) < \frac{\varepsilon}{2^l}$$

Rmk: 条件 "$m(E) < \infty$" 不可去

反例: $E = (0, \infty)$.

$$f_k = \chi_{(0,k)}, \quad f = \chi_{(0,\infty)}$$

$\Rightarrow f_k \to f$ pointwise

但 $\{|f_k - f| > \frac{1}{2}\} = [k, \infty)$

Thm (Lusin)

设 $E \in \mathcal{L}$, f 在 E 上可测且 a.e. 有限.

则: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, F_\varepsilon \subset E$ 闭 s.t.

$$\begin{cases} m(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon \\ f|_{F_\varepsilon} \text{ 连续.} \end{cases}$$

Rmk :

- $f|_F$ 连续 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in F$, $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$

s.t.

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$
$$\forall y \in B(x, \delta) \cap F$$

例: $f \overset{\text{def}}{=} \chi_{\mathbb{Q}}$

f 在 $\mathbb{R}$ 上不连续, 但 $f|_{\mathbb{Q}}$ 连续.

Pf of Lusin Thm

Step 1 先假设 $f = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}$

with $E = \bigsqcup_{k=1}^{N} E_k$

$\forall k$, $\exists F_k \subset E_k$ 闭 s.t.

$$m(E_k \setminus F_k) < \varepsilon / N \quad (\text{内正则性})$$

令

$$F = \bigcup_{k=1}^{N} F_k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F \subset E \\ m(E \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$$

$\forall x \in F$, $\exists!\, k_x \in \{1, 2, \dots, N\}$ s.t.

$$x \in F_{k_x}$$

令

$$\delta \overset{def}{=} \frac{1}{2} \operatorname{dist}(x, F \setminus F_{k_x})$$

$\Rightarrow \quad f \equiv C_{k_x}$ on $B(x, \delta) \cap F$

$\Rightarrow \quad f\big|_F$ 在 x 连续.

Step 2 假设 $m(E) < \infty$

不妨假设 f 是实值函数 ($\because$ a.e. 有限)

$\Rightarrow \quad \exists$ 简单函数 $\varphi_k \to f$

$\overset{\text{Egorov}}{\Longrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0, \ \exists A_\varepsilon \subset E$ s.t.

$$\begin{cases} m(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon/2 \\ \varphi_k \rightrightarrows f \quad \text{on } A_\varepsilon \end{cases}$$

$\forall k, \ \exists F_k \subset A_\varepsilon$ 闭 s.t.

$$\begin{cases} m(A_\varepsilon \setminus F_k) < \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}} \\ \varphi_k\big|_{F_k} \text{ 连续} \end{cases} \quad \text{(by Step 1)}$$

令 $\quad F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$

⑨

$\Rightarrow F \subset A_\varepsilon$ 闭，且

$$m(A_\varepsilon \setminus F) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_\varepsilon \setminus F_k) < \varepsilon/2$$

$\Rightarrow m(E \setminus F) < \varepsilon$

而 $\left.\begin{array}{l} \varphi_k|_F \text{ 连续} \\ \varphi_k|_F \rightrightarrows f|_F \end{array}\right\} \Rightarrow f|_F$ 连续

<u>Step 3</u> 一般情形

令 $E_1 \overset{def}{=} E \cap \overline{B_1(0)}$

$E_k \overset{def}{=} E \cap \left(\overline{B_k(0)} \setminus \overline{B_{k-1}(0)} \right)$ $(k \geq 2)$

$\Rightarrow E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$

$\forall k$, $\exists F_k \subset E_k$ 闭 s.t.

$\left\{\begin{array}{l} m(E_k \setminus F_k) < \dfrac{\varepsilon}{2^k} \\ f|_{F_k} \text{ 连续} \end{array}\right.$ (by Step 2)

令 $F = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} F_k$

$$\Rightarrow \begin{cases} f|_F \text{ 连续.} \\ m(E \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$$

HW: 设 $E \in \mathcal{L}$, f 在 E 上可测

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 连续 s.t.

$$m(\{f \neq g\}) < \varepsilon$$

Tietze 延拓定理

X 为度量空间, $E \subset X$ 闭

$\Rightarrow$ E 上任一连续函数, 可延拓为 X 上连续函数

HW: Ex. 22, 23.