第七讲 (2026.3.23)

Def 如果 $f: E \to [-\infty, \infty]$ s.t.

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \{f < a\} \in \mathcal{L}$$

则称 f 在 E 上可测.

Prop. TFAE:

(i) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f < a\} \in \mathcal{L}$

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f \leq a\} \in \mathcal{L}$

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f > a\} \in \mathcal{L}$

(iv) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f \geq a\} \in \mathcal{L}$

Pf: (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\{f \leq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < a + \tfrac{1}{k}\}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$$\{f > a\} = E \setminus \{f \leq a\}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

$$\{f \geq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > a - \tfrac{1}{k}\}$$

(iv) $\Rightarrow$ (i)

$$\{f < a\} = E \setminus \{f \geq a\}.$$

Prop f 可測 $\iff$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b$

$$\{a \leq f < b\} \in \mathcal{L}$$

Pf: "$\Rightarrow$"

$\forall\, a$, $\{f \geq a\} \in \mathcal{L}$

$\forall\, b$, $\{f < b\} \in \mathcal{L}$

$$\Rightarrow \{a \leq f < b\} = \{f \geq a\} \cap \{f < b\} \in \mathcal{L}$$

"$\Leftarrow$"

$$\forall\, b, \quad \{f < b\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{-k \leq f < b\} \in \mathcal{L}$$

例: $\chi_{\mathbb{Q}}$ 可測

$$\{\chi_{\mathbb{Q}} < a\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{if } a > 1 \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & \text{if } 0 < a \leq 1 \\ \phi & \text{if } a \leq 0 \end{cases}$$

Prop: TFAE:

- (i) f 可测
- (ii) $\forall\, G \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(G) \in \mathcal{L}$
- (iii) $\forall\, F \overset{\text{closed}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(F) \in \mathcal{L}$
- (iv) $\forall\, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}$

Pf (HW)

Prop

$$\left.\begin{array}{l} f: E \to \mathbb{R} \text{ 可测} \\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ 连续} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ 可测}$$

Pf: $(g\circ f)^{-1}(-\infty, a) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(-\infty, a)}_{\text{开}})$

Rmk:

$$\left.\begin{array}{l} f: E \to \mathbb{R} \text{ 连续} \\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ 可测} \end{array}\right\} \not\Rightarrow g \circ f \text{ 可测}$$

(HW: Ex.35)

由此可证: $\mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{L}$

Prop: 1° f 可测 $\Rightarrow$ f^k 可测, $\forall k \in \mathbb{N}$

2° f, g 可测 $\Rightarrow$ λf, $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$ 均可测（如果有意义）

Pf: 1°

Case 1: k 为奇数

$\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\{f^k > a\} = \{f > a^{\frac{1}{k}}\} \in \mathcal{L}$$

Case 2, k 为偶数

$$\{f^k > a\} = \begin{cases} E, & \text{if } a < 0 \\ \{f > a^{\frac{1}{k}}\} \cup \{f < -a^{\frac{1}{k}}\}, & \text{if } a \geq 0 \end{cases}$$

2°

(i) $$\{\lambda f > a\} = \begin{cases} \{f > \frac{a}{\lambda}\} & \text{if } \lambda > 0 \\ \{f < \frac{a}{\lambda}\} & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$$

(ii) $$\{f + g > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{f > a - r\} \cap \{g > r\} \right)$$

$$x \in LHS \iff f(x) + g(x) > a$$

$$\iff \exists\, r \in \mathbb{Q} \text{ s.t. } g(x) > r > a - f(x)$$

$$\iff \exists\, r \in \mathbb{Q} \text{ s.t. } x \in \{f > a - r\} \cap \{g > r\}$$

(iii) $$fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$$

(iv) HW

Def $$\chi_E(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{if } x \in E \\ 0 & \text{if } x \notin E \end{cases}$$

称为E的特征函数或示性函数

Prop χ_E 可测 $\iff E \in \mathcal{L}$

Pf

$$\{\chi_E > a\} = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{if } a < 0 \\ E & \text{if } 0 \le a < 1 \\ \phi & \text{if } a \ge 1. \end{cases}$$

Def 形如

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}, \quad E_k \in \mathcal{L}, k=1,\cdots,N$$

的函数称为简单函数.

Note: 与 Stein 的定义不同! 那里要求每个 E_k s.t. $m(E_k) < \infty$.

Def 设 $\varphi: \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ 可测 且 $\# \mathrm{Range}(\varphi) < \infty$, 则称 φ 为简单函数.

设 $\mathrm{Range}(\varphi) = \{a_1, \cdots, a_N\}$, 令

$$E_k \overset{\text{def}}{=} \{\varphi = a_k\}, \quad k=1,\cdots,N$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$$

with $a_j \neq a_k$ if $j \neq k$

$$\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{k=1}^{N} E_k$$

Def 有限个长方体的示性函数的线性组合称为阶梯函数. i.e.

$$\psi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{R_k}$$

Thm 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为可测函数列，则

$$\sup_k f_k,\quad \inf_k f_k,\quad \limsup_{k\to\infty} f_k,\quad \liminf_{k\to\infty} f_k$$

均可测。

特别地，如果 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ 存在，则可测

i.e. 可测函数类对极限运算封闭。

Pf

$$\left\{\sup_k f_k > a\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{f_k > a\}$$

$$\inf_k f_k = -\sup_k(-f_k)$$

$$\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_k \sup_{j\geq k} f_j$$

Cor f, g 可测 $\Rightarrow$ $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ 均可测

Def $f^+(x) \overset{\text{def}}{=} \max\{f(x), 0\}$

$f^-(x) \overset{\text{def}}{=} \max\{-f(x), 0\}$

f^+, f^- 分别称为 f 的正部和负部

Rmks: $f = f^+ - f^-$

$|f| = f^+ + f^-$

Cor f 可测 $\Longleftrightarrow$ f^+, f^- 均可测

$\Longrightarrow$ $|f|$ 可测

HW. 举例说明: $|f|$ 可测 $\not\Rightarrow$ f 可测.

Def 设 $P(x)$ 是与 x 相关的某性质.

如果

$$m(\{x \in E : P(x) \text{不成立}\}) = 0$$

则称 P 在 E 上 $\underbrace{\text{几乎处处}}_{\text{记为 a.e.}}$ 成立.

例: $f = g$ a.e. $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $m(\{f \neq g\}) = 0$

Prop $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 可测

$f_k \to f$ a.e. $\Longrightarrow$ f 可测

i.e. 可测函数集对 a.e. 极限封闭

(HW).

Thm 设 $f: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ 可测，则

$\exists$ 非负简单函数 $\varphi_k \nearrow f$. i.e.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$0 \le \varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \cdots \le f(x)$$

且

$$\varphi_k(x) \to f(x) \quad \text{as} \quad k \to \infty$$

进而，如果 f 有界，则 $\varphi_k \rightrightarrows f$.

Pf: 对 $k = 1, 2, \cdots$

$j = 0, 1, 2, \cdots, 2^{2k} - 1$

$$E_{k,j} \overset{\text{def}}{=} \left\{ \frac{j}{2^k} \le f < \frac{j+1}{2^k} \right\}$$

$$F_k \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \ge 2^k \right\}$$

$$\varphi_k \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{2^{2k}-1} \frac{j}{2^k} \chi_{E_{k,j}} + 2^k \chi_{F_k}$$

Note: $$\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{j=0}^{2^{2k}-1} E_{k,j} \sqcup F_k$$

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{j}{2^k}, & \text{if } x \in E_{k,j} \\ 2^k & \text{if } x \in F_k \end{cases}$$