第六讲（2026.3.18） ①

Thm（Lebesgue可测集与Borel集的关系）

$E \in \mathcal{L} \iff \exists\ G_\delta$集 G，零测集 N_1 s.t.

$$E = G \setminus N_1$$

$\iff \exists\ F_\sigma$集 F，零测集 N_2 s.t.

（HW） $$E = F \cup N_2$$

Pf "$\Leftarrow$"

平凡

"$\Rightarrow$"

$\forall k$，$\exists\ G_k$ 开 s.t.

$$\begin{cases} E \subset G_k \\ m(G_k \setminus E) < \frac{1}{k} \end{cases}$$

令 $G \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ （G_δ集）

$\Rightarrow G \setminus E \subset G_k \setminus E, \ \forall k$

$\Rightarrow m(G \setminus E) \leq m(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}$

$\Rightarrow m(G \setminus E) = 0$ ②

令 $N_1 \overset{def}{=} G \setminus E$ 即可.

Thm

1° (平移不变性)

$\forall E \in \mathcal{L},\ \forall h \in \mathbb{R}^n$

$E + h \in \mathcal{L}$ 且 $m(E+h) = m(E)$

2° (旋转不变性)

$\forall E \in \mathcal{L},\ \forall T \in O(n)$

$T(E) \in \mathcal{L}$ 且 $m(T(E)) = m(E)$

3° (反射不变性)

$E \in \mathcal{L} \Rightarrow -E \in \mathcal{L}$ 且 $m(-E) = m(E)$

4° $\forall E \in \mathcal{L},\ \forall \lambda > 0$

$\lambda E \in \mathcal{L}$ 且 $m(\lambda E) = \lambda^n m(E)$.

不可测集

选择公理 (AC = Axiom of Choice)

非空集合的笛卡尔积非空

Def 对集合族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$

$$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha \overset{def}{=} \{ f: I \to \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha \mid f(\alpha)\in X_\alpha,\ \forall \alpha\in I \}$$

称 choice function.

Cor 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一族互不相交的非空集合，则 $\exists A\subset \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ s.t.

$\forall \alpha\in I$, $A\cap X_\alpha$ 刚好只有一个元素

Pf: $A \overset{def}{=} f(I)$ where $f\in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$

Rmk. AC $\iff$ Zorn's lemma

Thm (Vitali, 1905)

$$\mathcal{L} \neq 2^{\mathbb{R}}$$

i.e. $\exists A \subset \mathbb{R}$ 不可测.

Pf: 在 $[0,1]$ 中引入等价关系

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x - y \in \mathbb{Q}.$$

记 $E_\alpha \overset{\text{def}}{=} [\alpha] = \{x \in [0,1] : x \sim \alpha\}$

1° $\forall \alpha, \beta \in [0,1]$

要么 $E_\alpha \cap E_\beta = \phi$

要么 $E_\alpha = E_\beta$

(如果 $\exists \eta \in E_\alpha \cap E_\beta \Rightarrow \eta \sim \alpha$ 且 $\eta \sim \beta$
$\Rightarrow \alpha \sim \beta$)

2° $\forall \alpha$, E_α 是可数集.

3° $[0,1] = \bigsqcup_{\alpha \in [0,1]} E_\alpha$

由 AC，$\exists A \in \bigcup_{\alpha \in [0,1]} E_\alpha$ s.t.

$$A \cap E_\alpha = \{x_\alpha\}, \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

Claim $A \notin \mathcal{L}$

设 $\mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$A_k \overset{def}{=} A + r_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Claim 1 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 互不相交.

假设 $\exists j \neq k$ s.t.

$$A_j \cap A_k \neq \phi$$

$\Rightarrow \exists \alpha, \beta \in [0,1]$ s.t.

$$A_j \ni x_\alpha + r_j = x_\beta + r_k \in A_k$$

$\Rightarrow x_\alpha - x_\beta = r_k - r_j \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow x_\alpha \sim x_\beta$

$\Rightarrow x_\alpha = x_\beta$ ($\because A \cap E_\alpha$ 只有一个元素

$\Rightarrow r_j = r_k$ 矛盾

Claim 2 $\quad [0,1] \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset [-1,2]$ ⑥

$\because \forall A_k \subset [-1, 2]$

$\forall x \in [0,1], \quad \exists \alpha \in [0,1]$

s.t.

$$x \sim x_\alpha \in E_\alpha \cap A$$

$$\Rightarrow \quad \exists r_k \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \quad \text{s.t.}$$

$$x - x_\alpha = r_k$$

$$\Rightarrow \quad x = x_\alpha + r_k \in A_k$$

来证明: $A \notin \mathcal{L}$

假设 $A \in \mathcal{L}$

$$\Rightarrow \quad A_k \in \mathcal{L}. \quad \forall k$$

Claim 1 + 2

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) = m\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq 3$$

而 $\quad m(A_k) = m(A), \quad \forall k \quad$ (平移不变)

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A) \leq 3, \quad \text{矛盾.}$$

Ex. 29 (Steinhaus Thm)

如果 $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $m(E) > 0$, 则

$E - E$ 包含区间, 这里

$$E - E \overset{\text{def}}{=} \{x - y : x, y \in E\}$$

Vitali's Thm 的另一证法

$$+\infty = m(\mathbb{R}) = m_*\Big(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r)\Big) \leq \sum_{r \in \mathbb{Q}} m_*(A + r)$$

$$= \sum_{r \in \mathbb{Q}} m_*(A)$$

$\Rightarrow m_*(A) > 0$.

如果 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. 则 $m(A) > 0$.

$\overset{\text{Ex. 29}}{\Longrightarrow}$ $A - A$ 包含区间

但 $\forall x, y \in A$ with $x \neq y$ 一定属于不同的等价类

$\Rightarrow$ $x - y$ 是无理数

$\Rightarrow$ $A - A$ 不包含任何区间

可测函数

约定：$\forall a \in \mathbb{R}$,

$$a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty$$

$$a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} 0 & \text{if } a = 0 \\ \pm\infty & \text{if } a > 0 \\ \mp\infty & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0.$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

而

$$\left.\begin{array}{c} (\pm\infty) - (\pm\infty) \\ (+\infty) + (-\infty) \\ \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} \end{array}\right\} \text{无定义}$$

Def 对函数 $f: E \to [-\infty, +\infty]$

$$\{f < a\} \overset{\text{def}}{=} \{x \in E : -\infty \leq f(x) < a\}$$

$$= f^{-1}([-\infty, a))$$

$$\{f > a\} \overset{\text{def}}{=} \{x \in E : a < f(x) \le +\infty\}$$

$$\{a < f < b\} \overset{\text{def}}{=} \{x \in E : a < f(x) < b\}$$

<u>Def</u> 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测. 如果 $f: E \to [-\infty, \infty]$

s.t.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f < a\} \in \mathcal{L}$$

则称 f 在 E 上可测.

<u>Prop</u> 以下各陈述等价:

(i) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f < a\} \in \mathcal{L}$

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f \le a\} \in \mathcal{L}$

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f > a\} \in \mathcal{L}$

(iv) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f \ge a\} \in \mathcal{L}$.

<u>Pf</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\{f \le a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < a + \frac{1}{k}\}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$$\{f > a\} = E \setminus \{f \le a\}$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

$$\{f \geq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > a - \frac{1}{k}\}$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i)

$$\{f < a\} = E \setminus \{f \geq a\}.$$

<u>Prop</u>

f 可測 $\Longleftrightarrow$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b$

$$\{a \leq f < b\} \in \mathcal{L}$$

<u>Pf</u>: " $\Longrightarrow$ "

f 可測 $\xrightarrow{\text{前-Prop}}$ $\begin{cases} \{f \geq a\} \in \mathcal{L} \\ \{f < b\} \in \mathcal{L} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \{a \leq f < b\} = \{f \geq a\} \cap \{f < b\} \in \mathcal{L}$$

" $\Longleftarrow$ "

$$\forall b, \ \{f < b\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{-k \leq f < b\} \in \mathcal{L}$$

例： $\chi_{\mathbb{Q}}$ 可測

$$\{\chi_{\mathbb{Q}} < a\} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{if } a > 1 \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & \text{if } 0 < a \leq 1. \\ \phi & \text{if } a \leq 0. \end{cases}$$

HW: Ex. 13, 28, 29, 33.