第二讲 (2026.3.4)

Def 设 $X \neq \phi$，如果 $\mathcal{M} \subset 2^X$ s.t.

(i) $\phi \in \mathcal{M}$

(ii) $A \subset \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$ (对差补封闭)

(iii) $A_k \in \mathcal{M}$, $k = 1, 2, \cdots \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$

(对可数并封闭)

则称 $\mathcal{M}$ 是 X 上一个 σ-代数.

$(X, \mathcal{M})$ 称可测空间

$\mathcal{M}$ 的元素称为可测集

Def $\displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ with $A_k \cap A_j = \phi$ $\forall k \neq j$

(称无交并)

Def 可测空间 $(X, \mathcal{M})$

如果集函数 $\mu: \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ s.t.

(i) $\mu(\phi) = 0$

(ii) $\mu\left(\displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$, $\forall A_k \in \mathcal{M}$ 不交

则称 μ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上一个测度

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ 称测度空间.

Def 设 $\mathcal{F} \subset 2^X$

包含 $\mathcal{F}$ 的最小的 σ-代数 $\sigma(\mathcal{F})$ 称为 $\mathcal{F}$ 生成的 σ-代数

指: $\forall$ σ 代数 $\mathcal{A} \supset \mathcal{F}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{F})$

Def $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \overset{def}{=} \{\mathbb{R}^n$ 中开集$\}$ 生成的 σ-代数

称为 Borel σ-代数. 其元素称为 Borel 集.

例: F_σ 集 $\overset{def}{=}$ 可数个闭集之并

G_δ 集 $\overset{def}{=}$ 可数个开集之交

$F_{\sigma\delta}$ 集 $\overset{def}{=}$ 可数个 F_σ 集之交

$G_{\delta\sigma}$ 集 $\overset{def}{=}$ 可数个 G_δ 集之并

$F_{\sigma\delta\sigma}$

$G_{\delta\sigma\delta}$

都是 Borel 集.

Thm（$\mathbb{R}$中开集的结构）

$\mathbb{R}$中非空开集可唯一地表为至多可数个互不相交的开区间之并.

Pf 设 $G \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$

$\forall x \in G$, $\exists r > 0$ s.t.

$$(x-r, x+r) \subset G$$

令

$$a_x \overset{\text{def}}{=} \inf\{y \in \mathbb{R} : y < x, (y, x) \subset G\}$$

$$b_x \overset{\text{def}}{=} \sup\{z \in \mathbb{R} : x < z, (x, z) \subset G\}$$

Note: a_x可能为$-\infty$, b_x可能为$+\infty$

$$I_x \overset{\text{def}}{=} (a_x, b_x)$$

Claim 1 $I_x \subset G$

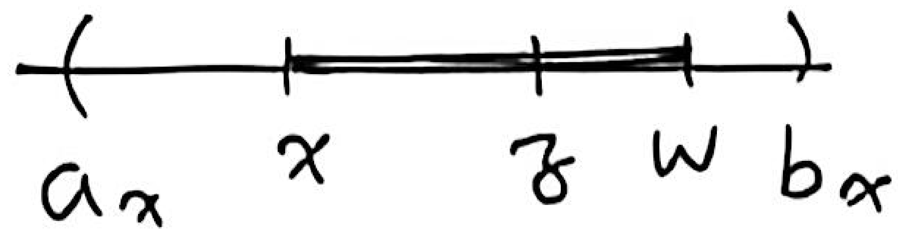
$\forall z \in I_x$, 不妨设 $z > x$

$\Rightarrow \exists w$ s.t.

$z < w < b_x$ 且 $(x, w) \subset G$ （由b_x的定义）

特别地,

$z \in G$



故 $G = \bigcup_{x\in G} I_x$

<u>Claim 2</u> $\forall\, I_y, I_z \in \{I_x\}_{x\in G}$

Either $I_y \cap I_z = \phi$

or $I_y = I_z$

假设 $I_y \cap I_z \neq \phi$

$\Rightarrow y \in \underbrace{I_y \cup I_z}_{\text{仍是开区间}} \subset G$

I_y 的最大性 $\Rightarrow I_y \cup I_z \subset I_y$

$\Rightarrow I_z \subset I_y$

同理 $I_y \subset I_z$

$\Rightarrow I_y = I_z$

<u>Claim 3</u> $\{I_x\}_{x\in G}$ 至多可数.

不同的 I_x 不相交 $\Rightarrow$ 包含不同的有理数

$\Rightarrow$ 建一对应 $\{I_x\}_{x\in G} \to \mathbb{Q}$ 是单射

$I_x \mapsto r \in I_x$

Rmk: $a_x, b_x \notin G$

假设 $a_x \in G$

$\Rightarrow \exists\, r>0$ s.t.

$$(a_x - r,\ a_x + r) \subset G$$

$$\Rightarrow (a_x - r,\ x) \subset (a_x - r,\ a_x + r) \cup (a_x, b_x)$$

$$\subset G$$

与 a_x 的定义矛盾.

Def 设 $G \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$,

如果开区间 $(a,b) \subset G$ 且 $a, b \notin G$

则称 (a,b) 是 G 的一个构成区间

Cor 如果 $\mathbb{R}$ 中开集 G 可表为互不相交的开区间之并, 则这些开区间一定是构成区间

Q: $\mathbb{R}^n$ 中开集?

Def $\mathbb{R}^n$中的长方体（矩体，rectangle, or box）是指如下形式的集合

$$R \overset{\text{def}}{=} [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

$$= \{(x_1, \cdots, x_n) : a_k \leq x_k \leq b_k, k=1, \cdots, n\}$$

$(a_k < b_k, k=1,2,\cdots,n)$

如果 R 的各边长均相等，则称之为方体（cube）

$$\operatorname{int}(R) = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

Def：对 $k \in \mathbb{Z}$

$$\Gamma_k \overset{\text{def}}{=} \{2^{-k}([0,1]^n + m) : m \in \mathbb{Z}^n\}$$

$$\mathcal{D} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma_k$$

$\mathcal{D}$ 的元素称为二进方体（dyadic cube）

Rmk: 1° $\forall k$，Γ_k 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个划分

i.e. $\mathbb{R}^n = \bigcup_{Q \in \Gamma_k} Q$ 且内部不交并

2° $\forall\, Q, R \in \mathcal{D}$

$$Q^\circ \cap R^\circ \in \{\phi, Q^\circ, R^\circ\}$$

Thm（$\mathbb{R}^n$ 中开集的结构）

$\mathbb{R}^n$ 中非空开集 G 可表为~~至多~~可数个内部互不相交的方体之并.

Pf

$$\mathcal{F}_0 \overset{def}{=} \{Q \in \Gamma_0 : Q \subset G\}$$

$$\mathcal{F}_1 \overset{def}{=} \{Q \in \Gamma_1 : Q \subset G \setminus (\bigcup_{R \in \mathcal{F}_0} R)\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{F}_k \overset{def}{=} \{Q \in \Gamma_k : Q \subset G \setminus (\bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{R \subset \mathcal{F}_j} R)\}$$

$$\vdots$$

Claim $\quad G = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_k} Q$

1° RHS $\subset$ LHS

平凡

2° LHS $\subset$ RHS

$\forall x \in G$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\exists\, Q^{(k)} \in \Gamma_k$ s.t.

$$Q^{(k)} \ni x \qquad \left(\because\ \mathbb{R}^n = \bigcup_{Q \in \Gamma_k} Q\right)$$

Note: $Q^{(k)}$ 不一定 $\in \mathcal{F}_k$ ($\because$ 不一定 $\in G$)

x 是 G 的内点

$\Rightarrow$ $\exists\, r > 0$ s.t. $B_r(x) \subset G$

$\Rightarrow$ 当 k 充分大时

$$Q^{(k)} \subset B_r(x) \subset G$$

$\xRightarrow{\mathcal{F}_k \text{的定义}}$ $Q^{(k)}$ 一定包含于 $\mathcal{F}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_k$ 中某个二进方体

$$\Rightarrow\ x \in Q^{(k)} \subset \bigcup_{j=0}^{k} \bigcup_{Q \subset \mathcal{F}_j} Q \subset \text{RHS}$$