

第九章：双线性函数

§9.1 双线性函数

§9.2 对称双线性函数与二次型

§9.3 斜对称双线性函数

§9.4 共轭双线性函数与Hermite 型 (略)

§9.1 双线性函数

§9.2 对称双线性函数与二次型

§9.3 斜对称双线性函数

§9.4 共轭双线性函数与Hermite 型 (略)

定义 (双线性函数)

设 V 是数域 \mathbb{F} 上的 n 维线性空间, 若 $f: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ 满足:

$$f(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2, \beta) = \lambda_1f(\alpha_1, \beta) + \lambda_2f(\alpha_2, \beta),$$

$$f(\alpha, \mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2) = \mu_1f(\alpha, \beta_1) + \mu_2f(\alpha, \beta_2),$$

则 f 称为 V 上的双线性函数.

例1.

- 设 $L_1, L_2 \in L(V, \mathbb{F})$ 是 V 上的线性函数, 定义

$$f(\alpha, \beta) \triangleq L_1(\alpha)L_2(\beta).$$

则 $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的双线性函数.

- 设 $V = \mathbb{F}^{m \times n}$, 对于 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, 定义 V 上二元函数 $f_A(X, Y)$ 为

$$f_A(X, Y) \triangleq \text{tr}(X^T AY).$$

则 $f_A(X, Y)$ 是 V 上的双线性函数.

性质1.

$$f(\alpha, \mathbf{0}) = 0 = f(\mathbf{0}, \beta)$$

性质2. (双线性性)

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \alpha_i, \sum_{j=1}^q \mu_j \beta_j\right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j f(\alpha_i, \beta_j).$$

线性空间 $L(V, V, \mathbb{F})$

- 记 $L(V, V, \mathbb{F})$ 为 V 上所有双线性函数的集合.

- 加法: 设 $f, g \in L(V, V, \mathbb{F})$, $\alpha, \beta \in V$, 定义

$$(f + g)(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta) + g(\alpha, \beta).$$

- 数乘: 设 $f \in L(V, V, \mathbb{F})$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $\alpha, \beta \in V$, 定义

$$(\lambda f)(\alpha, \beta) = \lambda f(\alpha, \beta).$$

- $L(V, V, \mathbb{F})$ 在上述加法和数乘下成为 \mathbb{F} 上的线性空间.

定义 (双线性函数在基下的方阵)

设 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 V 的一组基, $f \in L(V, V, \mathbb{F})$, 定义

$$A = \left(f(\alpha_i, \alpha_j) \right)_{n \times n} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1, \alpha_1) & f(\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & f(\alpha_1, \alpha_n) \\ f(\alpha_2, \alpha_1) & f(\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & f(\alpha_2, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\alpha_n, \alpha_1) & f(\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & f(\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix},$$

则 n 阶方阵 A 称为双线性函数 f 在基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 下的方阵.

双线性函数的矩阵表示

若 $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i$, 记 $x = (x_1, \dots, x_n)^T, y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{F}^n$, 则

$$f(\alpha, \beta) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \sum_{j=1}^n y_j \alpha_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i f(\alpha_i, \alpha_j) y_j = x^T A y.$$

定理1.

\mathbb{F} 上的线性空间 $L(V, V, \mathbb{F})$ 与 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 同构, 从而 $\dim L(V, V, \mathbb{F}) = n^2$.

定义 (\mathbb{F} 相合)

设 A 与 B 是 n 阶方阵, 如果存在 n 阶可逆方阵 P , 使得

$$B = P^T A P,$$

则方阵 A 与 B 称为相合的.

定理2.

设数域 \mathbb{F} 上的 n 维线性空间 V 上的双线性函数 f 在 V 的基 $\Gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 与 $\Lambda = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 下的方阵分别为 $A = (f(\alpha_i, \alpha_j))$ 与 $B = (f(\beta_i, \beta_j))$, 基之间的过渡方阵为 P , 即 $(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)P$. 则

$$B = P^T A P.$$

也就是同一个双线性函数在不同基下的方阵是相合的.

定义 (秩、退化、非退化)

设 $f(\alpha, \beta)$ 是数域 \mathbb{F} 上的 n 维线性空间 V 上的双线性函数.

- $f(\alpha, \beta)$ 在某组基下的方阵的秩定义为双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 的秩.
- 如果 $f(\alpha, \beta)$ 秩为 n , 则 $f(\alpha, \beta)$ 称为**非退化的**. 否则 $f(\alpha, \beta)$ 称为**退化的**.

定义

- 设 $f(\alpha, \beta)$ 是线性空间 V 上的双线性函数, 若 $f(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α **左正交**于 β (记为 $\alpha \perp_L \beta$), β **右正交**于 α (记为 $\beta \perp_R \alpha$).
- 对子空间 W , 定义子空间:

$$W^{\perp_L} = \{\alpha \in V \mid f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in W\}.$$

$$W^{\perp_R} = \{\alpha \in V \mid f(\beta, \alpha) = 0, \forall \beta \in W\}.$$

- V^{\perp_L}, V^{\perp_R} 分别称为 V 关于双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 的**左根基**与**右根基**.

性质

设 W 与 U 是 V 的子空间, 且 $W \subseteq U$, 则有

(1). $U^{\perp L} \subseteq W^{\perp L}$, $U^{\perp R} \subseteq W^{\perp R}$.

(2). $(W^{\perp L})^{\perp R} \supseteq W$, $(W^{\perp R})^{\perp L} \supseteq W$.

定理3.

设 $f(\alpha, \beta)$ 为 V 上的双线性函数, 则

$$\dim V^{\perp L} = \dim V^{\perp R} = n - \text{rank}(f).$$

推论

V 上的双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 非退化 $\iff V^{\perp L} = 0 \iff V^{\perp R} = 0$.

双线性函数与对偶空间

设 f 为 V 上双线性函数, 取定 $\alpha_0 \in V$, 对 $\beta \in V$, 定义 $L(\alpha_0)(\beta) \triangleq f(\alpha_0, \beta)$, 则 $L(\alpha_0) \in V^*$. 由此定义映射 $\mathcal{A} : V \rightarrow V^*$, 使得 $\mathcal{A}(\alpha) = L(\alpha)$.

定理4.

$\mathcal{A} \in L(V, V^*)$, 并且 $\text{Ker}(\mathcal{A}) = V^{\perp L}$.

定理5.

数域 \mathbb{F} 上 n 维线性空间 V 上的双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 非退化 \iff 任意 $g \in V^*$, 存在 $\alpha \in V$ 使得 $g(\beta) = f(\alpha, \beta) = \mathcal{A}(\alpha)(\beta)$ (即 \mathcal{A} 是满射).

定理6.

数域 \mathbb{F} 上 n 维线性空间 V 上的双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 非退化 \iff 任意 $g \in V^*$, 存在 $\beta \in V$ 使得 $g(\alpha) = f(\alpha, \beta)$.

定义 (对称与斜对称双线性函数)

设 $f(\alpha, \beta)$ 为 V 上双线性函数. 若任意 $\alpha, \beta \in V$, 有

$$f(\beta, \alpha) = f(\alpha, \beta)$$

则 $f(\alpha, \beta)$ 称为**对称的**; 若任意 $\forall \alpha, \beta \in V$, 有

$$f(\beta, \alpha) = -f(\alpha, \beta),$$

则 $f(\alpha, \beta)$ 称为**斜对称的**.

定理7.

任意双线性函数 f 可唯一分解为对称双线性函数 g 与斜对称双线性函数 h 之和:

$$f = g + h, \quad g(\alpha, \beta) = \frac{f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)}{2}, \quad h(\alpha, \beta) = \frac{f(\alpha, \beta) - f(\beta, \alpha)}{2}.$$

定理8.

设 $f(\alpha, \beta)$ 为 V 上双线性函数. 则向量关于 $f(\alpha, \beta)$ 的正交性对称 $\iff f(\alpha, \beta)$ 为对称或斜对称双线性函数.

证明.

充分性显然. 现在对 $\dim V$ 归纳来证明必要性. 首先, 若任意 $\alpha \in V$, 有 $f(\alpha, \alpha) = 0$. 则由 $f(\alpha, \alpha) = f(\beta, \beta) = f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = 0$ 对任意 $\alpha, \beta \in V$ 成立可得 $f(\alpha, \beta)$ 是斜对称的.

若存在 $\alpha_1 \in V$ 满足 $f(\alpha_1, \alpha_1) = a \neq 0$, 令 $W = \langle \alpha_1 \rangle$. 由正交性对称立即有 $W^{\perp L} = W^{\perp R} \triangleq W^\perp$ 并且 $V = W \oplus W^\perp$. 由归纳假设 f_{W^\perp} 为对称的或斜对称的. 若存在 $\alpha, \beta \in W^\perp$, 使得 $f(\beta, \alpha) = -f(\alpha, \beta) = b \neq 0$. 计算得

$$f(b\alpha_1 + \alpha, \alpha_1 + a\beta) = bf(\alpha_1, \alpha_1) + af(\alpha, \beta) = ba - ab = 0.$$

由正交对称性, 则有

$$0 = f(\alpha_1 + a\beta, b\alpha_1 + \alpha) = bf(\alpha_1, \alpha_1) + af(\beta, \alpha) = ba + ab = 2ab$$

矛盾, 即 f_{W^\perp} 不是非零斜对称的, 故 f_{W^\perp} 为对称的, 立即有 f 为对称的. \square

§9.1 双线性函数

§9.2 对称双线性函数与二次型

§9.3 斜对称双线性函数

§9.4 共轭双线性函数与Hermite 型 (略)

$S(V, V, \mathbb{F})$

线性空间 V 的所有对称双线性函数集合记为 $S(V, V, \mathbb{F})$.

定理1.

设 V 为数域 \mathbb{F} 上的 n 维线性空间, 集合 $S(V, V, \mathbb{F})$ 与数域 \mathbb{F} 上所有 n 阶对称方阵集合 $S(n, \mathbb{F})$ 之间存在一一对应.

定理2.

设 f 是数域 \mathbb{F} 上的 n 维线性空间 V 上的对称双线性函数, 则存在 V 的一组基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, 使得 f 在该基下的矩阵为

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_r, 0, \dots, 0), \quad a_i \neq 0, \quad r = \text{rank } f.$$

证明思路.

对维数 n 归纳. 若 $f \neq 0$, 则存在 α_1 使 $f(\alpha_1, \alpha_1) \neq 0$, 令 $W = \text{span}_{\mathbb{F}}\{\alpha_1\}$, 证明 $V = W \oplus W^\perp$, 然后在 W^\perp 上归纳. \square

定理3.

设 $S \in S(n, \mathbb{F})$. 则存在数域 \mathbb{F} 上的 n 阶可逆方阵 P , 使得

$$P^T S P = \text{diag}(a_1, \dots, a_r, 0, \dots, 0), \quad a_i \neq 0, \quad r = \text{rank } f.$$

注记.

- 如果 V 的基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 中任意两个向量 α_i 与 α_j 关于 $f(\alpha, \beta)$ 是正交的, 则这组基称为 V 的关于 $f(\alpha, \beta)$ 的正交基.
- 任意对称双线性函数 $f(\alpha, \beta)$, 存在关于 $f(\alpha, \beta)$ 的正交基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, 使得 $f(\alpha, \beta)$ 在这组基下的方阵是对角阵. 而且 V 中由基向量 $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ 生成的子空间即是 $f(\alpha, \beta)$ 的根基 $V^\perp = V^{\perp L} = V^{\perp R}$.
- 数域 \mathbb{F} 上的 n 阶对称方阵相合于对角阵.

定理4.

设 $f(\alpha, \beta)$ 是实线性空间 V 上的对称双线性函数, 则存在基使 $f(\alpha, \beta)$ 的矩阵为

$$\text{diag}(I_p, -I_q, 0), \quad p + q = \text{rank } f.$$

定义 (正定/半正定)

设 $f(\alpha, \beta)$ 是实线性空间 V 上的对称双线性函数.

- 如果对任意非零向量 $\alpha \in V$, 均有 $f(\alpha, \alpha) > 0$, 则 $f(\alpha, \beta)$ 称为正定的.
- 如果对任意向量 $\alpha \in V$, 均有 $f(\alpha, \alpha) \geq 0$, 则 $f(\alpha, \beta)$ 称为半正定的.
- 类似可以定义负定与半负定对称双线性函数.

定理5.

- 设 $f(\alpha, \beta)$ 是 n 维实线性空间 V 上的对称双线性函数. 则空间 V 可以分解为子空间 V^+ , V^- 与 V^\perp 的直和, 即

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus V^\perp,$$

使得 $f(\alpha, \beta)$ 在 V^+ 与 V^- 上的限制分别是正定与负定的.

- 如果空间 V 还可以分解为子空间 V_1^+ , V_1^- 与 V^\perp 的直和, 使得 $f(\alpha, \beta)$ 在 V_1^+ 与 V_1^- 上的限制分别是正定与负定的, 则

$$\dim V_1^+ = \dim V^+, \quad \dim V_1^- = \dim V^-.$$

定义 (正负惯性指数、符号差)

设 $f(\alpha, \beta)$ 是 n 维实线性空间 V 上的对称双线性函数. $p = \dim V^+$ 称为 $f(\alpha, \beta)$ 的**正惯性指数**; $q = \dim V^-$ 称为 $f(\alpha, \beta)$ 的**负惯性指数**; $\delta(f) = p - q$ 称为 $f(\alpha, \beta)$ 的**符号差**.

定理6. 惯性定理

设 $f(\alpha, \beta)$ 是 n 维实线性空间 V 上的对称双线性函数, 则正惯性指数 p 与负惯性指数 q 是 $f(\alpha, \beta)$ 的不变量.

定理7.

设 S 为 n 阶实对称方阵, 则存在可逆实方阵 P 使得

$$P^T S P = \text{diag}(I_p, -I_q, 0).$$

$p, q, \delta(S) = p - q$ 是相合下的**全系不变量**.

推论

两个实对称矩阵相合 \iff 它们有相同的秩和符号差.

欧氏空间中的对称双线性函数

定义 (特征值)

n 维欧氏空间 V 上的对称双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 在 V 的标准正交基下的方阵 S 的特征值称为 $f(\alpha, \beta)$ 的特征值.

定理8.

设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ 是 n 维欧氏空间 V 的对称双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 的全部非零特征值, 则存在 V 的标准正交基 $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, 使得 $f(\alpha, \beta)$ 在基下的方阵为

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0),$$

其中 $r = \text{rank } f$.

复对称双线性函数的规范形

定理9.

设 $f(\alpha, \beta)$ 是 n 维复线性空间 V 上的对称双线性函数, 则存在基使得 $f(\alpha, \beta)$ 的方阵为

$$\text{diag}(I_r, \mathbf{O}),$$

其中 $r = \text{rank } f$.

定理10.

复对称矩阵 S 相合于 $\text{diag}(I_r, \mathbf{O})$, 且秩 r 是相合下的全系不变量.

定义 (二次型)

设 $f(\alpha, \beta)$ 是对称双线性函数, 则 $Q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$ 称为 V 上的二次型.

对应结论:

设 $Q(\alpha)$ 是数域 \mathbb{F} 上线性空间 V 上的二次型.

- 一般数域 \mathbb{F} : 存在基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 使得

$$Q(\alpha) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2.$$

- 数域 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: 存在基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 使得

$$Q(\alpha) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2.$$

- V 是欧氏空间: 存在标准正交基 $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ 使得有如下主轴形式

$$Q(\alpha) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2.$$

- 数域 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$: 存在基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 使得

$$Q(\alpha) = x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_r^2.$$

二次型化简的两种主要形式

问题描述

设 $Q(\alpha)$ 是线性空间 V 上二次型, 通过坐标变换将其化为更简单的形式.

主轴形式 (Euclid空间)

$$Q(\alpha) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2.$$

- λ_i 为特征值.
- 需要标准正交基.
- 几何意义明确.

标准形 (实线性空间)

$$Q(\alpha) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2.$$

- p, q 为惯性指数.
- 任意基即可.
- 配方法直接可得.

1. 化简为主轴形式

设 $Q(\alpha) = x^T S x$, 其中 S 为对称矩阵, x 为坐标向量.

(1). 求特征值:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - S)$$

得非零特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_t$.

(2). 求特征子空间: 对每个 λ_i , 解:

$$(\lambda_i I_n - S)x = 0$$

得特征子空间 V_{λ_i} , 维数 n_i .

(3). 构造标准正交基: 对每个 V_{λ_i} 求标准正交基 $\{\eta_1^{(i)}, \dots, \eta_{n_i}^{(i)}\}$.

(4). 构造正交矩阵:

$$O = (\eta_1^{(1)}, \dots, \eta_{n_1}^{(1)}, \dots, \eta_1^{(t)}, \dots, \eta_{n_t}^{(t)}).$$

(5). 得到主轴形式:

$$Q(\alpha) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2.$$

例1.

将二次型 $Q(\alpha) = x_1x_2 + x_2x_3$ 化为主轴形式.

解.

(1). 写出矩阵: $S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$

(2). 求特征值: $\varphi_S(\lambda) = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda \implies \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_3 = 0.$

(3). 求单位特征向量:

- λ_1 : 解 $Sx = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ 得 $x = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})^T.$
- λ_2 : $x = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})^T.$
- λ_3 : $x = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})^T.$

(4). 构造正交矩阵: $O = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$ 使得 $O^T S O = \text{diag} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$

(5). 主轴形式: $Q(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}y_1^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_2^2.$

□

$$\text{设 } Q(\alpha) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j.$$

2. 直接配方法. 情况1: 有平方项 $a_{11} \neq 0$.

(1). 提取含 x_1 的项:

$$Q = a_{11}x_1^2 + 2 \left(\sum_{j=2}^n a_{1j}x_j \right) x_1 + \text{其余项}.$$

(2). 配方:

$$Q = a_{11} \left(x_1 + \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right)^2 - a_{11} \left(\sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right)^2 + Q_1.$$

(3). 变换:

$$y_1 = \sqrt{|a_{11}|} \left(x_1 + \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right), \quad y_i = x_i \quad (i \geq 2).$$

情况2: $a_{11} = 0$, 但存在 $i \geq 2$, $a_{ii} \neq 0$.

- 交换 x_1 和 x_i 的位置:

$$(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)P_{i1},$$

其中 P_{i1} 为置换矩阵.

- 已转化为情况1.

情况3: 无平方项, 但 $a_{12} \neq 0$.

- 作变换:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \\ y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), \\ y_i = x_i \quad (i \geq 3). \end{cases}$$

得: $Q = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + \dots$

- 已转化为情况1.

情况4: 无平方项且 $a_{12} = 0$, 但有 $a_{ij} \neq 0$.

- 通过两次置换:

$$(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)P_{i1}P_{2j},$$

使 y_1y_2 的系数不为零.

- 已转化为情况3.

惯性定理

经过上述配方得到的标准形:

$$Q = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2,$$

其中正惯性指数 p 和负惯性指数 q 是唯一确定的.

例2. 配方法化标准形

$$Q(\alpha) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4.$$

解.

(1). 对 x_1 配方

$$\begin{aligned} Q &= x_1^2 + 2x_1(-x_2 + x_3 - x_4) + (x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - (-x_2 + x_3 - x_4)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3x_4^2 + 4x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4. \end{aligned}$$

(2). 变量代换

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \\ u_i = x_i \quad (i = 2, 3, 4). \end{cases}$$

得:

$$Q = u_1^2 - 3u_4^2 + 4u_2u_3 - 6u_2u_4 + 2u_3u_4.$$

解. (续).

(3). 继续配方, 先整理 u_2, u_3 项: $4u_2u_3 = \frac{1}{3} [(3u_2 - u_3)^2 - 9u_2^2 - u_3^2]$.

(4). 代入并配方:

$$\begin{aligned} Q &= u_1^2 - 3u_4^2 + \frac{1}{3}(3u_2 - u_3)^2 - 3u_2^2 - \frac{1}{3}u_3^2 - 6u_2u_4 + 2u_3u_4 \\ &= u_1^2 - \left[\frac{1}{3}(3u_2 - u_3)^2 + 2(3u_2 - u_3)u_4 + 3u_4^2 \right] + 3u_2^2 + 2u_2u_3 + \frac{1}{3}u_3^2 \\ &= u_1^2 - \left(\sqrt{3}u_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}u_3 + \sqrt{3}u_4 \right)^2 + \left(\sqrt{3}u_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}u_3 \right)^2. \end{aligned}$$

(5). 变量代换

$$\begin{cases} y_1 = u_1 \\ y_2 = \sqrt{3}u_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}u_3 \\ y_3 = \sqrt{3}u_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}u_3 + \sqrt{3}u_4 \\ y_4 = u_4 \end{cases}$$

得: $Q = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \implies p = 2, q = 1, r = 3.$

□

3. 矩阵形式的配方法

将配方法用矩阵运算表示, 便于系统化处理.

同步置换

$$S_1 = P^T S P$$

- P 为置换矩阵.
- 交换行列位置.
- 将非零对角元移到左上角.

分块消元公式

设 $S = \begin{pmatrix} a_{11} & \beta^T \\ \beta & S_0 \end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{11}^{-1}\beta & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \beta^T \\ \beta & S_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\beta^T \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & S_0 - a_{11}^{-1}\beta\beta^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Schur补公式

上式是Schur补公式的特例:

$$S_0 - a_{11}^{-1}\beta\beta^T$$

称为 a_{11} 在 S 中的Schur补.

例3.

用矩阵变换法化二次型 $Q(\alpha) = x_1x_2 + x_2x_3$ 为标准形.

解.

(1). 写出对称矩阵: $S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(2). 化对角元非零:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies Q^T S Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(3). 对角化:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^T (Q^T S Q) R = \text{diag}(1, -1, 0).$$

解 (续).

(4). 总变换矩阵: $P = (QR)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(5). 坐标变换: $y = Px$, 即:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

(6). 标准形:

$$\boxed{Q(\alpha) = y_1^2 - y_2^2} \implies p = 1, q = 1, r = 2. \quad \square$$

比较例1与例3.

- 特征值法: $Q = \frac{\sqrt{2}}{2}z_1^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}z_2^2$ (主轴形式).
- 配方法: $Q = y_1^2 - y_2^2$ (标准形).

两者等价, 仅差一个伸缩变换.

例4. 符号差公式

设 S 与 $S - \alpha\alpha^T$ 是 n 阶可逆实对称矩阵, α 为 n 维列向量, 则:

$$\delta(S) = \begin{cases} \delta(S - \alpha\alpha^T) + 2, & \alpha S^{-1}\alpha^T > 1, \\ \delta(S - \alpha\alpha^T), & \alpha S^{-1}\alpha^T < 1. \end{cases}$$

证明.

(1). 构造矩阵: $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^T \\ \alpha & S \end{pmatrix}$.

(2). 用 1 消元: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha^T \\ \alpha & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^T \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S - \alpha\alpha^T \end{pmatrix} = S_1$.

(3). 用 S 消元:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha^T S^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha^T \\ \alpha & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S^{-1}\alpha & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha^T S^{-1}\alpha & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = S_2$$

(4). 由惯性定理: $1 + \delta(S - \alpha\alpha^T) = \delta(S_1) = \delta(S_2) = \text{sgn}(1 - \alpha^T S^{-1}\alpha) + \delta(S)$, 分情况讨论即得结论. □

§9.1 双线性函数

§9.2 对称双线性函数与二次型

§9.3 斜对称双线性函数

§9.4 共轭双线性函数与Hermite 型 (略)

定义 (斜对称双线性函数)

设 V 是数域 \mathbb{F} 上线性空间, 若双线性函数 $f : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ 满足:

$$f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha), \quad \forall \alpha, \beta \in V,$$

则称 $f(\alpha, \beta)$ 为 V 上的斜对称双线性函数.

斜对称双线性函数的性质

设 $f(\alpha, \beta)$ 是数域 \mathbb{F} 上 n 维线性空间 V 上的双线性函数.

- $f(\alpha, \beta)$ 是斜对称 $\iff f(\alpha, \alpha) = 0$ 对所有 $\alpha \in V$ 成立.
- $f(\alpha, \beta)$ 是斜对称 $\iff f(\alpha, \beta)$ 在 V 的某组基下的方阵是斜对称的.
- 若 $f(\alpha, \beta)$ 是斜对称, 则正交性是对称, 即:

$$f(\alpha, \beta) = 0 \iff f(\beta, \alpha) = 0.$$

定理1.

数域 \mathbb{F} 上 n 维线性空间 V 上所有斜对称双线性函数集合 $K(V, V, \mathbb{F})$ 与数域 \mathbb{F} 上的所有 n 阶斜对称方阵集合 $K(n, \mathbb{F})$ 之间存在双射.

定理2. 斜对称双线性函数的标准形

设 $f(\alpha, \beta)$ 是数域 \mathbb{F} 上 n 维线性空间 V 上的斜对称双线性函数, 则存在 V 的基 $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, 使得 $f(\alpha, \beta)$ 在该基下的方阵为:

$$\text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0 \right),$$

其中秩 $\text{rank} f = 2s$. 此时有

$$f(\alpha, \beta) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + \dots + (x_{2s-1} y_{2s} - x_{2s} y_{2s-1}).$$

证明.

- (1). 对维数 n 归纳, 且 $n = 1$ 时 $f \equiv 0$ 显然成立.
- (2). 若 $f \equiv 0$ 则结论成立. 否则存在 α, β 使得 $f(\alpha, \beta) = b \neq 0$. 取 $\xi_1 = \alpha$, $\xi_2 = b^{-1}\beta$, 则 ξ_1, ξ_2 线性无关, 并且

$$f(\xi_1, \xi_2) = 1, \quad f(\xi_1, \xi_1) = f(\xi_2, \xi_2) = 0.$$

- (3). 令 $W = \text{span}_{\mathbb{F}}\{\xi_1, \xi_2\}$, W^\perp 为其正交补. 证明 $V = W \oplus W^\perp$ 即可. □

斜对称方阵的相合标准形

定理3.

- 设 K 是数域 \mathbb{F} 上的 n 阶斜对称方阵, 则存在数域 \mathbb{F} 上的 n 阶可逆方阵 P , 使得

$$P^T K P = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0 \right),$$

其中秩 $\text{rank} K = 2s$.

- 换句话说, 数域 \mathbb{F} 上的 n 阶斜对称方阵相合 (通过数域 \mathbb{F} 上的方阵) 于上述标准形, 并且斜对称方阵的秩是斜对称方阵在相合下的**全系不变量**.

§9.1 双线性函数

§9.2 对称双线性函数与二次型

§9.3 斜对称双线性函数

§9.4 共轭双线性函数与Hermite 型 (略)